Problemy Matematyczne
11 (1989), 93–99

Неабелевы групы с дополняемыми сервантными подгруппами

Л.М. Кляцкая

Теория абелевых групп, как и теория конечных групп, всегда служила источником новых важных идей для общей теории групп. Перенесение результатов теории абелевых групп на те или иные классы не комутативных групп приводит иногда к появлению фундаментальных теорем и понятий. Классическим примером этого служит теория полных гиперцентральных и локально-нильпотентных групп, созданная в работах С.Н. Черникова и А.И. Мальцева. Из последних достижений на этом пути можно выделить, например, полученные Ю.М. Горчаковым аналоги теорем Прюфера-Куликова для локально-нормалных групп.
В 50-х годах С.Н. Черниковым были изучены абелевы группы, в которых дополняемы все сервантные подгруппы.Использование основных в теории абелевых групп поятий сервантной подгруппы и прямого разложения приьело в этом случае к конструктивному описанию указаных групп, причем, основными елементами конструкции явились полные группы, примарные ограниченные группы и группы конечного ранга без кручения. Интересно, в частности, что выделенный класс групп оказался с характерными условиями конечности. С.Н. Черниковым был указан также пусть перенесения этих резултатов па неабелевы группы, состоящий в том, что условие дополняемости налагается на сервантные подгруппы всех максимальных абелевых подгрупп. Такие группы получили название CP-групп. Описание их представляет довольно сложную задачу даже в случае двуступенно разрешимых групп в общем случае пока не решенную.

В настоящей работе изучается строение перидических CP-групп при условии наличия у них нормальной максимальной абелевой подгруппы. В дальнейшем мы будем пользоваться следующими утверждениями:

ЛЕММА 1. (см.[2, лемма 2]) Пусть $G = A\lambda B, \quad A \cap B = 1$ где A и B-абелевы группы. Если A_1- подгруппа из A, $C_1 = C_B(A_1)$, $C_2 = C_A(C_1)$, то $C_1 \times C_2$ - максимальная абелева подгруппа группы G.

ЛЕММА 2. (см.[1, теорема 6]). Если G-абелева p-примарная CP-группа и $G = \prod_\alpha G_\alpha$-некоторое ее прямое разложение в прямое произведение групп ранга 1, то одним из дополнений сервантной подгрупы в G является произведение некоторого ммножества подгрупп G_α.

ЛЕММА 3. Пусть G - перйдическая CP-группа, содержащая максимальную нормальную абелеву подгруппу A. Тогда $G = A\lambda B$, где A и B-абелевы группы, $A = \prod_i A_i$, любая A_i-квазициклическая или циклическая примарная группа, $A_i \lhd G$. Централизатор любой подгруппы A_i в B совпадает с централизатором ее нижнего слоя.

Доказательство. По теореме 7 [1]

$$G = A\lambda B, \qquad A = \prod_i A_i, \qquad A_i \lhd G$$

A_i-примарная циклическая или квазициклическая группа, B-абелева группа. Пусть (a)-подгруппа простого порядка из A_i, $D = C_B(a)$, $C = C_A(D)$. Так как $C \lhd G$, то $C_i = C \cap A_i$ инвариантно в G и, значит, $C \times D = \prod_i C_i \times D$. Подгруппа C_i как сервантная подгруппа максимальной абелевой подгрупны $C \times D$ дополняема в G, а значит и в содержащей ее подгруппе A_i. А это возможно только в случае $C_i = A_i$. Следовательно $A_i \leq C = C_A(D)$, и поэтому $D = C_B(a) \leq C_B(A_i)$. Отсюда вытекает, что $D = C_B(a) = C_B(A_i)$.

Примечание. Можно показать, что подгруппа B из леммы 3 не имеет полных подгрупп.

Следствие. Если A_p и B_p-силовские p- подгруппы групп A и B соответственно, то $A_p \times B_p$ - абелева силовская подгруппа группы.

Доказательство. По лемме 3 A_p является прямым произведением некоторого множества циклических или квазициклических p-подгрупп, нормальных в G. Подгруппа B_p централизует подгруппу простого порядка p каждого множителя, а значит, централизует и весь множитель A_p. Следовательно, $A_p \times B_p$ - абелева подгруппа. Максимальность ее как p- группы очевидна.

ТЕОРЕМА 1. Периодическая группа, содержащая нормальную максимальную абелеву подгруппу, тогда и только тогда является CP-группой, когда она разложима в полупрямое произведение

$$G = A\lambda B$$

двух абелевых CP-групп A и B, причем,

1) Подгруппа A является прямым произведением нормальных в G примарных циклических или квазициклических подгрупп A_i $(i \in I)$ и централизатор каждого множества A_i в группе G совпадает с централизатором его подгруппы простого порядка;

2) Для любого набора W подгрупп A_i централизатор произведения этих подгрупп в множестве B сервантен в B.

Необходимость. Из лемм 1,3 следует, что G имеет требуемое разложение (1), удовлетворяющее условию 1), $C_A(B) \times B$-максимальная абелева подгруппа группы G. Так как сервантная подгруппа из B, будучи сервантной в $C_A(B) \times B$ дополняема в G, а значит, и в B, то B-CP-группа. Если C_1-централизатор в подгруппе B некоторого набора подгрупп A_i и $C_A(C_1) = C_2$, то по лемме 1 $C_2 \times C_1$-максимальная абелева подгруппа группы G. Подгруппа C_1-сервантна в $C_2 \times C_1$ и потому дополняема в CP-группе G, а значит, и в содержащей ее подгруппе B. Следовательно, C_1 сервантна в B.

Достаточность. Пусть G-группа, имеющая строение, указанное в условии теоремы, M-ее максимальная абелева подгруппа. Введем обозначения: $M_A = A \cap M$, M^B-проекция подгруппы M в B $(M^B = AM \cap B)$. Так как M- максимальная абелева подгруппа, то $C_A(M) \leq M$ и значит $C_A(M) = M \cap A$. Поскольку все A_i нормальны в G и $C_A(M)$-нормальная подгруппа группы G, то $C_A(M)$-разлагается в прямое произведение:

$$C_A(M) = \prod_i (A_i \cap C_A(M)).$$

Если при этом для какого-нибуть i пересечение $A_i \cap C_A(M)$ не равно 1, то по условию 1) теоремы $A_i \leq C_A(M)$. Этим докозано что $C_A(M) = A \cap M = M_A$ является прямым произведением некоторого множества подгрупп A и, значит,

$$A = M_A \times A_0 \qquad (1)$$

где A также является произведением некоторого множества подгрупп A_i.
I. Докажем, что подгруппа M сервантна в B. С этой целью покажем, что для любого p-элемента b из M найдется содержащая этот элемент подгруппа C группы M^B, сервантная в B, то есть, высоты элемента b в подгруппе M^B и в группе B одинаковы. Так как $b \in M^B$, то в подгруппе M найдется элемент g, имеющий b своей компонентой в B, то есть записывающийся в виде

$$g = a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n} b \ \ (a_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}, \ a_{\alpha_i} \neq 1).$$

Пусть $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_s}$-$p$-элементы, $a_{\alpha_{s+1}}, \dots, a_{\alpha_n}$-не p-элементы. Не ограничивая общности, можно считать элемент g p-элементом. Ввиду следствия из леммы 3 силовская подгруппа $K_p = A_{\alpha_1} \times \dots \times A_{\alpha_s} \times (b)$ группы $K = (A_{\alpha_1} \times \dots \times A_{\alpha_s} \times A_{\alpha_{s+1}} \dots A_{\alpha_n})\lambda(b)$ абелева. Так как группа K либо конечная, либо черниковская, то все силовские p- подгруппы в ней сопрыажены, и поэтому в группе K найдется такой элемент x что $x^{-1}gx \in K$, то есть его можно записать в виде:
$x^{-1}gx = a'_{\alpha_1} \dots a'_{\alpha_s} b, \ \ a'_{alpha_i} \in A_{\alpha_i}$.
Нетрудно видеть, что компонента подгруппы $x^{-1}Mx$ в B совпадей с M^B : $(x^{-1}Mx)^B = M^B$.

Обозначим через A' подгруппу группы A, порожденную всеми теми множителями A_α, в каждом из которых хотя бы один элемент из $x^{-1}Mx$ имеет неединичную компоненту, а через A'' подгруппу группы A, порозхенную всеми остальными A_α. Централизатор $C_B(A')$ подгруппы A' в B по условию 2) теоремы сервантен в B. Докажем, что элемент b содерзхится в $C_B(A')$, а $C_B(A')$-подгруппа M^B. Этим быдет завершено доказательство пункта *I*. Так как в случае, когда $A_\beta \leq A'$ является p-группой этот факт установлен в следствии из леммы 3, то осталось рассмотреть случаи, когда A_β-q-группа $(q \neq p)$.

Из того, что A_β из A' следует, что в подгруппе $x^{-1}Mx$ найдется элемент g имеющий в A_β неединичную компоненту

$$a_\beta : \ g = \dots a_\beta \dots b_1, \ \ b_1 \in B, \ \ a_\beta \in A_\beta, \ \ a_\beta \neq 1.$$

Учитывая инвариантность всех подгрупп A_β в группе G, а также тот факт, что среди подгрупп $A_{\beta_1}, \dots, A_{\beta_s}$ нет подгруппы A_β получаем:

$$(x^{-1}gx)g_1 = (a'_{\alpha_1} \dots a'_{\alpha_s} b)(\dots a_\beta \dots b_1) = (\dots (b a_\beta b^{-1}) \dots) b b_1,$$

то есть $ba_\beta b^{-1}$-компонента элемента $(x^{-1}gx)g_1$ в A_β.
С другой стороны

$$g_1(x^{-1}gx) = (\dots a_\beta \dots b_1)(a'_{\alpha_1} \dots a'_{\alpha_s} b) = (\dots a_\beta \dots)bb_1,$$

то есть a_β-компонента элемента $g_1(x^{-1}gx)$ в A_β.

Так как элементы g_1 и $x^{-1}gx$ из одной абелевой группы $x^{-1}Mx$, то $(x^{-1}gx)g_1 = g_1(x^{-1}gx)$ и поэтому $ba_\beta b^{-1} = a_\beta$, откуда следует, что элемент b перестановочем с элементом a_β, а значит и с каждым элементом из A_β, то есть $b \in C_B(A')$.

II. Из сервантности подгруппы M^B в CP- группе B следует ее дополняемость в B:

$$(2) \qquad B = M^B \times B_0$$

Из (2) имеем:

$$G = A\lambda B = (M_A \times A_0)\lambda B = M_A\lambda(A_0 B)$$

То есть подгруппа M_A дополняема в группе G, а значит и в содержащей ее подгруппе M:

$$(3) \qquad M = M_A \times \hat{M},$$

$$(4) \qquad \text{где} \quad \hat{M} = M \cap A_0 B$$

Рассмотрим подгруппу $N = M_A \times M^B$. Так как по условию A и B-абелевы CP - группы, то учитывая (2) и (3), получаем, что N также абелева CP - группа. Принимая во внимание инвариантность подгрупп A, A_0 и M_A в группе G, а также разложения подгрупп N и M получаем:

$$(5) A_0 N = A_0(M_A \times M^B) = AM^B = AM = (A_0 \times M_A)M = A_0 M$$

откуда вытекает изоморфизм подгрупп M и N.

Пусть S-произвольная сервантная подгруппа из M, T-ее образ при естественном изоморфизме M на N, то есть $T = A_0 S \cap N$. Тогда, учитывая (6), получаем:

$$A_0 T = A_0(A_0 S \cap N) = A_0 S \cap A_0 N = A_0 S \cap A_0 M = A_0 S,$$

то есть

$$A_0T = A_0S. \tag{6}$$

Так как S сервантна в M, то T сервантна в N и потому дополняема в абелевой CP - группе N :

$$N = T \times \bar{A} \times \bar{B}, \tag{7}$$

причем, ввиду леммы 2 можно считать, что

$$\bar{A} \leq M_A, \quad \bar{B} \leq M^B, \quad \bar{A} \lhd G.$$

Наконец, из соотношений (1), (3), (6), (8), (7), учитывая инвариантность подгрупп A, A_0, $\bar{A}$ в группе G, получаем:

$$G = A\lambda B = A\lambda(M^B \times B_0) = (AM^B)B_0 = (AM)B_0 = (A_0M)B_0 =$$

$$(A_0N)B = (A_0(T \times \bar{A} \times \bar{B}))B_0 = ((A_0T)(\bar{A}\bar{B}))B_0 =$$

$$((A_0S)(\bar{A}\bar{B}))B_0 = (S(A_0\bar{A}\bar{B}))B_0 = S(A_0\bar{A}\bar{B}B_0).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что пересечение $S \cap A_0\bar{A}\bar{B}B_0$ тривиально. Теорема доказанна.

Литература

[1] Черников С.Н. Группы с системами дополняемых подгрупп, Мат. сб., 1954, 35(77), Ђ, с. 93-128.

[2] Зайцев Д.И., Кляцкая Л.М. Группы с некоторой системой дополныаемых абелевых подгрупп. В кн.:Группы с системами дополняемых подгрупп, К., 1972, с. 180-222.

[3] Кляцкая Л.М. Неабелевы группы с дополняемыми сервантными под-

группами. В кн.: ВИ Всесоюзный симпозиум по теории групп (Черкассы, сентябрь 1978 г.), Тез. Докл., Киев, Наук. думка, 1978, с. 30.

Черкасский пединститут
Черкассы 257000
ул. К. Маркса 24

Received before 23.12.1988