Problemy Matematyczne
11 (1989), 9 - 16

Proste w geometrii kwadratu

Stanisław Szymański

W pracach [1] i [2] zawarte są podstawowe określenia geometrii lokalnie euklidesowych oraz podano ich klasyfikację w oparciu o jednostajnie nieciągłe grupy przekształceń izometrycznych płaszczyzny euklidesowej. Celem artykułu jest scharakteryzowanie prostych w geometrii kwadratu oraz opis pewnego zjawiska fizycznego za pomocą tej geometrii. Niech na płaszczyźnie euklidesowej dany będzie kwadrat $ABCD$. Zbiór $\mathcal{G}$ geometrii kwadratu, jak sama nazwa wskazuje, stanowić będą punkty wewnętrzne tego kwadratu oraz punkty znajdujące się na bokach z tą jednak modyfikacją, że punkty leżące na przeciwległych bokach będą utożsamiane, jeżeli można je połączyć odcinkiem równoległym do pozostałych dwóch boków. Odległość ϱ między punktami A i B będzie realizowana po najkrótszej linii f, łączącej te punkty, przy czym linia f może rozpadać się na skończoną ilość krzywych rozłącznych $f_1, f_2, \ldots, f_n$ takich, że krzywa f_i kończy się, a f_{i+1} zaczyna się w punktach utożsamionych dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Geometria kwadratu $\Sigma = (\mathcal{G}, \varrho)$ jest geometrią lokalnie euklidesową [1]. Z kolei rozpatrzmy również geometrię lokalnie euklidesową $\Sigma_\Gamma = (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\varrho})$, która odpowiadać będzie jednostajnie nieciągłej grupie przekształceń izometrycznych płaszczyzny euklidesowej $\Gamma = \left[T_{\overrightarrow{AB}}, T_{\overrightarrow{AD}}\right]$, gdzie translacje $T_{\overrightarrow{AB}}$ i $T_{\overrightarrow{AD}}$ są generatorami grupy Γ. Elementami grupy Γ są więc translacje postaci $T_{\vec{x}}$, gdzie $\vec{x} = m \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{AD}$, $m, n \in \mathcal{Z}$. Punkt $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{G}}$ geometrii Σ_Γ jest wyznaczony przez orbitę $\mathcal{A}$ generowaną przez punkt A, zaś odległość

$$\tilde{\varrho}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \min\{|AB|, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\},$$

gdzie $|AB|$ oznacza odległość euklidesową punktów A i B na płaszczyźnie. Geometrie $\Sigma = (\mathcal{G}, \varrho)$ i $\Sigma_\Gamma = (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\varrho})$, co wykazano w pracy [1], są równoważne, tzn. istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne $h : \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ zachowujące odległość: $\varrho(A, B) = \tilde{\varrho}(h(A), h(B))$. O lokalnej euklidesowości geometrii Σ_Γ świadczy fakt, że odległość euklidesowa punktów A i B koła o dowolnym środku i promieniu $r = \frac{|\overline{AB}|}{4}$ jest równa odległości $\tilde{\varrho}(\tilde{A}, \tilde{B})$. Rozbicie punktów płaszczyzny euklidesowej na orbity jest relacją równoważności. Punkty A i B na płaszczyźnie euklidesowej są równoważne jeżeli istnieją liczby $m, n \in \mathcal{Z}$ takie, że $T_{m\cdot\overrightarrow{AB}+n\cdot\overrightarrow{AD}}(A) = B$. Przy powyższym odwzorowaniu h każdej figurze geometrycznej (w kwadracie) w geometrii Σ odpowiada figura w geometrii Σ_Γ. I tak prostą w geometrii Σ nazywamy tę linię l w kwadracie, której odpowiada przy odwzorowaniu h prosta na płaszczyźnie, tzn. dla której suma mnogościowa orbit $h(A)$, $A \in l$, jest prostą na płaszczyźnie. Długość prostych w kwadracie może być skończona lub nieograniczona. Prosta zamknięta w kwadracie to taka prosta l, po której poruszając się w dowolnym kierunku powrócimy do punktu wyjściowego, natomiast poruszając się na odpowiadającej jej prostej $\tilde{l} = h(l)$ na płaszczyźnie euklidesowej dojdziemy do punktu równoważnego z punktem wyjściowym.

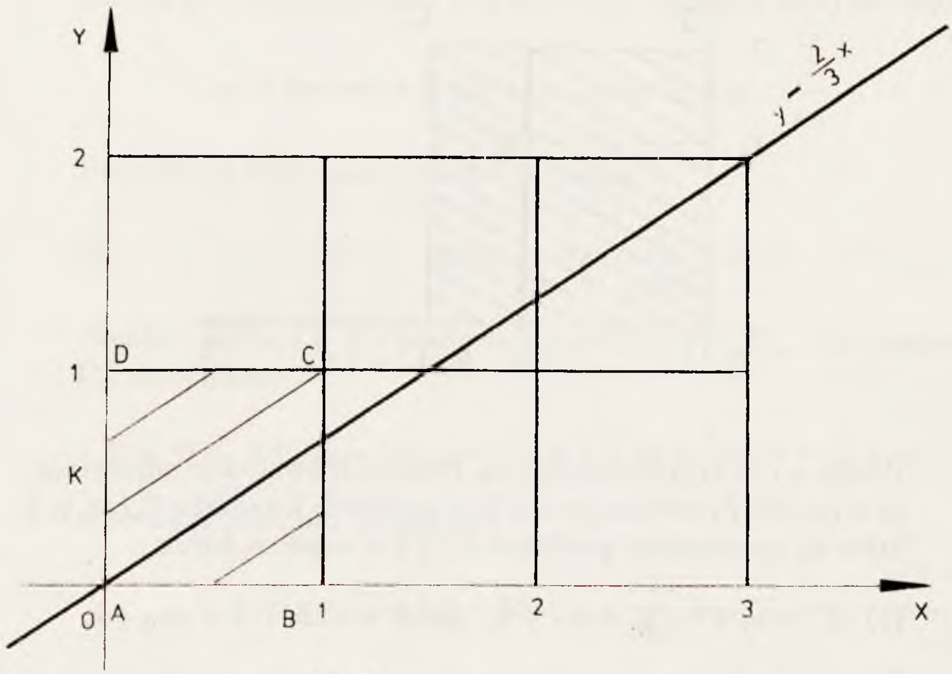
Twierdzenie 1 *Jeżeli współczynnik kierunkowy prostej $\tilde{l}$ o równaniu $y = ax + b$ jest liczbą wymierną, to odpowiadająca jej prosta l w kwadracie jest zamknięta, natomiast gdy współczynnik ten jest liczbą niewymierną, to prosta l jest nieskończona i przechodzi dowolnie blisko koło każdego punktu kwadratu.*

<u>Dowód.</u> Niech rozważany kwadrat $ABCD$ będzie kwadratem jednostkowym.

1. $a = p/q$, $p, q \in \mathcal{Z}$ (a — liczba wymierna).

   Punkty $\widetilde{P_1}(\widetilde{x_1}, \widetilde{y_1})$ i $\widetilde{P_2}(\widetilde{x_1}+q, \widetilde{y_1}+p)$ są równoważne i jeżeli $\widetilde{P_1} \in \tilde{l}$, to $\widetilde{P_2} \in \tilde{l}$. Oznacza to, że odpowiadająca prostej $\tilde{l}$ prosta l w kwadracie jest zamknięta. Na rysunku 1 przedstawiono prostą l

w kwadracie, dla której $\bar{l}$ ma równanie $y = \frac{2}{3}x$.

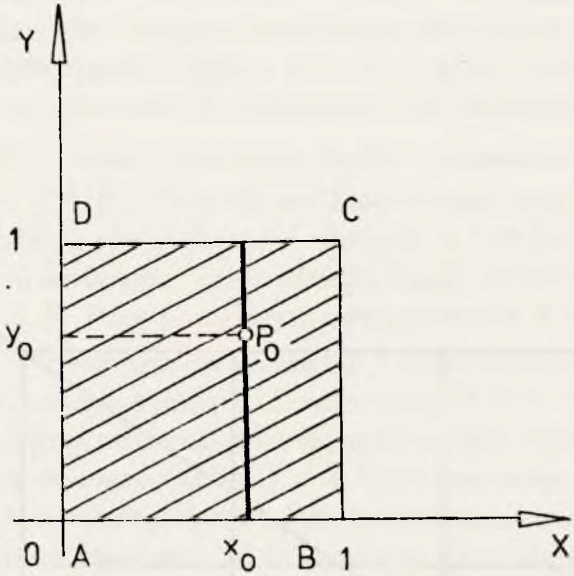


Rys. 1

2. Niech a będzie liczbą niewymierną.

Rozpatrzmy dowolny punkt wewnętrzny kwadratu $P_0(x_0, y_0)$ oraz prostą l_0 przechodzącą przez punkt P_0 i równoległą do boku AD

(rys. 2).



Prosta l_0 jest krzywą zamkniętą. Prosta l w kwadracie odpowiadająca prostej $\tilde{l}$ przecina prostą l_0 w punktach kwadratu $P_n(x_0, y_n)$, które są równoważne punktom $\widetilde{P_n} \in \tilde{l}$ o współrzędnych

(1) $\widetilde{x_n} = x_0 + n$, $\widetilde{y_n} = an + \tilde{b}$, gdzie $n \in \mathcal{Z}$ i $\tilde{b} = ax_0 + b$.

Z kolei wykażemy, że jeżeli $m \neq n$, to $P_m \neq P_n$. Załóżmy, że $m \neq n$ oraz $\widetilde{P_m}$ i $\widetilde{P_n}$ są równoważne na $\tilde{l}$. Wówczas zgodnie z (1) otrzymujemy

$$\widetilde{x_m} - \widetilde{x_n} = m - n \quad \text{i} \quad \widetilde{Y_m} - \widetilde{Y_n} = a(m - n).$$

Z drugiej strony z równoważności punktów $\widetilde{P_m}$ i $\widetilde{P_n}$ wynika, że istnieje liczba całkowita $k \in \mathcal{Z}$ taka, że zachodzi

$$\widetilde{Y_m} - \widetilde{Y_n} = k.$$

Stąd $\frac{k}{m-n} = a$, czyli a jest liczbą wymierną, co sprzeczne jest z założeniem.

Weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje taka liczba naturalna n_0, że $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Podzielmy odcinek jednostkowy l_0 na n_0 równych części punktami $Q_i\left(x_0, \frac{1}{n_0}\right)$, $i = 1, \ldots, n_0$. Ponieważ liczba punktów P_n jest nieskończona, zaś liczba odcinków wynosi n_0, to istnieją co najmniej dwa punkty P_n i P_m, gdzie $m \neq n$, należące do tego samego odcinka. Z kolei oznacza to, że istnieje liczba całkowita $k \in \mathcal{Z}$ taka, że $\widetilde{y_n} - (\widetilde{y_m} + k) < \frac{1}{n_0}$ i zgodnie z (1) zachodzi

$$an + \tilde{b} = am + \tilde{b} + k + \alpha, \quad \text{gdzie } 0 < \alpha < \frac{1}{n_0}.$$

Przyjmując oznaczenie $r = n - m$ mamy

$$ar = \alpha + k, \quad \text{gdzie } 0 < \alpha < \frac{1}{n_0}, \ k \in \mathcal{Z}. \tag{2}$$

Ustalmy liczbę $s \in \mathcal{Z}$ i porównajmy punkty P_s i P_{s+r}. Ze wzorów (1) otrzymamy

$$\widetilde{x_{s+r}} = \widetilde{x_s} + r, \ \widetilde{y_{s+r}} = a \cdot (s + r) + \tilde{b} = as + \tilde{b} + ar = \widetilde{y_s} + ar,$$

a po uwzględnieniu (2) mamy

$$\widetilde{y_{s+r}} = \widetilde{y_s} + k + \alpha, \ 0 < \alpha < \frac{1}{n_0}, \ k \in \mathcal{Z},$$

co oznacza, że odległość między punktami P_s i P_{s+r} jest mniejsza od $\frac{1}{n_0}$. Biorąc więcej niż $\frac{1}{\alpha}$ odcinków $\left[P_{ir}, P_{(i+1)r}\right]$, $i = 0, 1, \ldots$, pokryjemy całą prostą l_0 i punkt P będzie należeć do jednego z tych odcinków tzn. istnieje punkt P_{ir} taki, że $\varrho(P_{ir}, P) \leq \alpha < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Przykład.

Rozpatrzmy układ planet A i B, które krążą ze stałymi prędkościami kątowymi odpowiednio ω_1 i ω_2 po współśrodkowych orbitach o promieniu r_1 i r_2, gdzie $r_1 < r_2$.

Załóżmy, że płaszczyzny orbit są różne i planeta A jest widziana przez obserwatora znajdującego się w środku orbit O pod kątem γ_1, zaś B pod kątem γ_2 $(\gamma_1 < \gamma_2)$. Oznaczmy przez A_0 i B_0 położenie planet w czasie rozpoczęcia ich obserwacji ($t = t_0$). Położenie planety A w czasie t określone będzie kątem φ między półprostymi $\overrightarrow{OA_0}$ i $\overrightarrow{OA}$, gdzie A również oznacza położenie planety A w czasie t. Analogiczne położenie planety B określone jest kątem ψ. W takim razie każde położenie planet jest całkowicie określone parą liczb (φ, ψ), gdzie $0 \leq \varphi < 2\pi$ i $0 \leq \psi < 2\pi$. Zbiór wszystkich punktów położeń (φ, ψ) planet stanowi na płaszczyźnie euklidesowej we współrzędnych kartezjańskich φ, ψ kwadrat o boku 2π, przy czym

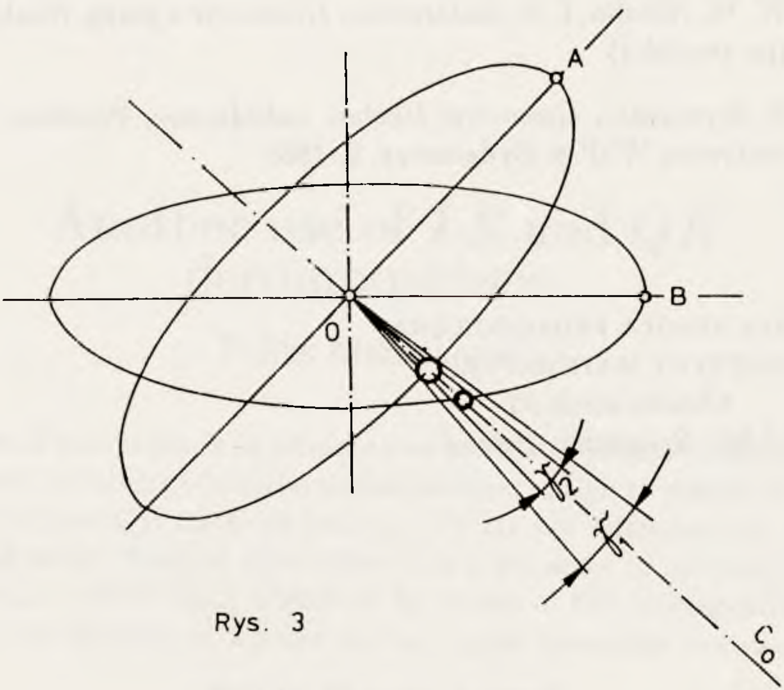
$$(0, \psi) = (2\pi, \psi) \text{ i } (\varphi, 0) = (\varphi, 2\pi),$$

czyli powyższy układ planetarny jest scharakteryzowany punktami geometrii kwadratu.

Z kolei wykażemy, że jeżeli ω_2/ω_1 jest liczbą niewymierną, to obserwator w punkcie O zaobserwuje nieskończenie wiele zaćmień. Zaćmienie zachodzi w dany moment czasu t, gdy planety A i B znajdować się będą dostatecznie blisko jednej z dwóch półprostych powstałych z rozbicia przez punkt O prostej krawędziowej utworzonej z przecięcia płaszczyzn orbitalnych. Dokładniej, jeśli (φ_0, ψ_0), oznacza punkt w kwadracie odpowiadający położeniu planet na półprostej $\overrightarrow{OC_0}$ (rys. 3), to zaćmienie nastąpi, jeśli punkt (φ, ψ), kwadratu odpowiadający położeniu planet w czasie t spełnia nierówność

$$|\varphi - \varphi_0| + |\psi - \psi_0| < \gamma_1 - \gamma_2. \tag{3}$$

Takie punkty (φ, ψ) tworzą również kwadrat o środku (φ_0, ψ_0) i przekątnej $2(\gamma_1 - \gamma_2)$.



Rys. 3

Jeśli w momencie $t = 0$ położenie środków planet A i B określone jest kątami α i β, to w czasie t

$$\varphi = \omega_1 t + \alpha, \ \psi = \omega_2 t + \beta.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{\psi - \beta}{\varphi - \alpha} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

tzn. $\psi = \dfrac{\omega_1}{\omega_2}\varphi + \lambda$, gdzie $\lambda = -\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\alpha + \beta$.

Ostatnie równanie jest równaniem prostej o współczynniku kierunkowym ω_1/ω_2, dlatego położenia planet w różne momenty czasowe wykreślają prostą w kwadracie. Jeżeli ω_1/ω_2 jest liczbą niewymierną, to na podstawie udowodnionego wyżej twierdzenia prosta ta przechodzi dowolnie blisko koło każdego punktu kwadratu, a zatem w szczególności przechodzi dowolnie blisko punktu (φ_0, ψ_0), tzn. istnieje nieskończenie wiele punktów na tej prostej (φ, ψ), które spełniają nierówność (3).

Literatura.

[1] W. W. Nikulin, I. R. Szafarewicz, *Geometrie i grupy*, Nauka, 1983 (po rosyjsku)

[2] S. Szymański, *Geometrie lokalnie euklidesowe*, Problemy Matematyczne WSP w Bydgoszczy, 9, 1988

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
INSTYTUT MATEMATYKI
Chodkiewicza 30
85-064 Bydgoszcz, Poland

Received before 23.12.1988