Andrzej Kmiecik

PRÓBA ZASTOSOWANIA POJĘĆ TEORII MNOGOŚCI DO ANALIZY NIEKTÓRYCH POJĘĆ Z METAFIZYKI ARYSTOTELESA I TOMASZA Z AKWINU

W literaturze poświęconej filozofii logiki jest zwykle dyskutowana stosowalność jakiegoś systemu logiki do wyrażenia tez filozoficznych, a pomija się kwestię stosowania teorii mnogości w analizach tez filozoficznych.[1] W naszym artykule chcemy podać ogólne uwagi związane ze stosowaniem teorii mnogości w jakiejś dziedzinie wiedzy oraz chcemy podać propozycję wyrażenia w języku teorii mnogości pojęcia bytu występującego w metafizyce Arystotelesa i Tomasza z Akwinu. Artykuł ten ma charakter programu badawczego. Chcąc go uprzystępnić szerszemu kręgowi czytelników, będzie się unikać używania w tej pracy formalnego języka teorii mnogości.

Na początku należy zaznaczyć, że wielu przedstawicieli teorii mnogości otwarcie stwierdza, że nie wiadomo co to są zbiory, ani też nie jest wiadomo, czy one w ogóle istnieją czy też nie istnieją. Tzn. teoria mnogości jest traktowana jako teoria niezinterpretowana, jako czysto formalny system.[2] Stosujący teorię mnogości do zagadnień filozoficznych wykorzystują operator abstrakcji. Tworzy on nazwę zbioru; jest funktorem nazwotwórczym od argumentu zdaniowego.[3]

Przez stosowanie teorii mnogości do filozofii będziemy rozumieli przekład tez filozoficznych, zapisanych w języku naturalnym, na język teorii mnogości.[4]

Celem takiego stosowania teorii mnogości nie jest formalizacja tez filozoficznych, ale uwypuklenie treści pojęć, tez filozoficznych, rozumowań, które się przeocza, gdy są zapisane w języku naturalnym oraz wykrycie założeń.

Należy zauważyć, że wraz z przekładem[5] tez filozoficznych na język teorii mnogości pojawia się problem adekwatności. A to z kolei wikła nas w kwestię fundamentalizmu epistemologicznego.[6]

Podstawą wprowadzenia teorii mnogości do filozofii jest pojęcie relacji. Jest to bowiem pojęcie bardzo ogólne. Wadą opisu posługującego się pojęciem relacji jest bezwładność tego opisu, spowodowana ogólnością pojęcia relacji.[7]

W oparciu o teorię mnogości tworzy się różne ontologie. Wystarczającą bazą dla tych ontologii jest naiwna teoria mnogości G. Cantora.[8] Teorię mnogości do ontologii stosują m.in. S. Kaczorowski, J. Perzanowski, J. Jadacki. Odejście od naiwnej teorii mnogości polega na odrzuceniu założenia, że dla dowolnego warunku – sformułowanego w języku teorii mnogości – istnieje zawsze klasa elementów, która go spełnia.[9]

System teorii mnogości jest budowany aksjomatycznie. System aksjomatyczny jest budowany następująco:[10]

a) najpierw wybiera się pojęcia podstawowe i wyjaśnia ich naturę możliwie najpełniej; następnie,

b) tworzy się aksjomaty dla tych pojęć.

Zatem należy zbadać, jak się mają pojęcia teoriomnogościowe i aksjomaty do pojęć metafizyki Arystotelesa i – odpowiednio – do tez tej metafizyki. Należy też ustalić zgodność związków metafizycznych i logicznych oraz teoriomnogościowych.

Żeby ustalić, na czym polega tu problem adekwatności przekładu, wprowadźmy aksjomatykę podaną przez E. Zermelo. Zermelo bowiem wykorzystał siedem Zasad Cantora teorii mnogości jako aksjomaty[11], a jako bazy tego systemu użył logiki predykatów pierwszego rzędu.[12] Przyjmujemy następujące sformułowania w języku naturalnym:[13]

1) Aksjomat ekstensjonalności:[14]

Zbiory złożone z tych samych przedmiotów są identyczne. Dwa zbiory A i B mogą być różnie definiowane, ale jeśli mają te same elementy, to są identyczne. Z tego aksjomatu wynika, że istnieje tylko jeden zbiór pusty.

2) Aksjomat pary:

Dla dowolnych dwóch przedmiotów x, y istnieje zbiór o elementach x, y. Aksjomat ten pozwala tworzyć zbiory.

3) Aksjomat sumy:

Niech K oznacza rodzinę zbiorów.

Dla każdej rodziny zbiorów K istnieje zbiór złożony z tych i tylko tych przedmiotów, które należą do jakiegoś zbioru rodziny K.

4) Aksjomat zbioru potęgowego:

Dla każdego zbioru A istnieje zbiór wszystkich i tylko tych zbiorów, które są podzbiorami zbioru A.

5) Aksjomat wyróżniania, zwany też aksjomatem podzbiorów:

Dla każdego zbioru A i każdego wyrażenia zdaniowego Z(x) istnieje podzbiór zbioru A, złożony z tych i tylko tych przedmiotów, które spełniają wyrażenie zdaniowe Z(x). Z(x) jest formą zdaniową aksjomatycznej teorii mnogości. Zbiór takich aksjomatów jest nieskończony, bowiem nieskończony jest zbiór form zdaniowych aksjomatycznej teorii mnogości, tworzonych za pomocą funktorów rachunku zdań i kwantyfikatorów.

Na mocy tego aksjomatu wprowadza się definicję zbioru pustego, tzn. aksjomat ten zapewnia istnienie zbioru pustego.

6) Aksjomat wyboru:[15]

Dla każdej rodziny zbiorów niepustych i wzajemnie rozłącznych istnieje zbiór, który ma dokładnie jeden element wspólny z każdym zbiorem tej rodziny.

7) Aksjomat nieskończoności:[16]

Istnieje rodzina zbiorów, do której należy zbiór pusty, i taka, że jeśli zbiór A jest jej elementem, to jej elementem jest również zbiór będący sumą dwóch zbiorów: zbioru A i zbioru, którego elementem jest zbiór A. Aksjomat ten jest konstruktywny.[17] Gwarantuje on istnienie takich zbiorów nieskończonych, które odpowiadają zbiorom przeliczalnym Cantora naiwnej teorii mnogości.[18]

Aksjomaty: ekstensjonalności, pary, sumy, zbioru potęgowego, wyróżniania, wyboru, tworzą ogólną teorię mnogości.[19] Aksjomaty te nie pozwalają jednak udowodnić istnienia zbioru nieskończonego.[20]

Warto odnotować, że dla skończonych rodzin zbiorów, które to zbiory są również skończone, następujące aksjomaty są zbyteczne: wyboru, zbioru potęgowego, podzbiorów.[21]

Należy zaznaczyć, że dla przeliczalnej rodziny zbiorów, które to zbiory tej rodziny są przeliczalne, dla uzyskania selektora wystarczy użyć aksjomatu podzbiorów zamiast aksjomatu wyboru. Nie oznacza to jednak, że nie ma różnicy między tymi dwoma aksjomatami.[22]

Ogólnie można powiedzieć, że aksjomaty (1) – (6) ogólnej teorii mnogości pozwalają stwierdzić istnienie:

a) zbioru pustego;

b) zbioru skończonego, chociaż istnieje nieskończenie wiele zbiorów.[23]

Teraz możemy precyzyjniej sformułować adekwatności przedkładu, mianowicie: jeśli Arystoteles odrzuca istnienie nieskończoności aktualnej[24], to jaki zbiór aksjomatów w teorii mnogości należy stosować do analizy niektórych pojęć metafizyki? Spróbujmy odpowiedzieć na to pytanie.

Arystoteles odrzucił istnienie aktualnej nieskończoności, przyjął natomiast istnienie nieskończoności potencjalnej, polegającej na posuwaniu się dowolnie daleko w dołączaniu nowych elementów do utworzonego już zbioru.[25] Przyjmując zatem, że uniwersum substancji jest skończone, nie musimy się posługiwać aksjomatem wyboru. Aksjomat ten bowiem rodzi kontrowersje ze względu na swoją niekonstruktywność.[26] Ani też nie musimy przyjmować aksjomatu nieskończoności.

Jednak pojawia się problem w przypadku próby opisu zmiany metafizycznej; czy dla opisu ciągłości zmiany trzeba użyć zbiorów o mocy *continuum?* Wydaje się nam, że w takim opisie można tak postąpić, przyjmując, że mamy do czynienia z nieskończonością potencjalną. Argumentem na to może być zdanie Arystotelesa, że nieskończoność istnieje potencjalnie dla poznania, gdyż czynność dzielenia jest procesem myślowym.[27] A taką to właśnie czynnością należałoby się posłużyć w opisie zmiany. Wtedy do takiego opisu moglibyśmy użyć teorii kategorii.[28] Wobec powyższego pojawia się nowe pytanie, która z istniejących aksjomatyk[29] teorii mnogości jest adekwatniejsza wobec zastosowań w filozofii:

1) czy ta, która posługuje się pojęciem klasy[30] i zbioru,

2) czy ta, która może być podstawą teorii mnogości,

3) czy ta, która operuje tylko pojęciem zbioru,

4) czy raczej ta, która przyjmuje istnienie uniwersum (jedno lub wiele)?

Odpowiedź na to pytanie można dać dopiero wtedy, gdy się użyje do analizy pojęć metafizyki, któregoś z systemów teorii mnogości. Jednym z kryteriów wyróżnienia któregoś z systemów teorii mnogości może być charakter ontologiczny albo epistemologiczny prowadzonej analizy. My tylko pokazujemy, że do opisu uniwersum metafizyki Arystotelesa wystarczy teoria mnogości bez aksjomatu wyboru i aksjomatu nieskończoności.

Spróbujmy dostosować pojęcie zbioru do potrzeb metafizyki Arystotelesa. Otóż zbiór w sensie dystrybutywnym – bo takimi zajmuje się teoria mnogości – jest przedmiotem abstrakcyjnym.

Wyróżnijmy najpierw dwie koncepcje zbioru: a) matematyczną, b) logiczną. Według logicznej koncepcji zbioru, zbiory traktujemy jako ekstensje własności. Matematyczną koncepcję zbioru nazywa się iteracyjną koncepcją zbioru; według tej koncepcji nowe zbiory uzyskuje się z już istniejących zbiorów. Z iteracyjnej koncepcji zbiorów można zrezygnować w przypadku zbiorów skończonych.[31]

Jeśli uwzględnimy spór o uniwersalia, to zależnie od stanowiska filozoficznego, zbiory można pojmować: a) jako wytwór myśli (konceptualizm, konstruktywizm), b) jako przedmiot realny, którego realność jest różna od realności przedmiotów materialnych i zjawisk psychicznych (realizm platoński) lub przyjąć, że c) nie istnieją przedmioty abstrakcyjne (nominalizm).[32] Te standardowo wymieniane stanowiska można uzupełnić stanowiskiem odpowiadającym realizmowi umiarkowanemu, mianowicie przez sprowadzenie pojęcia zbioru do pojęcia własności, np. „x jest elementem zbioru przedmiotów mających własność A".[33] Stąd wniosek: jeśli nie ma przedmiotów mających własność A, to nie ma zbioru takich przedmiotów. Musimy tu pamiętać o odróżnieniu zbioru od jego nazwy. Wydaje się nam, że przy takim rozumieniu zbioru możemy stosować teorię mnogości do metafizyki Arystotelesa.

Wobec tego możemy powiedzieć, że rozumienie zbioru w duchu realizmu umiarkowanego jest równoważne logicznej koncepcji zbioru. A ponieważ mamy do czynienia w metafizyce Arystotelesa ze skończonym uniwersum, to możemy bez obaw stosować teorie mnogości posługujące się iteracyjną koncepcją zbioru.

Innym argumentem na rzecz stosowania teorii mnogości do analizy kwestii filozoficznych może być to, iż w rozważaniach teoriomnogościowych (jak i logicznych) stosuje się relatywne pojęcie indywiduum. Tzn. pojęcie indywiduum jest zrelatywizowane do danego kontekstu teoretycznego.[34] Jest tak na przykład, gdy odróżniamy biel jednej kartki od bieli drugiej kartki. Są to bowiem własności indywiduów.[35]

Przejdźmy teraz do teoriomnogościowego rozumienia bytu. Rozważmy niektóre sformułowania odnoszące się do pojęcia bytu:

1) z Akwinu koncepcję bytu. Wtedy Sokrates należy do zbioru bytów pod warunkiem, że Sokrates ma własność istnienia. Tak byłoby przy interpretacji zbioru w duchu realizmu umiarkowanego. Należy odrzucić powyższe teoriomnogościowe sformułowanie, gdyż istnienie nie jest cechą.

2) Rozważmy następujące sformułowanie: bytem jest to, co jest czymś. Wtedy Sokrates jest bytem pod warunkiem, że Sokratesowi przypiszemy jakąś cechę. O takie rozumienie jest bliższe ontologii, a za taką należałoby uznać Arystotelesa teorię bytu. W jego bowiem metafizyce elementem konstytuującym byt jest forma. Ograniczenie może płynąć stąd, że tak zdefiniowane – teoriomnogościowo – pojęcie bytu może być za wąskie i nie ujmować tego, co jest bytem w sensie Arystotelesa.

3) Dla Tomasza z Akwinu koncepcji bytu proponujemy określenia pojęcia bytu z użyciem funktorów epistemicznych[36], mianowicie:

a) Dany przedmiot jest bytem, gdy jakiś podmiot poznający stwierdza, że dany przedmiot istnieje;

b) Dany przedmiot jest bytem, gdy podmiot poznający stwierdza, że dany przedmiot istnieje i afirmuje to istnienie.[37]

Powyższe określenia bytu dają się wyrazić formalnie za pomocą operatora abstrakcji. Określenie 3b) wprowadza funktor afirmacji. Nasza próba pomija kwestię transcendentalności i analogiczności pojęcia bytu. Są bowiem trudności związane z ich formalnym potraktowaniem. Modele formalne transcendentalności i analogiczności pojęcia bytu są narażone na zarzut ontologizacji tego pojęcia.

Podsumujmy nasze rozważania:

1) W zastosowaniach teorii mnogości do metafizyki Arystotelesa należy używać logicznej koncepcji zbioru. Przy użyciu jej do teorii bytu Tomasza z Akwinu trzeba zdawać sobie sprawę z ograniczeń związanych z analogicznością pojęć i egzystencjalnym charakterem tychże pojęć.

2) Do opisu skończonych uniwersów możemy posługiwać się teorią mnogości, nie korzystając ani z aksjomatu nieskończoności, ani z aksjomatu wyboru. W przeliczalnych nieskończonych uniwersach nie musimy posługiwać się aksjomatem wyboru.

3) Teoriomnogościowo wprowadzone pojęcie bytu ma ograniczenia z racji transcendentalności i analogiczności pojęcia bytu.

4) do teoriomnogościowych sformułowań pojęcia bytu trzeba użyć pojęcia relacji.

PRZYPISY

[1]Jest rozbieżność zdań co do tego, z jakich teorii składa się logika. Matematycy uważają, że do logiki matematycznej należą: teoria rekursji, teoria modeli, teoria dowodu, teoria mnogości. Zob. J. Barwise: Foreword, in: J. Barwise (ed.): Handbook of mathematical logic. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1977. Logicy o orientacji filozoficznej nie zaliczają teorii mnogości do logiki, gdyż termin pierwotny teorii mnogości „być elementem" jest stałą pozalogiczną; przez logikę rozumie się analizę języka i czynności badawczych, w celu podania reguł posługiwania się językiem i wykonywania czynności badawczych, aby uczynić tę działalność możliwie najbardziej skuteczną. Zob. W. Marciszewski (red.): Mała Encyklopedia Logiki. Ossolineum Wrocław 1988, wyd. 2, s. 95.

[2]C. Lejewski: Ontology and logic, in: S. Körner (ed.): Philosophy of logic. Univ. of Californa Press, Berkeley, Los Angeles 1976, s. 13.

[3]L. Borkowski: Wprowadzenie do logiki i teorii mnogości. TN Lublin KUL 1991, s. 17.

[4]Jest to modyfikacja tego pojęcia, wziętego z przypadku, gdy mówi się o stosowaniu logiki do filozofii. Przez stosowanie logiki do filozofii rozumie się analizę poprawności wywodów filozoficznych. Zob. np. J.M. Bocheński: Co logika dała filozofii? Studia Filozoficzne 6-7(271-272)/1988, s. 7-13; S. Kiczuk: Logika czy logiki? tamże, s. 52.

[5]Są różne odmiany relacji przekładalności, np. przekładalność z zachowaniem prawdziwości, z zachowaniem tego samego znaczenia, z zachowaniem analityczności itp. Możemy mówić o przekładalności w obrębie pewnych kontekstów, jak i o przekładalności całych języków. Zob. W. Marciszewski (red.): Mała encyklopedia logiki. Ossolineum Wrocław 1988, s. 158.

[6]Zob. J. Dębowski: Idea bezzałożeniowości. Lublin UMCS 1987, s. 30.

[7]Mówiąc o wprowadzeniu teorii mnogości do filozofii, mamy na myśli rozszerzenie języka ontologii o język teorii mnogości, jak i stosowanie języka teorii mnogości do filozofii.

[8]Uwagę tę zawdzięczam prof. J. Perzanowskiemu.

[9]A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations of set theory. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, s. 139.

[10]J.R. Shoenfield: Axioms of set theory, in: J. Barwise (ed.): Handbook of..., s. 322.

[11]Inne teorie mnogości, które opierały się na Cantora wersji teorii mnogości: A.A. Fraenkel (1927, 1928), W. Ackermann (1937), T. Skolem (1952). Poza powyższą uwagą, system Zermeli – mimo różnych modyfikacji jest aktualny do dzisiaj; inne argumenty zob. A. Fraenkel, J. Bar-Hillel, Foundations..., s. 21-22.

Teorię mnogości można też przedstawić jako stosowaną logikę predykatów pierwszego rzędu, z dodatkowym predykatem dwuargumentowym oznaczającym relację bycia elementem, zob. L. Borkowski: Logika formalna. Warszawa PWN 1977, s. 300.

[12] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 25, 182. Chodzi tu o następujące przykładowo systemy: T. (Fraenkel), Z (Zermelo), in. Wiele systemów teorii mnogości opiera się na rozszerzeniach logiki predykatów pierwszego rzędu.

[13] L. Borkowski: Wprowadzenie..., s. 217-222. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 32-38, 44-48, 81-82. Podana tu aksjomatyka niewiele się różni od aksjomatyki podanej przez K. Kuratowski, A. Mostowski: Teoria mnogości. Warszawa PWN 1978.

[14] K. Kuratowski i A. Mostowski nazywają go aksjomatem jednoznaczności; zob. K. Kuratowski, A. Mostowski: Teoria mnogości. Warszawa PWN 1978, s. 65.

[15] Termin „wybór", „selektor" pochodzą z psychologicznych rozważań Zermeli, które przebiegało następująco: jeśli K jest rodziną rozłącznych zbiorów, nie zawierającą zbioru pustego, wtedy z każdego zbioru można wybrać po jednym elemencie i utworzyć nowy zbiór. To psychologiczne sformułowanie prowadzi do nieporozumień, zob. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 47 oraz rozdział III i IV.

[16] Ta postać aksjomatu nieskończoności pochodzi od von Neumanna i jest związana z jego metodą wprowadzania liczb porządkowych. Zob. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 82. Nieco inną postać podał Zermelo. Zbiory tworzone za pomocą tego aksjomatu są niezgodne z teorią typów, zob. tamże, s. 82, przypis 2.

[17] Konstruktywny – tzn. można podać sposób budowania zbiorów nieskończonych.

[18] A Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 84.

[19] A.A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 33. Użyty tu termin „ogólna teoria mnogości" ma inny sens, niż ten nadany przez Bernaysa, zob. tamże, s. 81-131.

[20] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 81.

[21] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 49, 81.

[22] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 55.

[23] A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: Foundations..., s. 81.

[24] Arystoteles: Metafizyka. (tłum. K. Leśniak). Warszawa PWN 1984, 1048 b, s. 228.

[25] W. Marciszewski: Aksjomatyczne ujęcie teorii mnogości. W: tenże (red.): Logika formalna. Zarys encyklopedyczny. Warszawa PWN 1987, s. 122.

[26] Aksjomat ten bowiem mówi, że dla każdej niepustej rodziny zbiorów istnieje selektor, tzn. nowy zbiór zawierający po jednym elemencie z każdego zbioru rodziny, ale nie podaje sposobu konstrukcji tego nowego zbioru.

[27] Arystoteles: Metafizyka..., 1048 b, s. 228.

[28]Tu wysuwamy propozycje opisu zmiany metafizycznej za pomocą teorii toposów. Podając tę propozycję wzorujemy się na A. Koczorowskiego analizie pojęcia zmiany u Hegla, przeprowadzonej za pomocą teorii toposów. Zob. A. Koczorowski: Logika Hegla i teoria toposów. Rozprawa doktorska obroniona w Instytucie Filozofii UAM. Poznań 1993. Nie jest to jedyny przypadek stosowania teorii kategorii do analizy pojęć filozoficznych, zob. np. I. Baruss: Categorical modelling of Husserl's intentionality. Husserl Studies 6 (1989), s. 25-41.

[29]Przykłady kilku aksjomatyk teorii mnogości, które są związane z pewnymi szczególnymi problemami. Zob. Z. Semadeni, A. Wiweger: Wstęp do teorii kategorii i funktorów. Warszawa PWN 1978, s. 21-22. Dla przykładu wymieńmy system Grothendiecka, który jest systemem Zermelo-Fraenkla z aksjomatem istnienia uniwersum.

[30]Zbiór może być elementem innego zbioru. Elementami klasy mogą być zbiory, ale klasa nie może być elementem innej klasy, czy zbioru. Istnieje klasa wszystkich zbiorów, ale nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

[31]Te koncepcje zbioru wyróżnia R. Tieszen. Zob. R. Tieszen: Mathematical intuition. Phenomenology and mathematical knowledge. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London 1989, s. 145-147, przypis 4, s. 194.

Iteracyjną koncepcję zbioru przedstawia J.R. Shoenfield: Axioms of set theory, in: J. Barwise (ed.): Handbook of..., s. 322-324.

Teoria mnogości scharakteryzowana przez aksjomatyk Zermelo-Fraenkla jest oparta na iteracyjnej koncepcji zbioru. Zob. G. Mar: Why „Natorian" arguments against the existence of God do not work. International Philosophical Quarterly 33(1993), s. 433.

[32]W. Marciszewski: Aksjomatyczne ujęcie..., s. 121.

[33]J. Słupecki, L. Borkowski: Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości. Warszawa PWN 1984, s. 282.

[34]Pojęcia zbioru i indywiduum należą do niedefiniowalnych z racji swej ogólności. Zob. B. Stanosz, A. Nowaczyk: Logiczne podstawy języka. Wrocław Ossolineum 1976, s. 53.

[35]Takie rozróżnienie można spotkać u J. Bocheńskiego, zob. J.M. Bocheński: Powszechniki jako treść cech w filozofii św. Tomasza z Akwinu. Przegląd Filozoficzny 41(1938), z. 2, s. 147.

[36]Wydaje się, że za podstawę do ich wprowadzenia można uznać pewien fragment traktatu „De ente et essentia" Tomasza z Akwinu. Wśród wymienianych przez niego określeń bytu jest i następujące: to jest bytem, co jest efektem prawdziwości zdania. Zob. Tomasz z Akwinu: De ente et essentia. O bycie i istocie. (Przekład – komentarz, studia, M.A. Krąpiec). Lublin RW KUL 1981, s. 10.

[37]W ostatnim sformułowaniu powołujemy się na różnice w A.B. Stępnia i M.A. Krąpca koncepcjach poznawalności istnienia. Uwagę tę zawdzięczam ks. prof. A. Maryniarczykowi.