Problemy Matematyczne
11 (1989), 109–113

О приближении в среднем дифференцируемых функций полиномами Рогозинского

А.Г. Демченко

Пусть $w_0^r H[\omega]_L$– класс 2π – периодических суммируемых функкций $f(x)$, имеющих равное нулю среднее значение на периоде и заданную мажоранту $\omega(t)$ интегрального модуля непрерывности r–ой производной; $\omega_L(f^{(r)};t) \le \omega(t)$, $0 \le t \le \pi$.

В этой заметке на указанных классах в случае нечетных $r = 3, 5, 7, \ldots$ установлено асимптотическое равенство для точной верхней грани приближений в метрике L при помощи полиномов Рогозинского

$$R_n(f;x) = \frac{1}{2}[S_n(f;x - \frac{\pi}{2n}) + S_n(f;x + \frac{\pi}{2n})],$$

($S_n(f;x)$– суммы Фурье функции f в точке x).

Предварительно доказана одна лемма, которая затем применяется.

Лемма. Пусть m–натуральное число,

$$c_i = (2i+1)\frac{\pi}{2m}, \qquad t_i = \frac{\pi_i}{m}, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

и $F(t)$– 2π –перйдическая функция, которая суммируема на перйде удовлетворяет условиям:

1) $F(c_i - t) = -F(c_i + t), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2m}$

2) $F(t)$ не меняет знак на интервалах $]c_i, c_{i-1}[$.

Тогда для любого выпуклого вверх на $[0, \frac{\pi}{m}]$ модуля непрерывности $\omega(t)$ имеет место равенство

$$(*)\ \sup_{\varphi\in H_0[\omega]_L} \| \int_0^{2\pi} \varphi(x+t)F(t)dt \|_L = \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \omega(2t) \sum_{i=0}^{2m-1} \|F(c_i-t)\| dt.$$

Доказательство. Пусть $\int_0^{2\pi} \varphi(x+t)F(t)dt = f(x)$. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(x+t)F(t)dt.$$

Представив стоящий под знаком суммы интеграл в виде суммы двух интегралов и выполнив соответствующую замену переменных с учетом свойства 1) функции $F(t)$ получим:

$$(1)\ f(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} [\varphi(x+c_i-u) - \varphi(x+c_i+u)]F(c_i-u)du.$$

Оценим сверху норму функции $f(x)$.

$$(2)\qquad \| f(x) \|_L \le \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \| \varphi(x+c_i-u) - \varphi(x+c_i+u) \|_L$$

$$\sum_{i=0}^{2m-1} |F(c_i-u)|du \le \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \omega(2u) \sum_{i=0}^{2m-1} |F(c_i-u)|du.$$

Пусть $\omega(t)$–выпуклый вверх на $[0, \frac{\pi}{m}]$ модуль непрерывности.
Построим 2π–перйдическыю функцию $\varphi_\omega(t)$, которая на промежытке $[0, \frac{\pi}{m}]$ определяется равенством

$$\varphi_\omega(t) = \frac{1}{4m}\omega'(2t)$$

и имеет симметричный относительно точек c_i и прямых $t = t_i$ график. Известно ([1]), что $\varphi_\omega(t) \in H_0[\omega]_L$. Кроме этого, построенная функция имеет, в частности, следующие очевидные свойства:

a) $\varphi_\omega(c_i-\alpha) = -\varphi_\omega(c_i+\alpha) = (-1)^i\varphi_\omega(\frac{\pi}{2m}-\alpha)$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} [\varphi_\omega(v-u) - \varphi_\omega(v+u)]dv = 2\int_0^u \varphi_\omega(\alpha)d\alpha = \frac{1}{4m}\omega(2u)$.

Оценим снизу норму функции $f_\omega(x)$.

$$\| f_\omega(x) \|_L = \int_0^{2\pi} |f_\omega(x)|dx = \sum_{k=0}^{2m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f_\omega(x)|dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{2m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \{|f_\omega(c_k - v)| + |f_\omega(c_k + v)|\}dv.$$

Поскольку

$$f_\omega(c_k - v) = -f_\omega(c_k + v) = (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2m}} F(c_i - u)[\varphi_\omega(v-u) - \varphi_\omega(v+u)]du,$$

то относительно получаем:

$$(3)\quad \| f_\omega(x) \|_L \geq \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{2m-1} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \omega(2u) \sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i F(c_i - u)du \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \omega(2u) \sum_{i=0}^{2m-1} |F(c_i - u)|du.$$

Неравенства (2) и (3) доказывают лемму.

Замечание 1. Если $F(t)$ имеет указанные в лемме свойства относительно точек $\overline{c_i} = c_i - a$, то в правой части равенства $(*)$ следует вместо c_i писать $\overline{c_i}$.

Замечание 2. Если $F(t)$ является, кроме всего, продолжением некоторой функции $\phi(t)$ ц промежутка $[0, \frac{\pi}{m}]$ на весь перйд путем равномерной деформации вдоль оси ординат, т.е.,если

$$F(c_i - u) = (-1)^i A_i \phi(c_0 - u), \qquad A_i > 0;\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2m},\quad \phi(u) \geq 0,$$

то правая часть $(*)$ имеет вид:

$$\sum_{i=0}^{2m-1} A_i \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \omega(2t)\phi(c_0 - t)dt = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{2m-1} A_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(\frac{2u}{m})\phi(\frac{mc_0 - u}{m})du.$$

К этому случаю мы приходим, например, когда раццматриваем приближение суммами Фурье или близкими к ним Валле-Пуссена (см. [2-4]).

Рассмотрим теперь приближение полиномами Рогозинцкого классов $w_o^r H[\omega]_L$ в случае нечетных $r = 3, 5, 7, \ldots$

В этом случае (см. [4])

$$f(x) - R_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^{(r)}(x+t)F(t)dt + \gamma \tag{4}$$

где

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\cos\frac{\pi k}{2n}}{k^r}\sin kt \tag{5}$$

Норма последнего слагаемого правой части равенства (4) имеет порядок $O(\omega(\frac{1}{n})\frac{\ln n}{n^r})$ ([2]), а функция $F(t)$ имеет своими нулями только точки $\tau_k = \pi k, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ (см [4]) и симметрична относительно них. Применяя утверждение замечания при $\tau_k = \pi k, \quad k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, m = 1$, и учитывая (5), получим для $\tau_0 = 0, \ \tau_1 = \pi$ и для любого выпуклого вверх на $[0, \pi]$ модуля непрерывности $\omega(t)$:

$$\sup_{f \in w_0^r H[\omega]_L} \| f(x) - R_n(f;x) \|_L = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t)\{F(t) + F(\pi - t)\}dt + \tag{6}$$

$$+\alpha_{n,r} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(1+(-1)^{k+1})\frac{1-\cos\frac{\pi k}{2n}}{k^r}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t)\sin ktdt + \alpha_{n,r}.$$

Рассуждая как в [4], приходим к окончательному асимптотическому равенству

$$\sup_{f \in w_0^r H[\omega]_L} \| f(x) - R_n(f;x) \|_L = \frac{\pi^2}{4n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{(2k+1)^{2m-1}} + \overline{\alpha}_{n,m},$$

где $\overline{\alpha}_{n,m} = o(\frac{1}{n^3} + \frac{\ln n}{n^3}\omega(\frac{1}{n}))$, если $m = 1$ и $\overline{\alpha}_{n,m} = o(\frac{1}{n^4})$, если $m \geq 2$,

$$b_p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2t)\sin ptdt.$$

Литература

[1] Бердышев В.И. Приближение перйдических функций сумамми Фурье в среднем, Изв. АН СССР, сер. матем., т.29, # 3, 1965.

[2] Демченко А.Г. Приближение в среднем функций классов $H[\omega]$ суммами Фуръе, УМЖ, т. 25, #2, 1973

[3] Демченко А.Г. О приближении в среднем функций классов в $H[\omega]$ суммами Валле-Пуссена, УМЖ, т. 24, #1, 1972

[4] Дзядык В.К., Гаврилюк В.Т., Степанец А.Н. О точной верхней грани приближений на классах дифференцируемых перйдических функций при помощи полиномов Рогозинского, УМЖ, т. 22, #4, 1970

Черкасский пединститут
Черкассы 257000
ул. К. Маркса 24

Received before 23.12.1988