Problemy Matematyczne
11 (1989), 115 - 122

К асимптотическому интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений с малым параметром

В.К. Григоренко

1. Известно [1,5,6], что построение решений систем линейных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x, \tag{1}$$

где h – целое или дробное число больше нуля, x – n-мерный вектор, а $A(t,\varepsilon)$– квадратная $(n \times n)$ матрица, допускающая разложение в сходыащийся или асимптотический ряд

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t), \tag{2}$$

ε– малый параметр, матрицы-функции $A_s(t)$– голоморфны ио x в некоторой области, связывают с наличием и поведением корней характеристического уравнения:

$$det[A_0(t) - \lambda(t)E] = 0 \tag{3}$$

При этом построение решений значительно усложняется, если среди характеристического уравнения появляются кратные или, если имеются в наличии, так называемые "точки поворота". Эти проблемы полностью еще не решены.

При h целом не решена проблема "точек поворота" для системы уравнений (1) [1]. Для систем (1) с "точками поворота" в основном применяются методы "склеивания" и "эталонных" уравнений. При применении метода "склеивания " решений в задачах с "точками поворота строятся так называемые "внутреннее" и "внешнее" решения, области их применения, а затем строится матрица связи между ними, что представляет собой известные трудности [2]. Кроме того, этот метод не дает аналитической наглядности решения во всей области. Метод "эталонных " уравнений [3,4] состоит в том, что решение данного уравнения выражается через известные решения так называемого "эталонного " уравнения. Этот метод сопряжен с трудностями выбора "эталонного" уравнения, которое должно сохранять все особенности исходного уравнения с точки зрения асимптотических представлений решений. Заметим, что области применения этих методов ограничены.

При $h = \frac{p}{q}$ значительные трудности, наряду с задачами с "точками поворота", представляет также решение системы (1) в случае, если среди корней характеристического уравнения (3) появляются кратные [6].
Мы даем метод построения решений систем линейных дифференциальных уравнений (1), не зависящий от наличия корней характеристического уравнения. Метод состоит в асимптотическом приведении системы (1) к некоторой системе, для которой строится решение. Заметим, что при этом нет необходимости решать уравнение (3), что представляет само по себе известные трудности, т.е. для таких систем удается обойти проблему собственных значений и собственных векторов.

2. Введем в рассмотрение матрицы $B(t,\varepsilon)$ и $C(t,\varepsilon)$:

$$(4) \qquad B(t,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21}(t,\varepsilon) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,\varepsilon) & a_{n2}(t,\varepsilon) & \dots & a_{n\,n-1}(t,\varepsilon) & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon) - B(t,\varepsilon)$$

$$E_n(t) = diag[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)],$$

где $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$– некоторые функции специальным образом подобранные.

ТЕОРЕМА 1. Существует неособенное линейное преобразование

$$x = P(t,\varepsilon)y, \tag{5}$$

сводящее систему (1) к системе:

$$\varepsilon^h \frac{dy}{dt} = D(t,\varepsilon)y, \tag{6}$$

где

$$D(t,\varepsilon) = p^{-1}(t,\varepsilon)(A(t,\varepsilon)P(t,\varepsilon) - \varepsilon^h P'(t,\varepsilon)). \tag{7}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 матрицу $P(t,\varepsilon)$ определим из системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром:

$$\varepsilon^h \frac{dP(t,\varepsilon)}{dt} = (C(t,\varepsilon) - E_n(t))P(t,\varepsilon), \tag{8}$$

где $C(t,\varepsilon)$ имеет вид (4) и допускает разложение в сходящийся или асимптотический ряд:

$$C(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_s(t), \tag{9}$$

а

$$E_n(t) = diag[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)], \tag{10}$$

где функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$ нодобраны так, чтобы

[1)] $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t),\ i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n;\ \forall t \in [0,L]$;

[2)] $a_{ii}^{(0)}(t) - \lambda_i(t) \neq a_{jj}^{(0)}(t) - \lambda_j(t)$ для всех $i,j\ ; i \neq j,\ i,j = 1,\ldots,n;\ \forall t \in [0,L];\ a_{ii}^{(0)}(t)$ - - элементы матрицы $A_0(t)$.

Заметим, что характеристическое уравнение, соответствующее системе (8)

$$det[C_0(t) - E_n(t) - \lambda(t)E] = 0, \tag{11}$$

согласно условий (2) имеет различные корни. При этом система (1) сводится к системе (6), у которой $D(t,\varepsilon)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}(12) D(t,\varepsilon) &= P^{-1}(t,\varepsilon)(A(t,\varepsilon)P(t,\varepsilon) - (C(t,\varepsilon) - E_n(t))P(t,\varepsilon)) = \\ &= P^{-1}(t,\varepsilon)(A(t,\varepsilon) - (C(t,\varepsilon) - E_n(t)))P(t,\varepsilon)) = \\ &= P^{-1}(t,\varepsilon)(B(t,\varepsilon) + E_n(t))P(t,\varepsilon))\end{aligned}$$

Здесь

$$(13)\ B(t,\varepsilon) + E_n(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(t,\varepsilon) & \lambda_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ a_{31}(t,\varepsilon) & a_{32}(t,\varepsilon) & \lambda_3(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t,\varepsilon) & a_{n2}(t,\varepsilon) & a_{n3}(t,\varepsilon) & \dots & \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение (3) для системы уравнений (6) принимает вид:

$$det[D_0(t) - \lambda(t)E] = det[P_0^{-1}(t)(B_0 + E_n)P_0(t) - \lambda(t)E] =$$
$$= det[(B_0(t) + E_n(t)) - \lambda(t)E] = 0$$

и его корни есть функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t) \dots, \lambda_n(t)$, которые согласно (1) различные. Пусть $h = \frac{p}{q}$, где $(p,q) = 1,\ p,q \in N$. С помощью подстановки $\varepsilon^{\frac{1}{q}} = \mu$ сведем систему (6) к виду:

$$(14) \qquad \mu^p \frac{dx}{dt} = D(t,\mu^q)x,$$

где матрица $D(t,\mu^q)$ представляется рядом:

$$(15) \qquad D(t,\mu^q) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^{q\,s} D^{(s)}(t).$$

Формальную матрицу-решение системы (14) ищем в виде:

$$(16) \qquad \phi(t,\mu) = U(t,\mu)\exp(\int_0^t \mu^{-p}\Lambda(t,\mu)dt,$$

где $U(t,\mu)$ и $\Lambda(t,\mu)$ - квадратные матрицы порядка n, причем $\Lambda(t,\mu)$ -диагональная, которые имеют разложение в формальные ряды:

$$(17) \qquad U(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(t), \quad \Lambda(t,\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \Lambda^s(t)$$

где $\mu = \sqrt[q]{\varepsilon}$.

Предполагая, что (16)-(17) - решения системы (14), имеем:

$$(18) \qquad D(t,\mu^q)U(t,\mu) - U(t,\mu)\Lambda(t,\mu) = \mu^p U'(t,\mu)$$

($'$ - дифференцирование по t).

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в соотношении (18), получаем систему матричных уравнений:

$$(19) \qquad D_0(t)U^{(0)}(t) - U^{(0)}(t)\Lambda^{(0)}(t) = 0,$$

$$(20) \qquad D^{(0)}(t)U^{(s)}(t) - U^{(s)}(t)\Lambda^{(0)}(t) = \Lambda^{(s)}(t) - H^{(s)}(t),$$

$s = 1, 2, 3, \ldots$

где

$$(21) \quad \begin{aligned} H^{(s)}(t) \; &= \; -[\sum_{k=1}^{s-1} U^{(k)}(t)\Lambda^{(s-k)}(t) - \sum_{l=1}^{\left[\frac{s}{q}\right]} U^{(l)}(t)U^{(s-lq)}(t) + \\ &+ \; U'^{(s-p)}(t)], \end{aligned}$$

($\left[\frac{s}{q}\right]$ - целая часть числа $\frac{s}{q}$.) Покажем, что матричные уравнения (19)-(20) - разрешимы. Без умаления общности предполагаем, что матрица $D(t)$ - диагональная. Тогда уравнению (19) можно удовлетворить, положив

$$(22) \qquad \Lambda^{(0)}(t) = D^{(0)}(t), \quad U^{(0)}(t) = E$$

Представим матрицы $\dot{U}^{(s)}(t), H^{(s)}(t)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ в виде:

$$(23) \quad U^{(s)}(t) = H_{(0)}^{(s)}(t) + U_1^{(s)}(t), \quad H^{(s)}(t) = H_0^{(s)}(t) + H_1^{(s)}(t),$$

где $U_0^{(s)}(t)$, $H_0^{(s)}(t)$ - диагональные матрицы, а $U_1^{(s)}(t)$, $H_1^{(s)}(t)$ - матрицы, составленные из недиагональных элементов вышеуказанных матриц. Тогда (20) можно записать следующим образом

$$(24) \qquad D^{(0)}(t)U_0^{(s)}(t) - U_0^{(s)}(t)D^{(0)}(t) = \Lambda^{(s)}(t) - H_0^{(s)}(t),$$

$$(25) \qquad D^{(0)}(t)U_1^{(s)}(t) - U_1^{(s)}(t)D_0(t) = -H_1^{(s)}(t), \quad s \geq 1.$$

Из (24) следует, что

$$\Lambda^{(s)}(t) = H_0^{(s)}(t). \tag{26}$$

Матрица $U_0^{(s)}(t)$ при этом остается произвольной. Будем считать, что $U_0^{(s)}(t) = 0$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$.

Ввиду того, что матрица $H_1^{(s)}(t)$ при фиксированном с известна, то исходя из (25) определяем недиагональные элементы матрицы $U_1^{(s)}(t)$:

$$\{U_1^{(s)}(t)\} = -\frac{\{h_1^{(s)}(t)\}_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}, \tag{27}$$

$i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n, \quad s = 1, 2, 3, \ldots$

Этим полностью опредедяются матрицы $\Lambda(t)^{(s)}$ и $U^{(s)}(t), \ s = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, с помощью вышеуказанного алгоритма может быть построена матрица решений $\varphi(t, \mu)$ системы дифференциальных уравнений (14).

Этим доказана теорема 2.

ТЕОРЕМА 2. Система линейных дифференциальных уравнений с малым параметром (1) при $h = \frac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, $p, q \in N$, имеет формальную матрицу-решение:

$$X(t, \varepsilon) = P(t, \varepsilon) U(t, \mu) \exp\left(\int_0^t \mu^{-p} \Lambda(t, \mu) dt\right), \tag{28}$$

где $\mu = \sqrt[q]{\varepsilon}$, а $n \times n$ - матрица $P(t, \varepsilon)$ определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\varepsilon^h \frac{dP(t, \varepsilon)}{dt} = (C(t, \varepsilon) - E_n(t)) P(t, \varepsilon), \tag{29}$$

где $C(t, \varepsilon)$ имеет вид (4) и допускает разложение в ряд (9), а $U(t, \mu)$ и $\Lambda(t, \mu)$ - квадратные матрицы порядка n, причем $\Lambda(t, \mu)$ - диагональная матрица, которые допускают разложение в ряды:

$$U(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(t), \quad \Lambda(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \Lambda_s(t) \tag{30}$$

Примечание. Решение системы (29) ищем в виде (16). Значит, преобразование $P(t, \varepsilon)$, существование которого доказывалось в теореме 1, построено.

Указанный алгоритм эффективно применяется при решении задач с "точками поворота", которые возникают в задачах дифракции и распространения волн [4], а также при решении дифференциального уравнения гидродинамического типа [7].

Рассмотрим пример.

Пусть имеется уравнение

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \varepsilon^{1-\frac{p}{q}} P(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{d\tau} + \varepsilon^{-\frac{2p}{q}} g(\tau,\varepsilon)y = 0, \tag{31}$$

$p, q \in N$; $(p,q) = 1$.

Функции $p(\tau,\varepsilon)$ и $q(\tau,\varepsilon)$ имеют разложения:

$$P(t,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s P_s(\tau), \quad g(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s g_s(\tau). \tag{32}$$

Рассмотрим случай, когда $\exists\tau(g_0(\tau) = 0)$, $\tau \in [0, L]$ Используя замену

$$x_1 = y; \ \ x_2 = \varepsilon^{-\frac{p}{q}} \frac{dy}{dx}, \tag{33}$$

получаем систему:

$$\varepsilon^{\frac{p}{q}} \frac{dx}{d\tau} = A(\tau,\varepsilon)x, \tag{34}$$

в которой

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g(\tau,\varepsilon) & -\varepsilon p(\tau,\varepsilon) \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$det[A_0\tau - \lambda(\tau)E] = \lambda^2(\tau) + g_0(\tau) = 0.$$

Точки, в которых $g_0(\tau)$ превращается щ 0, являются "точками поворота". До системы (34) можно применить теоремы 1 и 2.

Литература

[1] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, М.,Мир, 1968, 464 с.

[2] Wasow W. Turning point problems for systems of linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., vol. 14, #3, 1961, p.657-673; vol. 15, #2, p.173-187

[3] Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений, УМН, т.7,#6, 1952

[4] Аленицын А.Г. Асимптотика решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром при наличии "точек поворота", "Проблемы дифр. и распр. волн", Изд-во ЛГУ, вып.7, 1968, с.3-18

[5] Фещенко С.Ф. Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, К., Наукова думка, 1966, 251 с.

[6] Григоренко В.К. К вопросу интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих дробный параметр, УМЖ, т.30, #2, 1978, ц.217-222

[7] Nishimoto T. A remark on a turning point problem, Kodai Math. Sem. Repts. 21, 1969, 58-63

Черкасский пединститут
Черкассы 257000
ул. К. Маркса 24

Received before 23.12.1988