ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ w BYDGOSZCZY

Problemy Matematyczne 1985 z. 7

ANTONI DOGOŃSKI
AGATA MOLENDA
TOMASZ NATKANIEC
WALDEMAR ORWAT
MAŁGORZATA ZAGOZDA
MAŁGORZATA ZGLINICKA

WSP w Bydgoszczy
Studenckie Koło Matematyczne WSP w Bydgoszczy

O IDEAŁACH BORELOWSKICH

F.Berstein skontruował rozbicie prostej na dwa zbiory miary zewnętrznej pełnej (drugiej kategorii w dowolnym punkcie) [2],[3] . Zakładając Hipotezę Continuum Łuzin podał przykład nieprzeliczalnego podzbioru prostej, który z każdym zbiorem pierwszej kategorii ma przecięcie przeliczalne [2],[3] . Analogiczny zbiór dla ideału zbiorów miary zero skonstruował W. Sierpiński. Również Sierpiński udowodnił, że dla dowolnej rodziny K mocy continuum wzajemnie jednoznacznych fukcji $f : R \rightarrow R$ odwzorowujących zbiory miary zero na zbiory miary zero, istnieje zbiór E ppierwszej kategorii i mocy continuum taki, że $f(E) \triangle E$ jest zbiorem przeliczalnym dla każdej funkcji $f \in K$ [3] .

W niniejszej pracy uogólniamy wyżej wymienione twierdzenie na klasę σ-ideałów borelowskich. Pojęcie σ-ideału borelowskiego wprowadzone zostało w pracy doktorskiej M. Balcerzaka [1] Przykładami σ-ideałów borelowskich są rodzina zbiorów miary Lebesgue´a zero, rodzina zbiorów pierwszej kategorii, rodzina zbiorów przeliczalnych lub rodzina zbiorów σ-porowatych. Inne przykłady ideałów borelowskich znaleźć można w [1] . Ponadto dla dowolnego ideału borelowskiego konstruujemy przykład funkcji $f : R \rightarrow R$ nieborelowskiej i takiej, że dla każdego $I \in \mathcal{J}$ funkcja $f|I$ jest II klasy Baire´a.

Praca ta powstała na spotkaniach Studenckiego Koła Matematyków. Podane twierdzenia dowodziliśmy najpierw dla ideału zbiorów miary Lebesgue'a zero, a następnie uogólnialiśmy je na dowolne ideały borelowskie.

W tej pracy R oznacza zawsze zbiór liczb rzeczywistych, $P(R)$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów R, zaś $\mathcal{B}$ rodzinę podzbiorów borelowskich w R. Zapis $A \triangle B$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów A i B.

DEFINICJA 1. Rodzinę $\mathcal{J}$ podzbiorów R nazywamy σ-ideałem borelowskim wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{J}$ spełnia następujące warunki

(1) jeśli $A \in \mathcal{J}$ i $B \subseteq A$, to $B \in \mathcal{J}$

(2) jeśli $\{A_1, A_2, \dots\} \subseteq \mathcal{J}$, to $\bigcup_{n=1} A_n \in \mathcal{J}$,

(3) jeśli A jest niepustym zbiorem owartym, to $A \notin \mathcal{J}$,

(4) jeśli $x \in R$, to $\{x\} \in \mathcal{J}$,

(5) jeśli $A \in \mathcal{J}$, to istnieje $B \in \mathcal{J} \cap \mathcal{B}$ taki, że $A \subseteq B$.

W dalszej części tej pracy $\mathcal{J}$ będzie zawsze oznaczało -ideał borelowski. Ponadto stale zakładamy, że spełniona jest Hipeteza Continuum (CH).

DEFINICJA 2. Mówimy, że zbiór C jest $\mathcal{J}$-mierzalny, wtedy i tylko wtedy, gdy należy do rodziny zbiorów borelowskich modulo σ-ideał $\mathcal{J}$, to znaczy, że C da się przedstawić w postaci różnicy symetrycznej dwóch zbiorów $A \triangle B$, gdzie A jest zbiorem borelowskim, a B należy do σ-ideału $\mathcal{J}$.

LEMAT 1. Każdy zbiór $\mathcal{J}$-mierzalny nie należący do zawiera podzbiór borelowski nie należący do ideału $\mathcal{J}$.

D o w ó d. Niech H będzie dowolnym zbiorem $\mathcal{J}$-mierzalnym nie należącym do ideału $\mathcal{J}$. Wówczas $H = A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$, gdzie A jest niepustym zbiorem borelowskim i B należy do σ-ideału $\mathcal{J}$. Wiemy, że $B - A \in \mathcal{J}$, bo $B \in \mathcal{J}$. Ponieważ ideał $\mathcal{J}$ jest borelowski, to każdy zbiór należący do ideału zawiera się w pewnym borelowskim zbiorze z ideału. Zatem istnieje zbiór borelowski C należący do ideału $\mathcal{J}$ taki, że $B \subset C$. Zachodzą następujące inkluzje :

$$A - C \subseteq A - B \subseteq H$$

Zbiór $A - C$ jest zbiorem borelowskim jako różnica zbiorów borelowskich. Pokażemy że zbiór $A - C$ nie należy do ideału $\mathfrak{J}$. Stosujemy metodę dowodu przez sprowadzenie do sprzeczności. Załóżmy, że zbiór $A - C$ należy do ideału $\mathfrak{J}$. Ponieważ $A \subseteq (A - C) \cup C$ oraz zbiory $A - C$, C należą do ideału $\mathfrak{J}$, to zbiór A należy do $\mathfrak{J}$. Ponieważ $A - B \subseteq (A - C) \cup (C - B)$, $A - C \in \mathfrak{J}$ oraz $C - B \in \mathfrak{J}$ (gdyż $C \in \mathfrak{J}$), więc $A - B$ jako suma zbiorów należących do $\mathfrak{J}$ też należy do $\mathfrak{J}$. Zatem zbiór $H = (A - B) \cup (B - A)$ należy do $\mathfrak{J}$ jako suma zbiorów należących do $\mathfrak{J}$, wbrew założeniu. Do sprzeczności doprowadziło nas błędne przypuszczenie, że $A - C$ należy do ideału $\mathfrak{J}$, a więc zbiór $A - C$ nie należy do ideału $\mathfrak{J}$. Wykazaliśmy, że każdy zbiór $\mathfrak{J}$-mierzalny zawiera podzbiór borelowski nie należący do ideału $\mathfrak{J}$.

LEMAT 2. Każdy podzbiór borelowski prostej jest albo przeliczalny, albo mocy continuum.

Lemat ten wynika bezpośrednio z CH.

LEMAT 3. Rodzina podzbiorów borelowskich prostej ma moc continuum.

D o w ó d. Zbiory borelowskie tworzą σ-ciało generowane przez rodzinę zbiorów otwartych. Rodzina ta jest mocy continuum, więc rodzina zbiorów borelowskich też jest mocy continuum [4]

TWIERDZENIE 1. Istnieje rozbicie prostej R na dwa podzbiory K, L takie, że $R = K \cup L$, $K \cap L \neq 0$ oraz jeśli F jest $\mathfrak{J}$-mierzalny i F nie należy do $\mathfrak{J}$, to $F \cap L \neq 0$ oraz $F \cap K \neq 0$.

D o w ó d. Rozważamy rodzinę wszystkich zbiorów borelowskich nie należących do ideału $\mathfrak{J}$. Z lematu 3 wiemy, że rodzina ta ma moc continuum. Korzystając z pewnika wyboru ustawiamy zbiory borelowskie w ciąg pozaskończony $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{\omega_0}, \ldots A_\beta, \ldots \beta < \omega_1$.

Ze zbioru A_1 wybieramy dwa różne punkty $x_1 \neq y_1$. Ze wbioru A_2 wybieramy punkty x_2 i y_2 takie, że $x_2 \neq y_2$ i $\{x_1, y_1\} \cap \cap \{x_2, y_2\} = \emptyset$. W α-tym kroku wybieramy ze zbioru $A_\alpha - \{x_\beta, y_\beta \mid \beta < \alpha\}$ dwa różne punkty x_α, y_α. Punkty takie możemy wybrać, gdyż na mocy lematu 2 zbiór A_α jest mocy continuum, zbiór który odejmujemy jest przeliczalny, więc

zbiór $A_\alpha - \{x_\beta, y_\beta : \beta<\alpha\}$ jest mocy continuum.
Definiujemy zbiory K i L w następujący sposób $K = \{x_\beta : \beta<\omega_1\}$, $L = R-K=R - \{x_\beta : \beta<\omega_1\}$. Sprawdzamy, że zbiory K i L spełniają warunki twierdzenia. Rozważmy zbiór borelowski E taki, że $E \notin \mathfrak{J}$. Wtedy istnieje liczba porządkowa α taka, że $E = A_\alpha$, a więc zbiór $K \cap E = K \cap A_\alpha$ jest niepusty, gdyż $x_\alpha \in K \cap A_\alpha$. Również zbiór $L \cap E$ jest niepusty, gdyż $y_\alpha \in L \cap E$. Jeżeli F jest zbiorem $\mathfrak{J}$-mierzalnym nie należącym do ideału $\mathfrak{J}$, to na mocy lematu 1 F zawiera podzbiór E borelowski i nie należący do $\mathfrak{J}$. Zatem $F \cap K \neq \emptyset$ oraz $F \cap L \neq \emptyset$.

WNIOSEK 1. Zbiory K i L nie należą do ideału $\mathfrak{J}$.

D o w ó d. Przypuśćmy, że zbiór K jest elementem ideału $\mathfrak{J}$. Wówczas istnieje zbiór borelowski K_1 taki, że $K \subseteq K_1$ oraz $K_1 \in \mathfrak{J}$. Wynika to z tego, że ideał $\mathfrak{J}$ jest borelowski. Wtedy $R - K_1$ jest zbiorem borelowskim nie należącym do ideału $\mathfrak{J}$ oraz $K \cap (R - K_1) = \emptyset$ (gdyż $K \subseteq K_1$). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że K nie należy do ideału $\mathfrak{J}$.

WNIOSEK 2. Jeżeli zbiór $\mathfrak{J}$-mierzalny A jest zawarty w K, to A należy do ideału $\mathfrak{J}$.
Wynika to z definicji zbiorów K i L.

PRZYKŁAD. Jeżeli $\mathfrak{J}$ jest σ-ideałem zbiorów miary Lebesgue'a zero, to K i L są zbiorami miary zewnętrznej pełnej.

DEFINICJA 3. Zbiór A nazywamy $\mathfrak{J}$-zbiorem Łuzina wtedy i tylko wtedy, gdy A jest nieprzeliczalny oraz przecięcie A z dowolnym zbiorem F z ideału $\mathfrak{J}$ jest przeliczalne.

UWAGA. Żaden $\mathfrak{J}$-zbiór Łuzina nie należy do $\mathfrak{J}$.

TWIERDZENIE 2. Dla każdego ideału borelowskiego $\mathfrak{J}$ istnieje $\mathfrak{J}$-zbiór Łuzina.

D o w ó d. Tworzymy ciąg ze zbiorów borelowskich należących do $\mathfrak{J}$. Wszystkich takich zbiorów borelowskich jest continuum (gdyż każdy zbiór jednopunktowy $\{x\}$ jest zbiorem borelowskim należącym do ideału $\mathfrak{J}$, a punktów na prostej jest continuum). Te zbiory borelowskie ustawiamy w ciąg pozaskończony $G_1, G_2, \ldots, G_{\omega_0}, G_\beta, \ldots \beta < \omega_1$.

Wybieramy punkty

$$x_1 \in R - G_1$$

$$x_2 \quad R - (G_1 \cup G_2 \cup \{x_1\} ,$$

$$\vdots$$

w α-tym kroku $x_\alpha \in R - (\bigcup_{\gamma \leq \alpha} G_\alpha \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\alpha\})$.
Punkt x_α można wybrać, gdyż na mocy CH zbiór $\bigcup\{G_\gamma; \gamma \leq \alpha\} \cup \{x_\gamma; \gamma < \alpha\}$ jest przeliczalną sumą zbiorów należących do $\mathcal{J}$, a ponieważ $\mathcal{J}$ jest σ-ideałem, więc zbiór $\bigcup_{\gamma \leq \alpha} G_\gamma \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x\}$ należy do $\mathcal{J}$. Zatem zbiór $R - (\bigcup_{\gamma \leq \alpha} G_\gamma \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\gamma\})$ nie należy do ideału $\mathcal{J}$ (w więc jest niepusty). Na mocy zasady indukcji pozaskończonej można wybrać ciąg takich punktów długości ω_1. Konstruujemy zbiór $S = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \{x_\alpha\}$. Sprawdzamy, że jeśli zbiór F jest zbiorem należącym do ideału $\mathcal{J}$, to $F \cap S$ jest zbiorem przeliczalnym.

a) Gdy F jest przeliczalny, to warunek ten jest oczywisty.

b) Zakładamy, że F jest nieprzeliczalnym zbiorem należącym do ideału $\mathcal{J}$. Ponieważ $\mathcal{J}$ jest ideałem borelowskim, więc istnieje $\alpha < \omega_1$ takie, że $F \subset G_\alpha$. Ponieważ dla każdego $\gamma \geq \alpha$ $x_\gamma \notin G_\alpha$, więc $G_\alpha \cap S \subset \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\gamma\}$. Zbiór $\bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\gamma\}$ jest zbiorem przeliczalnym, więc zbiór $G_\alpha \cap S$ jako podzbiór zbioru przeliczalnego jest conajwyżej przeliczalny. Zatem zbiór $F \cap S$ jako podzbiór zbioru $G_\alpha \cap S$ jest przeliczalny.

PRZYKŁAD. Jeśli $\mathcal{J}$ jest σ-ideałem zbiorów miary Lebesgue'a zero, to S jest zbiorem Sierpińskiego, a więc jest zbiorem pierwszej kategorii [3].

TWIERDZENIE 3. Dla każdego ideału borelowskiego $\mathcal{J}$ istnieje $\mathcal{J}$-zbiór Łuzina A taki, że jeśli M jest podzbiorem $\mathcal{J}$-mierzalnym zbioru A, to M jest przeliczalny.

D o w ó d. Nie K będzie zbiorem powstałym w wyniku rozbicia prostej na dwa podzbiory, zdefiniowanego w twierdzeniu 1.
Rozważmy wszystkie zbiory borelowskie należące do ideału $\mathcal{J}$. Ustawmy je w ciąg pozaskończony $G_1, G_2, \ldots, G_{\omega_0}, \ldots, G_\beta, \ldots \beta < \omega_1$.
Wybieramy punkty $\{x_\alpha, \alpha < \omega_1\}$ następująco:

$x_1 \in K - G_1$,

$x_2 \in K - (G_1 \cup G_2 \cup \{x_1\})$,

.

.

.

W α-tym kroku $x_\alpha \in K - (\bigcup_{\gamma \leq \alpha} G_\gamma \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\gamma\})$.

Zbiory postaci $K - (\bigcup_{\gamma \leq \alpha} G_\gamma \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\gamma\})$ są niepuste.

1) $K - G_1 \neq \emptyset$.

Dowód metodą nie wprost.

Gdyby $K - G_1 \neq \emptyset$, to wówczas $K \subseteq G_1$, a ponieważ G_1 należy do ideału $\mathfrak{J}$, czyli zbiór K należałby do ideału $\mathfrak{J}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż K nie należy do ideału $\mathfrak{J}$ na podstawie wniosku 1.

W α-tym kroku dowodzimy analogicznie, że zbiór $\bigcup_{\gamma \leq \alpha} G_\gamma \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\gamma\}$ należy do ideału $\mathfrak{J}$ jako przeliczalna suma zbiorów należących do ideału $\mathfrak{J}$ (korzystamy tu z CH). Ponieważ zbiór K nie należy do $\mathfrak{J}$, więc $K - (\bigcup_{\gamma \leq \alpha} G_\gamma \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\gamma\})$ jest niepusty. Bierzemy zbiór $A = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \{x_\alpha\}$. A jest nieprzeliczalny, bo gdy $\alpha \neq \beta$, to $x_\alpha \neq x_\beta$. Sprawdzamy, że A jest $\mathfrak{J}$-zbiorem Łuzina. Jeśli F jest zbiorem należącym do ideału $\mathfrak{J}$, to istnieje zbiór G_α taki, że $F \subseteq G_\alpha$. Ponieważ dla każdego $\gamma \geq \alpha$, $x_\gamma \notin G_\alpha$, więc $G_\alpha \cap A \subseteq \bigcup_{\gamma < \alpha} \{x_\gamma\}$. Zatem zbiór $F \cap A$ jako podzbiór $G_\alpha \cap A$ jest przeliczalny.

Bierzemy podzbiór $\mathfrak{J}$-mierzalny M zbioru A. Musimy pokazać, że jest on przeliczalny. Ponieważ M jest podzbiorem $\mathfrak{J}$-mierzalnym zbioru K, więc na mocy wniosku 2 zbiór M należy do ideału $\mathfrak{J}$. Ponieważ A jest $\mathfrak{J}$-zbiorem Łuzina i $M = M \cap A$, więc M jest zbiorem przeliczalnym

DEFINICJA 4. Funkcja $f: R \rightarrow R$ jest borelowska, wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy zbiorów otwartych są zbiorami borelowskimi.

DEFINICJA 5. Funkcja $f: R \rightarrow R$ jest I klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy zbiorów otwartych są zbiorami typu F_σ .

DEFINICJA 6. Funkcja $f:R \to R$ jest II klasy Baire'a, wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy zbiorów otwartych są zbiorami typu $G_{\delta\sigma}$.

TWIERDZENIE 4. Dla każdego ideału borelowskiego istnieje nieborelowska funkcja $f:R \to R$ taka, że dla każdego zbioru I należącego do $\mathfrak{J}$, funkcja f/I jest II klasy Baire'a.

D o w ó d. Weźmy za f funkcję charakterystyczna na zbiorze A taką że

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ dla } x=A,\\ 0 \text{ dla } x\neq A.\end{cases}$$

Wtedy f spełnia warunki naszego twierdzenia ponieważ:

(1) Funkcja f jest nieborelowska.

Załóżmy, że funkcja f jest borelowska. Wówczas przeciwobrazem odcinka $|0,2|$ przy odwzorowaniu f jest zbiór A, który na mocy TW.3 jest nieborelowski co prowadzi do sprzeczności z założeniem, że funkcja f jest borelowska. Stąd otrzymujemy 1.

(2) Dla dowolnego zbioru I należącego do $\mathfrak{J}$ funkcja f/I jest II klasy Baire'a.

$$f/_I(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } x\in A\cap I,\\ 0 & \text{dla } x\in I-A.\end{cases}$$

Zauważmy, że

$(f/_I)^{-1}(1)= A\cap I$ jest zbiorem przeliczalnym, a więc typu F_σ,

$(f/_I)^{-1}(0)= I - A - I\cap(R-A) = I\cap[R-(A\cap I)]$ jest zbiorem typu G_δ w I. Stąd otrzymujemy (2).

Na mocy punktów (1),(2) ustalona funkcja spełnia warunki twierdzenia.

TWIERDZENIE 5.

a) Jeśli $\mathfrak{J}\subseteq P(R)$ jest σ-ideałem borelowskim, $H=\{f_\gamma : R \xrightarrow[\text{na}]{1-1} R \mid \gamma<\omega_1\}$, to istnieje zbiór E mocy continuum taki, że
E nie należy do $\mathfrak{J}$, R-E nie należy do $\mathfrak{J}$ oraz dla każdego $\gamma<\omega_1$ zbiór $f_\gamma(E)\Delta E$ jest przeliczalny.

b) Ponadto, jeśli założymy, że dla każdego $\gamma < \omega_1$, funkcja f_γ spełnia warunek : $A \in \mathcal{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(A) \in \mathcal{J}$, to zbiór E jest $\mathcal{J}$-zbiorem Łuzina.

D o w ó d. Niech $\{C_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ będzie ciągiem wszystkich zbiorów z rodziny $\mathcal{B} \cap \mathcal{J}$, a $\{r_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ będzie ciągiem wszystkich liczb rzeczywistych.

Dla każdego $0 \leq \gamma < \omega_1$ definiujemy grupę przekształceń $G_\gamma = \langle \{f_\xi \mid \xi \leq \gamma\} \rangle$. Zauważmy, że G_γ jest przeliczalny dla $0 \leq \gamma < \omega_1$ oraz, że jeśli $f \in G_\gamma$, to f jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

Tworzymy indukcyjnie ciągi $\{x_\gamma \mid \gamma < \omega_1\}$, $\{y_\gamma \mid \gamma < \omega_1\}$ w następujący sposób: niech $x_0 = r_0$, $E_0 = \{f(x_0) \mid f \in G_0\}$, $y_0 \in R - E_0$ oraz $F_0 = \{f(y_0) \mid f \in G_0\}$. Załóżmy, że x_β, y_β są określone dla wszystkich $\beta < \gamma$.

Określamy wtedy zbiór $B_\gamma = \{f(z) \mid z \in \{x_\beta \mid \beta < \gamma\} \cup \{y_\beta \mid \beta < \gamma\}, f \in G_\gamma\}$. Zauważmy, że zbiór B_γ jest przeliczalny, ponieważ G_γ jest zbiorem przeliczalnym oraz zbiór $\{x_\beta \mid \beta < \gamma\} \cup \{y_\beta \mid \beta < \gamma\}$ jest przeliczalny. Niech $x_\gamma \in R - (\bigcup_{\beta < \gamma} C_\beta \cup B_\gamma)$, $E_\gamma = \{f(x_\gamma) \mid f \in G_\gamma\}$, $y_\gamma \in R - (\bigcup_{\beta < \gamma} C_\beta \cup B_\gamma \cup E_\gamma)$, $F_\gamma = \{f(y_\gamma) \mid f \in G_\gamma\}$.

Zauważmy, że $id \in G_\gamma$, zatem $\{x_\beta \mid \beta < \gamma\} \cup \{y_\beta \mid \beta < \gamma\} \in B_\gamma$.

W rezultacie $\{x_\gamma, y_\gamma\} \cap \{x_\beta, y_\beta \mid \beta < \gamma\} = \emptyset$. Podobnie, $x_\gamma \in E_\gamma$, zatem $x_\gamma \neq y_\gamma$. Definiujemy zbiory $E = \bigcup_{\beta < \omega_1} E_\beta$ oraz $F = \bigcup_{\beta < \omega_1} F_\beta$.

Zauważmy, że :

I. $E \cap F = \emptyset$ bowiem $E_\alpha \cap F_\beta = \emptyset$ dla $0 \leq \alpha, \beta < \omega_1$.

Istotnie; załóżmy, że :

a) $\alpha < \beta$. Przypuśćmy, że istnieje $x \in E_\alpha \cap F_\alpha$. Wtedy istnieją funkcje $f \in G_\alpha$ i $g \in G_\beta$ takie, że $x = f(x_\alpha) = g(y_\beta)$; zatem $g^{-1} \circ f \in G_\beta$ i $y_\beta = g^{-1} \circ f(x_\alpha) \in B_\beta$, co daje sprzeczność z wyborem y_β .

b) $\alpha > \beta$. Ten przypadek jest podobny do a) .

c) $\alpha = \beta$. Przypuśćmy, że istnieje $x \in E_\alpha \cap F_\alpha$. Wtedy istnieją f i $g \in G_\alpha$ takie, że $x = f(x_\alpha) = g(y_\alpha)$, zatem $g^{-1} \circ f \in G_\alpha$ i $y_\alpha = g^{-1} \circ f(x_\alpha)$ należy do E_α , co daje sprzeczność z wyborem y_α .

II. Zbiory E i F są mocy continuum, ponieważ zbiór $\{x_\gamma \mid \gamma < \omega\}$ jest podzbiorem mocy continuum zbioru E. Podobnie zbiór $\{y_\gamma \mid \gamma < \omega_1\}$ jest podzbiorem mocy continuum zbioru F.

III. Zbiory $E, F \notin \mathcal{J}$. Istotnie, gdyby $E \in \mathcal{J}$, to istniałaby liczba porządkowa $\alpha < \omega_1$ taka, że $E \subseteq C_\alpha$, a to jest niemożliwe, gdyż $x_{\alpha+1} \in E \setminus C_\alpha$. Stąd wynika, że $R - R \notin \mathcal{J}$.

IV. Jeśli $\beta < \alpha$, to $f_\beta(E_\alpha) = E_\alpha$. Rzeczywiście, jeśli $x \in f_\beta(E_\alpha)$, to istnieje $f \in G_\alpha$ takie, że $x = f_\beta \circ f(x_\alpha)$. Ponieważ $f_\beta \circ f \in G_\alpha$, więc $x \in E_\alpha$. Załóżmy teraz, że $x \in E_\alpha$. Wtedy istnieje $f \in G_\alpha$ takie, że $x = f(x_\alpha)$ i $f_\beta^{-1} \circ f \in G_\alpha$. Zatem $f_\beta^{-1} \circ f(x_\alpha) \in E_\alpha$ oraz $x = f_\beta \circ f_\beta^{-1} \circ f(x_\alpha) \in f_\beta(E_\alpha)$.

Ponieważ dla dowolnego $0 \le \gamma < \omega_1$ zbiór $f_\gamma(E) \,\Delta\, E = \bigcup_{\beta<\omega_1} f_\gamma(E_\beta) \,\Delta \bigcup_{\beta<\omega_1} E_\beta \subseteq \bigcup_{\beta \le \gamma} (f_\gamma(E_\beta) \cup E_\beta)$.

Ponieważ dla każdego $\beta \le \gamma$ zbiory E_β, $f_\gamma(E_\beta)$ są przeliczalne, więc $\bigcup_{\beta \le \gamma} (f_\gamma(E_\beta) \cup E_\beta)$ jest zbiorem przeliczalnym.

b) Punkt (b) jest nieznaczną modyfikacją punktu (a). W tym przypadku ciągi x_γ i y_γ należy definiować w następujący sposób: $x_\gamma \in R - (\bigcup_{\beta<\gamma} \bigcup_{f \in G_\gamma} f(C_\beta) \cup B_\gamma)$, $y_\gamma \in R - \bigcup_{\beta<\gamma} \bigcup_{f \in G_\gamma} f(C_\beta) \cup B_\gamma \cup F_\gamma)$.

Zbiory E_γ, F_γ i B_γ zdefiniowane są tak samo, jak w punkcie (a). Wtedy zbiory E i F są $\mathcal{J}$-zbiorami Łuzina. Istotnie, jeśli $A \in \mathcal{J}$, to istnieje liczba porządkowa $\alpha < \omega_1$ taka, że $A \subset C_\alpha$. Zauważmy, że $C_\alpha \cap E \subset \bigcup_{\gamma<\alpha} (C_\alpha \cap E_\gamma)$. Faktycznie, jeśli $x \in E_\gamma$, to istnieje $f \in G_\gamma$ takie, że $x = f(x_\gamma)$. Gdyby $x \in C_\alpha$ dla pewnego $\alpha < \gamma$, to $x_\gamma \in f^{-1}(C_\alpha)$ i $f^{-1} \in G_\gamma$, co jest sprzeczne z wyborem punktu x_γ.

WNIOSEK (Sierpiński).

I. Jeśli $\mathcal{J}$ jest ideałem zbiorów miary Lebesgue'a zero, to E jest zbiorem pierwszej kategorii.

II. Jeśli $\mathcal{J}$ jest ideałem zbiorów pierwszej kategorii, to E jest zbiorem miary Lebesgue'a zero [3].

LITERATURA

[1] Balcerzak M., Klasyfikacja ideałów na prostej, praca doktorska, Uniwersytet Łódzki, Łódź 1982

[2] Kuratowski K., Mostowski A., Teoria mnogości, Warszawa 1978

[3] Oxtoby J., Miera i kategoria (po rosyjsku), Moskwa 1974
[4] Bhaskara Rao K.P.S., Rao B.C., Borel spaces, Dissertationes Mathematicae, CXC (1981)

SUMMARY

If $\mathcal{J} \subseteq 2^R$ is a Borel ideal then the following theorems hold (CH is assumed).

1. There exists a partition K, L of R such that if a set F is $\mathcal{J}$-measurable and $F \notin \mathcal{J}$, then $F \cap L \neq \emptyset$ and $F \cap K \neq \emptyset$.

2. There exists a $\mathcal{J}$-Lusin set i.e. a set of cardinality of continuum which meets every set $A \in \mathcal{J}$ in a set of cardinality less than continuum.

3. There is a non-borel function $f: R \to R$ such that $f \mid A$ is of the second class of Baire for every set $A \in \mathcal{J}$.

4. If H is a family of functions $H = \{f_\gamma : R \xrightarrow[\text{on}]{1-1} R, \gamma < \omega_1\}$ then there is a set E of cardinality of continuum such that $E \in \mathcal{J}$, $R - E \notin \mathcal{J}$ and $f_\gamma(E) \Delta E$ is countable for every $\gamma < \omega_1$.

The results of this paper were presented on the meeungs of Union of Students of Mathematics.