Problemy Matematyczne
11 (1989), 131 - 138

О введении понятия "вектор" в средней школе

А. Ф. Семенович

Обстоятельная критика определений понятий "вектор", используемых в некоторых учебных пособиях по геометрии для средней школы, дана в статье А.Д. Александрова [1]. Методическая трудность определения этого понятия состоит, по-видимому в том, что в курсах физики и геметрии используются различные его интерпретации. Можно согласиться с предложением считать вектором любую величину, которая "определяется указанием направления и модуля и подчиняется правилу векторного сложения" [1; стр.40] и затем сказать, что в "геометрии вектор - частный случай таких векторов, это вектор, модулем которого является длина" [1; стр.45]. Однако, возможен более общий подход к введению этого понятия в средней школе, при котором "вектор в геометрии" не рассматривается как "частный случай вектора в физике". О таком именно подходе и рассказывается в нашей статье. Он представляется нам предпочт ительнее, поскольку учащиеся приходят к пониманию изучаемых ими понятий "скорость", "сила", "параллельный перенос" и т.д. как конкретных примеров одного более общего понятия "вектор". Ниже с некоторыми сокращениями приводится текст, который предлагался нами учащимся 7 класса (сравни с изложением соответствующего материала в книге [2]). Естественно, текст сопровождался упражнениями, которые здесь опущены из-за недостатка места.

1. ПОНЯТИЕ О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ

[1] В начале первого параграфа дается определение сонаправленных лучей и перечисляются свойства сонаправленных лучей.

[2] Отметим на плоскости две точки A и A_1. Проведем луч AA_1. Он задает определенное направление. Пусть X - произвольная точка плоскости. Построим луч XM заданного направления и отложим на нем отрезок XX_1 длины AA_1. Точке X сопоставим точку X_1. Тогда каждой точке X на плоскости будет соответствовать одна определенная точка X_1, и каждая точка Y_1 будет образом некоторой точки Y (т.е. каждая точка Y_1 будет сопоставлена некоторой точке Y). Получим отображение плоскости, которое называют параллельным переносом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Параллельным переносом называется отображение, при котором каждая точка X плоскости отображается на такую точку X_1 , что 1) луч XX_1 имеет заданное направление, 2) отрезок XX_1 имеет заданную длину.

Наглядное представление о параллельном переносе можно получить с помощью сдвига кальки по листу бумаги в заданном направлении на заданное расстояние.

Если каждая точка отображается на себя (т.е. "сдвиг" проводится на "нулевое расстояние"), то будем говорить о нулевом параллельном переносе.

Чтобы задать параллельный перенос, достаточно задать какую-либо точку A и ее образ A_1. Действительно, тогда будет задано и направление параллельного переноса (лучом AA_1) и расстояние AA_1.

Параллельный перенос, отображающий точку A на точку A_1 , будем обозначать так: $\vec{AA_1}$. Такой параллельный перенос удобно изображать стрелкой (направленным отрезком) с началом A и концом A_1. Будем пользоваться и другими обозначениями параллельных переносов - строчными буквами со стрелкой: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Запись $\vec{a} = \vec{AA_1}$ означает, что при параллельном переносе $\vec{a}$ точка A отображается на точку A_1.

2. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

В этом параграфе доказывается, что параллельный перенос является перемещением (движением), и что образом луча при параллельном переносе является сонаправленный ему луч. Без доказательства указывается признак параллельного переноса: если при перемещении каждый луч отображается на сонаправленный ему луч, то это перемещение есть параллельный перенос. С помощью параллельных переносов доказывается следующая теорема:

ТЕОРЕМА:
Два выпуклых угла с соответственно сонаправленными сторонами равны.

Свойство, выраженное этой теоремой можно можно сформулировать иначе: величина выпуклого угла, образованного лучами двух данных направлений, одна и та же. Эту величину называют углом между данными направлениями.

3. ОПЕРАЦИИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЕРЕНОСАМИ

1. При сложении чисел каждой паре чисел сопоставляется по определенному правилу единственное число - их сумма. Для параллельных переносов тоже можно указать правило, по которому каждой паре параллельных переносов будет сопоставляться определенный перенос - их сумма.

Пусть даны два параллельных переноса $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Параллельный перенос $\vec{a}$ отобразит произвольный луч p на сонаправленный ему луч p_1. Параллельные перенос $\vec{b}$ отобразит луч p_1 на сонаправленный ему ему луч p_2 . Значит, перемещение, полученное в результате последовательного выполнения параллельных переносов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отобразит луч p на сонаправленный ему луч p_2. Но такое перемещение является параллельным переносом (по признаку параллельного переноса).

Итак, в результатае последовательного выполнения двух параллельных переносов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получается снова параллельный перенос. Этот параллельный перенос называется суммой данных параллельных переносов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, операция сложения параллельных переносов имеет очень простой смысл - последовательное выполнение этих параллельных переносов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Суммой двух параллельных переносов называется параллельный перенос, полученный в результате последовательного выполнения этих параллельных переносов.

Далее решаются две задачи.

ЗАДАЧА 1. Найдите сумму двух данных параллельных переносов $\vec{AB}$ и $\vec{XY}$.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что сумма параллельных переносов $\vec{AB}$ и $\vec{XY}$ равна сумме параллельных переносов $\vec{XY}$ и $\vec{AB}$.

2. Рассмотрим умножение параллельного переноса на число.

При умножении параллельного перноса на число k надо учесть различные случаи: число k может быть положительным, отрицательным или нулем.

Произведением параллельного преноса $\vec{AB}$ па число $k \neq 0$ называется параллельныио перенос $\vec{AM}$ на расстояние $AB.k$; этот параллельныио перенос имеет направление данного параллельного переноса $\vec{AB}$, если $k > 0$ и противоположное направление, если $k < 0$.

Произведением параллельного переноса на число нуль называется нулевой параллельный перенос. Произведением нулевого параллельного переноса на любое число называется нулевой параллельный перенос. Произведение параллельного перепоса $\vec{a} = \vec{AB}$ на число k обозначается через $k\vec{a}$ или $k\vec{AB}$ (числовой множитель пишется слева.)

4. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА В ГЕОМЕТРИИ

1. Некоторые из величин при выбранной единице измерения задаются своими числовыми значениями. Таковы, например, расстояние, площадь, масса, температура. Эти величины называются скалярными. Но есть и такие величины, для задания которых надо указывать еще и их направление. Для задания скорости, например, надо указать не только ее числовое значение, но и направление. Скорость — векторная величина. Она являеется одним из примеров понятия "вектор".

Другим примером, известным вам из курса физики, является сила. Для задания силы тоже надо указать не только ее числовое значение, но и направление. В дальнейшем вы познакомитесь и с иными примерами векторов.

Что же общего между всеми примерами векторов, например, между скоростью и силой? Во-первых, и скорость, и сила характеризуются чи-

словым значением и направлением. Во-вторых, скорости можно складывать и умножать на числа, и силы тоже можно складывать и умножать на числа.
2. Изображен подъемныио кран, движущийся по рельсам прямолинейно. Все его точки имеют одну и ту же скорость. Изображением этой скорости можно считать любую из стрелок, , независимо от начальных точек (точек приложения) этих стрелок. Скорость является примером "свободного" вектора, не зависящего от "точки приложения".

Примером свободного вектора в геометрии является параллел ьный перенос. Параллельный перенос $\vec{AB}$ задается числовым значением — расстоянием AB, и направлением — направлением луча AB. Параллельные переносы можно складывать и умножать на числа. Кроме того, параллельный перенос не зависит от точки "приложения", так как его можно задать любой парой соответственных точек.

В курсе геометрии будут рассматриваться только примеры свободных векторов, а именно,– - параллельные переносы, для которых определены операции сложения и умножения на число.
3. Изображены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, которые имеют равные числовые значения и одно и то же направление. Но они оказывают на тело разные воздействия, так как приложены к разным его точкам. Сила "зависит от точки приложения"; она является примером "приложенного" вектора.

Приложенные векторы в курсе геометрии рассматриваться не будут.
4. Векторы (в геометрии — параллельные переносы, для которых определены операции сложения и умножения на число) мы уже условились обозначать парами прописных букв со стрелкой вверху (например, $\vec{AB}$) или строчными буквами со стрелкой (например, $\vec{a}$).

<u>Условным изображением вектора $\vec{AB}$</u> будем считать направленный отрезок AB . Изображены несколько пар соответственных при параллельном переносе точек: $X \longrightarrow Y$, $A \longrightarrow B$, $C \longrightarrow D$. Направленные отрезки XY, AB, CD изображают один и тот же вектор $\vec{a}$, что записывается так: $\vec{a} = \vec{XY} = \vec{AB} = \vec{CD}$. В этом случае говорят также, что векторы $\vec{XY}$, $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ равны.

Изображен параллелограмм $ABCD$. Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$ — это один и тот же вектор, так как пары точек $A \longrightarrow B$ и $D \longrightarrow C$ задают один и тот же параллельный перенос: $\vec{AB} = \vec{DC}$. Векторы $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$ - - различные векторы, так как они задают разные параллельные переносы (у них различны направления).

Далее даются определения направления вектора, длины вектора, коллинеарных векторов и угла между ненулевыми векторами.

5. Пусть дано одно из изображений вектора $\vec{a}$ — направленный отрезок AB. И пусть X– - произвольно заданная точка. Тогда легко построить направленный отрезок с началом в точке X, являющийся изображением того же вектора $\vec{a}$. Для этого надо построить луч XM, сонаправленный лучу AB, и отложить на нем отрезок XY длиной AB. Направленный отрезок XY будет искомым изображением вектора $\vec{a}$. Построение такого изображения вектора $\vec{a}$ называется откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки X.

5. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Поскольку в нашем курсе геометрии параллельные переносы получили и другое название — векторы, то суммой векторов будем называть сумму соответственных параллельных переносов.

Пусть даны векторв $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от точки A вектор $\vec{a}$. : $\vec{AB} = \vec{a}$. Затем от точки B отложим вектор $\vec{BC} = \vec{b}$. Суммой параллельных переносов $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{BC} = \vec{b}$ является параллельный перенос $\vec{AC}$. Значит, суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{AC}$. Указанное правило полученной суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется правилом треугольника. Теперь сумме векторов можно дать такое определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Суммой двух векторов называется вектор, полученный по правилу треугольника.

2. Сложение векторов подчиняется следующим законам.

1) Закон поглощения нулевого вектора: сумма любого вектора $\vec{a}$ и нулевого вектора равна тому же вектору $\vec{a}$.

2) Закон существования противоположного вектора: Для любого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор - $\vec{a}$, такой, что сумма векторов $\vec{a}$ и -$\vec{a}$ равна нулевому вектору.

3) Сочетательный закон: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

4) Переместительный закон: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Далее приводятся доказательства этих законов.

6. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО 1. В **3** было сформулировано определение произведения параллельного переноса на число. Сформулируем его короче, употребив слово "вектор".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$ называется вектор, длина которого равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на число k, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k > 0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$ при $k < 0$.

В этом определении не рассмотрены случаи $\vec{a} = \vec{0}$ и $k = 0$. Для этих случаев принимаются дополнительные определения:
$k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ для любого k; $\vec{a} \cdot 0 = \vec{0}$ для любого $\vec{a}$.

2. Умножение вектора на число подчиняется следующим законам:
1) Произведение вектора на единицу равно этому вектору.
2) Сочетательный закон: $(xy)\vec{a} = x(y\vec{a})$.
3) Первый распределительный закон: $(x + y)\vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$.
4) Второй распределительный закон: $x(\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$.
Первый закон вытекает непосредственно из определения умножения вектора на число. Доказательство остальных законов не является материалом, обязательным для изучения всеми учащимися. Надо лишь понимать их.

7. ЧТО ЖЕ НАЗЫВАЕТСЯ ВЕКТОРОМ? Рассматриваемые в курсе физики и геометрии примеры векторов хотя и весьма различны, но имеют и общие свойства. Они являются примерами отвлеченного понятия "вектор". Отвлеченными (абстрактными) пронятиями вы пользуетесь очень часто не только в математике, но и в повседневной жизни. Например, "дом", "парта", "корабль" и т.п. - это абстрактные понятия, если речь идет не о конкретном доме, не о конкретной парте, а о "доме вообще", о "парте вообще" и т.д. Дом в котором вы живете - это конкретный пример абстрактного понятия "дом". Понятие "вектор" тоже абстрактное поныатие. Примерами этого понятия являются скорость, сила, параллельный перенос и др. Вектор характеризуется числовым значением, направлением, и для векторов определены операции сложения и умножения на числа. Эти операции обладают перечисленными в параграфах 5 и 7 свойствами (четыре закона сложения векторов и четыре закона умножения вектора на число).

Литература

[1] А.А. Александров, Так что же такое вектор?, Журн. "Математика в школе", 1984 г., Ђ 5, стр. 39-46

[2] А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов, Геометрия. Учебное пособие для 6-8 классов средней школы. Под редакцией А.Н. Колмогорова, Изд. 4-е, М., Просвещение, 1982

Черкасский пединститут
Черкассы 257000
ул. К. Маркса 24

Received before 23.12.1988