Problemy Matematyczne
11 (1989), 123–129

Преобразования связностей поверхности, сохраняющие геодезические и чебышевские свойства сети

В.А. Камаев

В исследованиях по теории сетей двумерного пространства с сетью связывается ряд так называемых геодезических и чебышевских векторов, являющихся носителями геодезических и чебышевских свойств сети. Мы будем так называть вектор

$$(1) \qquad {}_{\alpha}a_p = -\frac{1}{2}{}_{\beta}A^3_p{}_{\alpha}A^i_{s/k}{}_{\gamma}A^k_i = -\frac{1}{2}{}_{\gamma}A^s_p{}_{\alpha}A^i_{s/k}{}_{\beta}A^k_i \ldots$$

названный В.И. Шуликовским геодезическим вектором сети "а" относительно тройки сетей "${}_{\alpha}a$", "${}_{\beta}a$", "${}_{\gamma}a$" и вектор

$$(2) \qquad {}_{\alpha}a_p = \frac{1}{2}{}_{\alpha}A^s_p{}_{\alpha}A^i_{s/i} = -\frac{1}{2}{}_{\alpha}A^i_s{}_{\alpha}A^s_{p/i}, \quad \ldots$$

известный в литературе как первый чебышевский вектор Я.С. Дубнова ([1], 28). Здесь ${}_{\alpha}A^i_s$, ${}_{\beta}A^i_s$, ${}_{\gamma}A^i_s$ приведенные аффиноры тройки сетей "${}_{\alpha}a$", "${}_{\beta}a$", "${}_{\gamma}a$" ([1], § 8), а черта обозначает ковариантное дифференцирование в некоторой аффинной связности Γ.

Решается задача:найти все преобразования связностей, сохраняющих геодезический вектор (1) (чебышевский вектор (2)).

Пусть преобразование $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ сохраняет вектор (2). Обозначая через T тензор деформации, соответствующий этому преобразованию, имеем:

$$\nabla^{\Gamma'}_k A^k_s = \nabla^{\Gamma}_k A^k_s + T^k_{km}A^m_s - T^m_{ks}A^k_m = \nabla^{\Gamma}_k A^k_s,$$

откуда следует соотношение

$$(T^i_{jk}\delta^m_s - T^m_{ks})A^k_m = \emptyset$$

Следовательно,

$$T^i_{jk}\delta^m_s - T^m_{ks} = -x_s\ {}_2A^m_k - y_s\ {}_3A^m_k,$$

где x_i и y_i-некоторые векторы поверхности, а ${}_2A^m_k$ и ${}_3A^m_k$-аффиноры лыубых независимых сетей "${}_2a$" и "${}_3a$", аполярных сети "a".

Примечание: для удобства дальнейших рассмотрений будем считать, что сети "${}_1a$", "${}_2a$", "${}_3a$", образуют тройку сетей, которую быдем обозначать "${}_\alpha a$", "${}_\beta a$", "${}_\gamma a$", условившись, что (α, β, γ) принимает одно из трех значений (1,2,3), (2,3,1), (3,2,1). Там, где корректность зависит от выбора тройки сетей, вопрос быдет решаться особо.

В новых обозначениях последнее равенство примет вид

$${}_\alpha T^i_{jk}\delta^m_s -{}_\alpha T^m_{ks} = -x_s\ {}_\beta A^m_k - y_s\ {}_\gamma A^m_k,$$

Свертывая обе части этого равенства по индексам m и s, находим

$${}_\alpha T^j_{jk} ={}_\beta A^j_k x_j -{}_\gamma A^j_k y_j;$$

Подставим найденное значение ${}_\alpha T^j_{jk}$ в предыдуще равенство, получим выражение тензора деформации через тензоры тройки

$$\begin{aligned}{}_\alpha T^m_{ks} &= (-{}_\beta A^j_k x_j -{}_\gamma A^j_k y_j)\delta^m_s - x_s\ {}_\beta A^m_k - y_s\ {}_\gamma A^m_k = \\ &= ({}_\beta A^m_k \delta^j_s -{}_\beta A^j_k \delta^m_s)x_j + ({}_\gamma A^m_k \delta^j_s -{}_\gamma A^j_k \delta^m_s)y_j = \\ &= \varepsilon^{mj} x_j\ {}_\beta A_{ks} + \varepsilon^{mj} y_j\ {}_\gamma A_{ks} = x^m\ {}_\beta A_{ks} + y^m\ {}_\gamma A_{ks}\end{aligned}$$

(здесь ε_{ij}-некоторый бивектор поверхности, используемый в качестве вектора).

Итак, тензор аффинной деформации, соответствыющей преобразованию $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ имеет строение:

$$(3) \qquad {}_\alpha T^i_{sk} = x^i_\beta A_{sk} + y^i_\gamma A_{sk}, \ldots$$

где x_i, y_i- произвольные векторы поверхности.

Пусть теперь вместо сетей "${}_\beta a$", и "${}_\gamma a$" взяты сети " ${}_\beta\overset{*}{a}$ ", и " ${}_\gamma\overset{*}{a}$ " с афинорами

$${}_\beta\overset{*}{A}{}^s_i ={}_\beta A^s_i \cos\omega +{}_\gamma A^s_i \sin\omega$$

$$(4) \qquad {}_\gamma\overset{*}{A}{}^s_i = {}_\beta A^s_i \sin\omega + {}_\gamma A^s_i \cos\omega$$

Тензор деформации преобразования $\sigma : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ выразится через тензоры новой тройки аналогично (3):

$${}_\alpha T^i_{sk} = \overset{*}{x}{}^i \, {}_\beta\overset{*}{A}_{sk} + \overset{*}{y}{}^i \, {}_\gamma\overset{*}{A}_{sk}$$

Подставив сюда выражения для ${}_\beta\overset{*}{A}_{sk}$ и ${}_\gamma\overset{*}{A}_{sk}$ и сравнивая полученное равенство с (3), будем иметь:

$$\overset{*}{x}_i = x_i \cos\omega + y_i \sin\omega$$

$$\overset{*}{y}_i = -x_i \sin\omega + y_i \cos\omega$$

Следовательно, при преобразовании (4) тройки сетей, содержащей сеть "${}_\alpha a$", векторы x_i и y_i, определяющие преобразование связности, которое сохраняет чебышевский вектор сети "${}_\alpha a$", соопреобразуются, т.е. имеют ту же матрицу, что и аффиноры сети.

Группу рассматриваемых преобразований связности назовем чебышевской группой сети "a" и будем обозначать $G\Lambda(a)$.

Аналогично, геодезической группой сети "a" назовем группу преобразований связностей, сохраняющих геодезические векторы (1) сети "a" относительно троек сетей, содержащих эту сеть. Эту группу обозначим символом $G\Gamma(a)$.

При замене тройки сетей по формулам (4) геодезический вектор (1) преобразуется по закону ([1])

$${}_\alpha\overset{*}{\alpha}_i = {}_\alpha \alpha_i \cos 2\omega + {}_\alpha A^s_i \, {}_\alpha\alpha_s \sin 2\omega$$

Следовательно, если при некотором преобразовании связностей остается неизменнымгеодезический вектор сети относительно какой-нибудь тройки, то не изменяются при этом преобразовании геодезические векторы сети относительно всех троек, содержащих эту сеть.

Пусть $\tau : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$- преобразование, сохраняюще, геодезические векторы сети "a". Обозначим тензор аффинной деформации, соответствуыущей этому преобразованию, через t, будем иметь:

$$t^k_{ij} \, {}_\alpha A^j_s \, {}_\gamma A^i_k - t^m_{is} \, {}_\alpha A^k_m \, {}_\gamma A^i_k = (t^j_{ik} \, {}_\gamma A^k_j \delta^m_s - t^m_{is} \, {}_\gamma A^i_k)_\alpha A^k_m = 0,$$

откуда следует, что

$$t^j_{ik\,\gamma}A^i_j\delta^m_s - t^m_{is\,\gamma}A^i_k = -p_{s\,\beta}A^m_k - q_{s\,\gamma}A^m_k \ldots \tag{5}$$

Умножая обе части последнего равенства на ${}_\gamma A^k_m$, получаем

$$t^m_{ns} = -{}_\gamma A^k_n\,{}_\gamma A^i_j t^j_{ik}\delta^m_s + p_{s\,\alpha}A^m_n + q_s\delta^m_n.$$

Проальтернировав равенство по индексам n и s и учтя симметрию тензора t^m_{ns}:

$$\varepsilon_{ns}({}_\gamma A^k_m\,{}_\gamma A^i_j t^j_{ik} -_\alpha A^{ml}p_l + q^m) = \emptyset,$$

находим выражение вектора ${}_\gamma A^k_m\,{}_\gamma A^i_j t^j_{ik}$ через векторы p_n и q_n:

$${}_\gamma A^k_m\,{}_\gamma A^i_j t^j_{ik} =_\alpha A^l_m p_l - q_m.$$

После подстановки полученного выражения в равенство (5) получаем

$$t^m_{ns} = (-_\alpha A^l_n p_l + q_n)\delta^m_s + p_{s\,\alpha}A^m_n + q_s\delta^m_n =$$

$$= ({}_\alpha A^m_n\delta^l_s -_\alpha A^l_n\delta^m_s)p_l + q_s\delta^m_n + q_n\delta^m_s = p^m\,{}_\alpha A_{ms} + 2q_{(m}\delta^n_{s)}$$

Таким образом, тензор деформации преобразования геодезической группы сети имеет следующее строение

$$t^i_{sk} = p^i\,{}_\alpha A_{sk} + 2q_{(s}\delta^i_{k)} \ldots \tag{6}$$

где p_i и q_i - произвольные векторы пространства. Естественно, что геодезическая группа сети включает группу проективных преобразований связностей (преобразований, сохраняющих геодезические векторы всех сетей поверхности: $P(X_2)$).

Из (3) и (6) легко усматривается связь между чебышевскими и геодезическими группами сетей тройки, а именно: пересечение чебышевских групп двух сетей тройки изоморфно фактор-группе геодезической группы третьей сети по подгруппе проективных преобразований:

$$G\Lambda(a) \cap G\Lambda(a) \simeq G\Gamma(a)/P(X_2).$$

Рассмотрим подгруппу группы $G\Gamma(a)$, которую образуют преобразования типа $(-\tilde{q}, q)$, где $\tilde{q}-$ вектор, дополнительный к q, в метрике тензора $A_{ij} =$

$\varepsilon_{mj}A^m_i$. Тензор деформации такого преобразования, согласно (4), имеет следующее строение:

$$t^i_{sk} = -\tilde{q}^i A_{sk} + 2q_{(s\delta^i_k)} = -A^{im}A_{sk}q_m + 2q_{(s\delta^i_k)}$$

и следовательно, мы имеем дело с группой конформных преобразований связностей Вейля с основным тензором A_{ij} (см.[2], § 44), которую условимся обозначать $C(A_{ij})$.

Включим сеть "a" в некоторую тройку сетей: "$_\alpha a$", "$_\beta a$", "$_\gamma a$". Для аффиноров тройки имеет миесто формула (см. [1], § 8)

$${}_\alpha A^s_i\, {}_\alpha A^j_k +_\beta A^s_i\, {}_\beta A^j_k +_\gamma A^s_i\, {}_\gamma A^j_k + \delta^i_s\delta^j_k = \emptyset.$$

Из этой формулы с помощью соотношения

$${}_\alpha A^{ij}\, {}_\alpha A_{mn} -_\alpha A^i_n\, {}_\alpha A^j_m = \delta^i_m\delta^j_n$$

(см. там же) получаем:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} {}_\alpha A^{ij}\, {}_\alpha A_{sk} = 2\,\delta^i_{(s}\delta^j_{k)}$$

Используя это соотношение, преобразуем тензор деформации t^i_{sk} рассматриваемых преобразований к виду:

$$t^i_{sk} = ({}_\beta A^{im}\, {}_\beta A_{sk} +_\gamma A^{im}\, {}_\gamma A_{sk})q_m,$$

откуда цледует, что рассматриваемые преобразования принадлежат чебышевской группе $G\Lambda(a)$ $(x^i =_\beta A^{im}q_m,\ \ y^i =_\gamma A^{im}q_m)$. Следовательно, имеем

$$C(A_{ij}) \subseteq G\Gamma(a) \cap G\Lambda(a)$$

Обратное включение очевидно. Таким образом, имеет место следующее утверждение: пересечение геодезической и чебышевской групп сети "a" есть группа преобразований связностей поверхности, автоморфных относительно множества связностей Вейля с изотропной сетью "a" :

$$G\Gamma(a) \cap G\Lambda(a) = C(A_{ij}).$$

Заметим, что преобразования группы $G\Gamma(a)$, приводящие к связности, в которой сеть "a" чебышевская, определяется векторами p и q, связанными условием

$$p_i = A_i^s(a_s - q_s).$$

Отсюда, в частности, следует, что единственное такое преобразование типа $(p, 0)$ группы $G\Lambda(\alpha_a)$ имеет тензор деформации

$$t_{sk}^i =_\alpha A^{im}\,{}_\alpha A_{sk}\,{}_\alpha a_m.$$

Так как это перобразование принадлежит группе $G\Lambda(a) \cap G\Lambda(a)$ (см. (5)), то оно не изменяет чебышевских векторов сетей "${}_\beta a$" и "${}_\gamma a$". Отсюда следует, что в результате композиции преобразований

$$T_{sk}^i = \sum_{\alpha=1}^{3} {}_\alpha A^{im}\,{}_\alpha A_{sk}\,{}_\alpha a_m$$

мы получаем связность, известную под названием связности, присоединенной к тройке сетей (см. [1], §§42, 78). Подобно тому, как в геодезической группе есть преобразования, делающие сеть чебышевской, в чебышевской группе $G\Lambda(a)$ есть преобразования, делающие сеть "a" геодезической. Векторы x и y таких преобразований связаны условием

$$y_i =_\alpha A_i^s\, x_s -_\gamma A_i^s\,{}_\alpha \alpha_s.$$

Если X_2 есть поверхность трехмерного аффинного пространства, то с сетью можно ассоциировать две связности: связность Грина и связность Чебышева, индуцированные двумя оснащениями с теми же названиями ([3]). Имеют место двойственные теоремы: всякая сеть является геодезической (чебышевской) в своей связности Грина (связности Чебышева) ([3]). Учитывая этот факт, а также (3) и (6), можно указать множества связностей поверхности, в которых данная сеть является геодезической (чебышевской)

$$\mathcal{X} = \{\Gamma_{jk}^i = \Upsilon_{jk}^i + p^i\,{}_\alpha A_{jk} + q_{(j}\delta_{k)}^i/p_i, \quad q_i \in X_2\}$$

и

$$\mathcal{Y} = \{\Gamma_{ij}^i = \Lambda_{jk}^i + x^i\,{}_\beta A_{jk} + y^i\,{}_\gamma A_{jk}/x_i, \quad y_i \in X_2\}$$

Здесь Υ_{jk}^i-связность Грина, а Γ_{jk}^i- связность Чебышева сети "a".

Литература

[1] Шуликовский В.И. Классическая дифференциальная геометрия, Физматгиз, М., 1963

[2] Норден А.П. Пространства аффинной связности, Гостехизат, М.-Л.,1950

[3] Камаев В.А. К теeории сетей двумерной поверхности. Ученые записки Свердловского педагогического института, 184, вып. 5, 1972

Черкасский пединститут
Черкассы 257000
ул. К. Маркса 24

Received before 23.12.1988