ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ w BYDGOSZCZY

Problemy Matematyczne 1987 z. 9

ZBIGNIEW GRANDE, EWA STROŃSKA

WSP w Bydgoszczy

SUR LA MESURABILITÉ DE FONCTIONS QUASI-CONTINUES

Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique avec une topologie $\mathcal{T}$ et R l'espace des nombre réels avec la topologie euclidienne. Si A est une famille de fonctions $f : X \to R$, alors $S(A)$ désigne le plus petit corps d'ensembles de l'espace X tel que toute fonction de la famille A est mesurable par rapport au corps $S(A)$. Deux remarques suivantes sont évidentes :

Remarque 1. Si $A_1 \subset A_2$, on a $S(A_1) \subset S(A_2)$,

Remarque 2. Si $C(X, \mathcal{T})$ est la famille de toutes les fonctions $\mathcal{T}$ continues $f : X \to R$, alors $S(C(X, \mathcal{T})) + B(\mathcal{T}_f)$, où $\mathcal{T}_f = \{U \in \mathcal{T}$; il existe une fonction $\mathcal{T}$ continue $f : X \to R$ et un ensemble V ouvert dans R tels que $U = f^{-1}(V)\}$

et $B(\mathcal{T}_f)$ désigne le plus petit corps d'ensembles de l'espace X contenant $\mathcal{T}_f$.

Demontrons maintenant un exemple, oú $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_f$ et $B(\mathcal{T}) \neq B(\mathcal{T}_f)$

Exemple 1. Soient $X = R$ et $\mathcal{T}$ la famille de tous les ensembles de la forme $U_2 = U_1 - V_1$, où U_1 est ouvert dans R ; et V_1 est de première catégorie dans R. Puisque toute fonction $f : X \to R$ continue par rapport à $\mathcal{T}$ est aussi continue par rapport à la topologie euclidienne dans R, $\mathcal{T}_f$ est donc la topologie euclidienne dans R et $\mathcal{T} \supsetneq \mathcal{T}_f$. Il en resulte que $B(\mathcal{T}_f)$ est la famille des ensembles boreliens dans R. Cependant $B(\mathcal{T})$ est la famille de tous les ensembles ayant la propriété de Baire dans R est $B(\mathcal{T}) \supsetneq B(\mathcal{T}_f)$.

Rappelons maintenant la définition suivante:

Definition 1. Une fonction $f: X \rightarrow R$ est dite $\mathcal{T}$ quasi--continue ($\mathcal{T}$ cliquée) au point $x \in X$ lorsqu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entourage ouvert $U \in \mathcal{T}$ du point x un ensemble nonvide $V \subset U$, $V \in \mathcal{T}$ tel que

$$|f(u) - f(x)| < \varepsilon \text{ pour tout } u \in V \quad (\sup_V f \leq \varepsilon).$$

Désignons par $Q(X, \mathcal{T})(C_q(X, \mathcal{T}))$ la famille des fonctions $f : X \rightarrow R$ $\mathcal{T}$ quasi-continues ($\mathcal{T}$ cliquées) en tout point $x \in X$. Évidemment toute fonction $f : X \rightarrow R$ $\mathcal{T}$ continue au point $x \in X$ est aussi $\mathcal{T}$ quasi-continue en ce point x et toute fonction $f: X \rightarrow R$ $\mathcal{T}$ quasi-continue au point x est également $\mathcal{T}$ cliquée au point x,

Remarque 3. Toute fonction $\mathcal{T}$ cliquée $f : X \rightarrow R$ a la propriété de Baire.

Preuve. Puisque l'ensemble des points de $\mathcal{T}$ discontinuité de la fonction cliquée f est de première catégerie (v. [8] et v. [4]), f a la propriété de Baire.

Théorème 1. $S(C_q(X, \mathcal{T}))$ est la famille des ensembles avec la propriété de Baire.

Preuve. Puisque les fonctions caracteristiques de tous les ensembles ouverts et de tous les ensembles non denses sont cliquées, $S(C_q(X, \mathcal{T}))$ contient donc $\mathcal{T}$ et tous les ensembles

de premiere catégorie, d'ou il vient que tout ensemble avec la propriété de Baire appartient à $S(C_q(X, \mathcal{T}))$.
L'inclusion inverse résulte de la remarque 3.

Théorème 2. Pour que toute fonction $f : X \to R$ ayant la propriété de Baire soint $\mathcal{T}$ cliquée, il faut et il suffit que tout ensemble de première catégorie dans X soit nondense.

Preuve. Nécessité. S'il existe un ensemble $A \subset X$ de première catégorie qui n'est pas nondense, il existe un ensemble nonvide $U \in \mathcal{T}$ tel que $U \subset \mathrm{Cl}\, A$ ($\mathrm{Cl}\, A$ désigne la fermeture de l'ensemble A). On peut écrire $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, où tous les ensembles A_n $(n=1,2,\dots)$ sont nondenses, nonvides et disjoints deux à deux.
La fonction

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{lorsque} \quad x \in A_n \quad (n=1,2,\dots) \\ 0 & \text{lorsque} \quad x \in X - A \end{cases}$$

a la propriété de Baire, mais elle n'est $\mathcal{T}$ cliquée en aucun point de l'ensemble U.

Suiffisance. Soit $f : X \to R$ une fonction ayant la propriété de Baire. Fixons le point x, le nombre $\varepsilon > 0$ et l'entourage ouvert $U \in \mathcal{T}$ du point x. Puisque tout ensemble de première catégorie est nondense et U est ouvert et nonvide, U est de deuxième catégorie. Posons, pour $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$A_k = \left\{ x \in U \ ; \ \frac{k}{2}\varepsilon \leq f(x) < \frac{k+1}{2}\varepsilon \right\}.$$

Remarquons que tout ensemble A_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ a la propriété de Baire et $U = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} A_k$. Il existe donc un indice

k_o tel que A_{k_o} est de deuxième catégorie. On a $A_{k_o} = V \triangle Z$ où V est ouvert et Z est de première catégorie. Puisque Z est nondense et A_{k_o} est de deuxième catégorie, l'ensemble $P = V - \mathrm{Cl}\, Z$ est ouvert et nonvide. Mais $P \subset A_{k_o} \subset U$, on a donc $\operatorname{osc}_P f \leq \varepsilon$ et la preuve est achevée.

Corollaire 1. Si $\mathcal{T}$ est une topologie compatible avec une mesure μ dans X (v. [12]), alors une fonction $f : X \longrightarrow R$ est $\mathcal{T}$ cliquée si et seulement si elle est μ mesurable.

Corollaire 2. (v. [2], th. 1). Si $X = R$ et $\mathcal{T}$ est la topologie de densité, alors une forction $f : X \longrightarrow R$ est $\mathcal{T}$ cliquée si et seulement si f est mesurable (L) (au sens de Lebesque).

Théoreme 3. Si (X, ϱ) est un espace métrique avec la métrique ϱ, alors $S(Q(X, \varrho))$ est la famille de tous les ensembles avec la propriété de Baire.

Preuve. Soit $U \subset X$ un ensemble ouvert. La fonction

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, X - U)$$

(la distance du point x et de l'ensemble fermé $X - U$) est continue et $U = f^{-1}((0, \infty))$. Il en résulte que

$$U \in S(C(X)) \subset S(Q(X)) .$$

Soit maintenant $A \subset X$ un ensemble nonvide et nondense. Rangeons tous les élements de l'ensemble $\mathrm{Cl}\, A$ en une suite transfinie $(x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots, \alpha < \alpha_0)$

Si $K(x_1, 1)$ est la sphère ouverte de centre x_1 et de rayon 1, il existe des points $y_{11}^{(1)}, y_{12}^{(1)} \in K(x_1, 1) - \mathrm{Cl}\, A$ et tels que $y_{11}^{(1)} \neq y_{12}^{(1)}$. Il existe aussi deux nombres positifs $r_{11}^{(1)}$, $r_{12}^{(1)}$ tels que

$$\bar{K}(y_{11}^{(1)}, r_{11}^{(1)}) \cap \bar{K}(y_{12}^{(1)}, r_{12}^{(1)}) = \emptyset$$

($\bar{K}$ (a, r) désigne la sphère fermée de centre a et de rayon r)

et

$$\bar{K}(y_{11}^{(1)}, r_{11}^{(1)}) \cup \bar{K}(y_{12}^{(1)}, r_{12}^{(1)}) \subset K(x_1, 1) - \mathrm{Cl}\ A .$$

Soit $\alpha < \alpha_o$ un nombre ordinal tel que $1 < \alpha$.

Si $K(x_\alpha, 3)$ est disjointe avec toute sphère $K(x_\beta, 3)$ telle que $\beta < \alpha$ et qu'il existe des points $y_{t_\beta 1}^{(1)}$, $y_{t_\beta 2}^{(1)} \in K(x_\beta, 1) -$ $-\mathrm{Cl}\ A$, fixons deux points $y_{t_\alpha 1}^{(1)}, y_{t_\alpha 2}^{(1)} \in K(x_{t_\alpha}, 1) - \mathrm{Cl}\ A$ tels que $y_{t_\alpha 1}^{(1)} = y_{t_\alpha 2}^{(1)}$.

Il existe alors deux nombres positifs $r_{t_\alpha 1}^{(1)}$, $r_{t_\alpha 2}^{(1)}$ tels que

$$\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(1)}, r_{t_\alpha 1}^{(1)}) \cap \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(1)}, r_{t_\alpha 2}^{(1)}) = \emptyset$$

et

$$K(y_{t_\alpha 1}^{(1)}, r_{t_\alpha 1}^{(1)}) \cup K(y_{t_\alpha 2}^{(1)}, r_{t_\alpha 2}^{(1)}) \subset K(x_\alpha, 1) - \mathrm{Cl}\ A.$$

Remarquons que l'ensemble $\bigcup_{\alpha < \alpha_o} (\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(1)}, r_{t_\alpha 1}^{(1)}) \cup \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(1)}, r_{t_\alpha 2}^{(1)}))$ ne possède aucun point limite n'appartenant à cette union $\bigcup_{\alpha < \alpha_o} (\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(1)}, r_{t_\alpha 1}^{(1)}) \cup \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(1)}, r_{t_\alpha 2}^{(1)}))$ et aucun point

$$x \in \bar{K}_\beta(y_{t_\alpha i}^{(1)}, r_{t_\alpha i}^{(1)}) \quad (\beta < \alpha_o \quad \text{et} \quad i = 1,2)$$

n'est aucun point limit de l'ensemble

$$\bigcup_{\alpha < \alpha_o} ((\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(1)}, r_{t_\alpha 1}^{(1)}) \cup \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(1)}, r_{t_\alpha 2}^{(1)})) - \bar{K}(y_{t_\beta i}^{(1)}, r_{t_\beta i}^{(1)})).$$

En effet, si x serait tel point, alors il existerait des indices ordinaux $\beta, \gamma < \alpha_0$ tels que $\beta \neq \gamma$ et $\bar{K}(y^{(1)}_{t_\beta i_1}, r^{(1)}_{t_\beta i_1}) \cap K(x, \frac{1}{4}) \neq \emptyset$ et $\bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha i_2}, r^{(1)}_{t_\alpha i_2}) \cap$ $\cap K(x, \frac{1}{4}) \neq \emptyset$ $(i_1, i_2 = 1$ ou bien $2)$.

Par conséquent on aurait, d'une part

$$\rho(y^{(1)}_{t_\beta i_1}, y^{(1)}_{t_\alpha i_2}) \leq \rho(y^{(1)}_{t_\beta i_1}, x) + \rho(x, y^{(1)}_{t_\alpha i_2}) \leq$$
$$\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

et d'autre part

$$\rho(x_{t_\beta}, x_{t_\alpha}) \leq \rho(x_{t_\beta}, y^{(1)}_{t_\alpha i_1}) + \rho(y^{(1)}_{t_\beta i_1}, y^{(1)}_{t_\alpha i_2}) +$$
$$+ \rho(y^{(1)}_{t_\alpha i_2}, x_{t_\alpha}) \leq 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{2} < 3 \ ,$$

ce qui entraîne la contradiction.

Puisque l'ensemble Cl A est nondense, il existe deux points

$$y^{(2)}_{11}, y^{(2)}_{12} \in K(x_1, \tfrac{1}{2}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{\alpha < \alpha_0} (\bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 1}, r^{(1)}_{t_\alpha 1}) \cup$$
$$\cup \bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 2}, r^{(1)}_{t_\alpha 2}))$$

et deux nombres positifs $r^{(2)}_{11}$, $r^{(2)}_{12}$ tels que $y^{(2)}_{11} \neq y^{(2)}_{12}$ et

$$\bar{K}(y^{(2)}_{11}, r^{(2)}_{11}) \cap \bar{K}(y^{(2)}_{12}, r^{(2)}_{12}) \neq \emptyset$$

et

$$\bar{K}(y^{(2)}_{11}, r^{(2)}_{11}) \cup \bar{K}(y^{(2)}_{12}, r^{(2)}_{12}) \subset K(x_1, \tfrac{1}{2}) - \mathrm{Cl}\, A -$$
$$- \bigcup_{\alpha < \alpha_0} (\bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 1}, r^{(1)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 2}, r^{(1)}_{t_\alpha 2}))$$

Fixons un nombre ordinal $\alpha < \alpha_o$ $(\alpha > 1)$. Si la sphère $K(x_\alpha, \frac{1}{2})$ est disjointe avec toute sphère $K(x_\beta, \frac{1}{2})$ telle que $\beta < \alpha$ et qu'il existe des points

$$y^{(2)}_{t_\beta 1}, y^{(2)}_{t_\beta 2} \in K(x_\alpha, \tfrac{1}{2}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{\alpha < \alpha_o} (\bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 1}, r^{(1)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 2}, r^{(1)}_{t_\alpha 2})),$$

il existe des points

$$y^{(2)}_{t_\alpha 1}, y^{(2)}_{t_\alpha 2} \in K(x_\alpha, \tfrac{1}{2}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{\alpha < \alpha_o} (\bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 1}, r^{(1)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 2}, r^{(1)}_{t_\alpha 2}))$$

et des nombres positifs $r^{(2)}_{t_\alpha 1}, r^{(2)}_{t_\alpha 2}$ tels que $y^{(2)}_{t_\alpha 1} \neq y^{(2)}_{t_\alpha 2}$

et

$$\bar{K}(y^{(2)}_{t_\alpha 1}, r^{(2)}_{t_\alpha 1}) \cap \bar{K}(y^{(2)}_{t_\alpha 2}, r^{(2)}_{t_\alpha 2}) = \emptyset$$

et

$$\bar{K}(y^{(2)}_{t_\alpha 1}, r^{(2)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(2)}_{t_\alpha 2}, r^{(2)}_{t_\alpha 2}) \subset K(x_\alpha, \tfrac{1}{2}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{\alpha < \alpha_o} (\bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 1}, r^{(1)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(1)}_{t_\alpha 2}, r^{(1)}_{t_\alpha 2})).$$

En général, dans le $n^{\text{ème}}$ pas définissons pour $\alpha = \alpha_o$ des points

$$y^{(n)}_{11}, y^{(n)}_{12} \in K(x_1, \tfrac{1}{n}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{\alpha < \alpha_o} (\bar{K}(y^{(k)}_{t_\alpha 1}, r^{(k)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(k)}_{t_\alpha 2}, r^{(k)}_{t_\alpha 2}))$$

et nombres positifs $r^{(n)}_{11}, r^{(n)}_{12}$ tels que

$$\bar{K}(y^{(n)}_{11}, r^{(n)}_{11}) \cap \bar{K}(y^{(n)}_{12}, r^{(n)}_{12}) = \emptyset$$

et

$$\bar{K}(y_{11}^{(n)}, r_{11}^{(n)}) \cup \bar{K}(y_{12}^{(n)}, r_{12}^{(n)}) \subset K(x_1, \tfrac{1}{n}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{\alpha < \alpha_0} (\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(k)}, r_{t_\alpha 1}^{(k)}) \cup \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(k)}, r_{t_\alpha 2}^{(k)}))$$

et peur $\alpha > 1$ $(\alpha < \alpha_0)$ tel que la sphère $K(x_\alpha, \frac{3}{n})$ est disjente avec de toute sphère $K(x_\beta, \frac{3}{n})$ telle que $\beta < \alpha$ et qu'il existe des points

$$y_{t_\beta 1}^{(n)}, y_{t_\beta 2}^{(n)} \in K(x_\beta, \tfrac{1}{n}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{\alpha < \alpha_0} (\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(k)}, r_{t_\alpha 1}^{(k)}) \cup \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(k)}, r_{t_\alpha 2}^{(k)})),$$

des points

$$y_{t_\alpha 1}^{(n)}, y_{t_\alpha 2}^{(n)} \in K(x_\alpha, \tfrac{1}{n}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{\alpha < \alpha_0} (\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(k)}, r_{t_\alpha 1}^{(k)}) \cup \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(k)}, r_{t_\alpha 2}^{(k)}))$$

et des nombres positifs $r_{t_\alpha 1}^{(n)}, r_{t_\alpha 2}^{(n)}$ tels que

$$\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(n)}, r_{t_\alpha 1}^{(n)}) \cap \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(n)}, r_{t_\alpha 2}^{(n)}) = \emptyset$$

et

$$\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(n)}, r_{t_\alpha 1}^{(n)}) \cup \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(n)}, r_{t_\alpha 2}^{(n)}) \subset K(x_\alpha, \tfrac{1}{n}) - \mathrm{Cl}\, A - \bigcup_{k=1}^{n-1} \bigcup_{\alpha < \alpha_0} (\bar{K}(y_{t_\alpha 1}^{(k)}, r_{t_\alpha 1}^{(k)}) \cup \bar{K}(y_{t_\alpha 2}^{(k)}, r_{t_\alpha 2}^{(k)})),$$

(1) Semblablement que dans le premier pas remarquons que l'ensemble $\bigcup_{\alpha<\alpha_0}((\bar{K}\, y^{(n)}_{t_{\alpha 1}}, r^{(n)}_{t_{\alpha 1}}) \cup \bar{K}(y^{(n)}_{t_{\alpha 2}}, r^{(n)}_{t_{\alpha 2}}))$ ne possede aucun point limite n'appartenant pas a cette union $\bigcup_{\alpha<\alpha_0}(\bar{K}(y^{(n)}_{t_\alpha 1}, r^{(n)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(n)}_{t_\alpha 2}, r^{(n)}_{t_\alpha 2}))$ et aucun point

$$x \in \bar{K}\,(y^{(n)}_{t_\beta i}, r^{(n)}_{t_\beta i}) \qquad (\beta<\alpha_0 \quad \text{et} \quad i=1,2\ )$$

n'est acun point limite de l'ensemble

$$\bigcup_{\alpha<\alpha_0}(\bar{K}(y^{(n)}_{t_\alpha 1}, r^{(n)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(n)}_{t_\alpha 2}, r^{(n)}_{t_\alpha 2})) - K(y^{(n)}_{t_\beta i}, r^{(n)}_{t_\beta i})$$

et si qu'une suite de points

$$u_k \in \bar{K}(y^{(n_k)}_{t_{\alpha_k} i(k)}, r^{(n_k)}_{t_{\alpha_k} i(k)})$$

($\alpha_{k_1} \neq \alpha_{k_2}$ lorsque $k_1 \neq k_2$ et $i(k) = 1$ ou bien 2) est convergente vers un point x, alors $x \in \mathrm{Cl}\ A$.

(2) $$\mathrm{Cl}\ A \subset \mathrm{Cl}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\ \bigcup_{\alpha<\alpha_0} \bar{K}(y^{(n)}_{t_\alpha 1}, r^{(n)}_{t_\alpha 1})\Big) \cap$$

$$\cap\ \mathrm{Cl}\ \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\ \bigcup_{\alpha<\alpha_0} \bar{K}(y^{(n)}_{t_\alpha 2}, r^{(n)}_{t_\alpha 2})\Big).$$

En effet, si $x_\alpha \in \mathrm{Cl}\ A$ et U est un entourage ouvert du point x_α, il existe un indice naturel k tel que $\bar{K}(x_\alpha, \frac{8}{k}) \subset U$.

S'il existe des points $y^{(k)}_{t_\alpha 1}, y^{(k)}_{t_\alpha 2} \in K(x_\alpha, \frac{8}{k})$, on a

$$\bar{K}(y^{(k)}_{t_\alpha 1}, r^{(k)}_{t_\alpha 1}) \cup \bar{K}(y^{(k)}_{t_\alpha 2}, r^{(k)}_{t_\alpha 2}) \subset K(x_\alpha, \frac{8}{k}) \subset U.$$

Dans le cas contraire il existe $\beta < \alpha$ pour lequel il existe des points $y^{(k)}_{t_\beta 1}$, $y^{(k)}_{t_\beta 2} \in K(x_\beta , \frac{1}{k})$ et tel que $K(x_\alpha , \frac{3}{k}) \cap$ $\cap K(x_\beta , \frac{3}{k}) \neq \emptyset$. Soit u un point $K(x_\alpha , \frac{3}{k}) \cap K(x_\beta , \frac{3}{k})$. Si

$$x \in \bar{K}(y^{(k)}_{t_\beta 1}, r^{(k)}_{t_\beta 1}) \cup \bar{K}(y^{(k)}_{t_\beta 2} , r^{(k)}_{t_\beta 2}) \subset K(x_\beta , \frac{1}{k}) .$$

on a

$$\varrho(x, x_\alpha) \leq \varrho(x, x_\beta) + \varrho(x_\beta , u) + \varrho(u, x_\alpha) <$$

$$< \frac{1}{k} + \frac{3}{k} \ \frac{3}{k} = \frac{7}{k} < \frac{8}{k}$$

Il en résulte que $x \in U$ et (2) est prouvé .

Soit

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \in \bigcup\limits_n \bigcup\limits_{\alpha < \alpha_0} \bar{K}(y^{(n)}_{t_\alpha 1}, r^{(n)}_{t_\alpha 1}) \\ 1 & \text{lorsque } x \in \bigcup\limits_n \bigcup\limits_{\alpha < \alpha_0} \bar{K}(y^{(n)}_{t_\alpha 2}, r^{(n)}_{t_\alpha 2}) . \end{cases}$$

Il résulte de (1) que la fonction f_1 est continue et on peut la prolonger à la fonction continue $f_2 : (X - Cl\ A) \to [0,1]$.

Posons

$$f(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{pour } x \in X - Cl\ A \\ 1 & \text{pour } x \in Cl\ A - A \\ 0 & \text{pour } x \in A \end{cases}$$

La fonction f est ϱ quasi-continue. En effet, la ϱ quasi-continuité de la fonction f en tout point $x \in X - Cl\ A$ résulte directement de la continuité de la fonction f. La ϱ quasi-continuité de la fonction f en tout point $x \in Cl\ A$ résulte aussi des définitions des fonctions f_1 et f et de (2). Puisque, de plus , $A = f^{-1}(0) \cap Cl\ A$, $A \in S(Q(X, \varrho))$. Il en résulte que $S(Q(X, \varrho))$ continent tous les ensembles ouverts et tous les ensembles non-denses, donc et tous les ensembles ayant la propriété de Baire. D'autre part, toute fonction quasi--continue est cliquée (donc elle a la propriété de Baire), donc $S(Q(X,\mathcal{G}))$ est la famille des ensembles avec la propriété de Baire.

La preuve est donc achevée.

Remarque 4. Le théorème 3 ne reste pas vrai dans le cas général où X est un espace topologique. Par exemple, si $X = R$ et $\mathcal{T}$ est la famille composée de l'ensemble vide et des ensembles de la forme $R - A$ où A est dénombrable, alors $Q(X,\mathcal{T})$ est la famille des fonctions constantes (donc $S(Q(X,\mathcal{T})) = \{R, \emptyset\}$), mais la famille des ensembles ayant la propriété de Baire se compose des ensembles de $\mathcal{T}$ et des ensembles dénombrables. Remarquons encore que dans cet exemple $S(C_q(X,\mathcal{T}))$ est la famille des ensembles ayant la propriété de Baire.

Problème 1. Le théorème 3 reste-t-il vrai dans le cas où X est un espace de Tichonoff (normal) ?

Problème 2. Le théorème 3 reste-t-il vrai dans le cas où X est un espace topologique tel que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$?

Examinons maintenant la topologie de densité $\mathcal{T}_d$ dans R. Nous avons déjà remarqué dans le Corollaire 1 qu'une fonction $f : R \to R$ est $\mathcal{T}_d$ cliquée si et seulement si elle est mesurable (L). Il en résulte que $S(C_q(R,\mathcal{T}_d))$ est la famille des ensembles mesurables (L). Toute fonction $f : R \to R$ $\mathcal{T}_d$ continue (approximativement continue) est de première classe de Baire, donc $S(C(R,\mathcal{T}_d))$ est la famille des ensembles boréliens dans R (relativement à la topologie euclidienne). On a donc $\mathcal{T}_d \not\subset S(C_d(R))$.

Démontrons encore que le théorème 3 reste vrai dans le cas de la topologie de densité.

Théorème 4. $S(Q(R, \mathcal{T}_d))$ est la famille des ensembles mesurables (L) dans R.

Preuve . L'ensemble nonvide $A \in \mathcal{T}_d$ si et seulement si tout point $x \in A$ est un point de densité de l'ensemble A. Tout ensemble $A \in \mathcal{T}_d$ est mesurable (L) ([1]), donc tout ensemble $A \in \mathcal{T}_d$ est de la forme $A = B \cup C$, où B est du type F_σ et tout point $x \in B$ est un point de densité de l'ensemble B et C est de mesure (lebesquienne) zéro. L'ensemble $D \subset R$ est non-dense par rapport à $\mathcal{T}_d$ si et seulement s'il est de mesure zéro ([12]). Afin démontrer notre théorème il suffit donc de prouver que tout ensemble de mesure zéro appartient à $S(Q_d(R))$ et que tout ensemble du type F_σ qui ne se compose que de ses points de densité également appartient à $S(Q_d(R))$.

Soit B un ensemble non vide du type F_σ qui ne se compose que de ses points de densité. D'après le lemme 11 du travail [13] il existe une fonction $\mathcal{T}_d$ continue $f : R \to [0,1]$ tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \notin B$ et $f(x) > 0$ pour tout $x \in B$. On a donc $B = f^{-1}((0,\infty))$ et par conséquent $B \in S(Q_d(R, \mathcal{T}_d))$. Soit maintenant $C \subset R$ un ensemble de mesure zéro. Il existe un ensemble $E \supset C$ du type G_δ et de mesure zéro. D'après le lemme de mon article [2] il existe des ensembles mesurables $F, G \subset R - E$ tels que tout point $x \in E$ est un point de densité supérieure positive de l'ensemble F et un point de densité supérieure positive de l'ensemble G, et les ensembles F, G et $R - F - G - E$ sont de densité supérieure positive en chacun de ses points.

Posons

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \in C \cup F \\ 1 & \text{lorsque } x \in R - (C \cup F). \end{cases}$$

La fonction g est $\mathcal{T}_d$ quasi-continue. (v. [2]). Il existe aussi la fonction $h : R \to [0,1]\ \mathcal{T}_d$ continue et telle que $h(x) = 0$ pour tout $x \in E$ et $h(x) > 0$ pour tout $x \in R - E$. La fonction $k = g + h$ est $\mathcal{T}_d$ quasi-continue et $C = k^{-1}(0)$, donc $C \in S(Q(R, \mathcal{T}_d))$ et la preuve est achevée.

Dans le travail [9] O'Malley a introduit dans R la r-topologie dont une base se compose de tous les ensembles non--vides $\mathcal{T}_d$ ouverts étant à la fois du type F_σ et G_δ et la topologie p.p. qui se compose de tous les ensembles A étant $\mathcal{T}_d$ ouverts et tels que $m(A - \mathrm{Int}_e A) = 0$, où m désigne la mesure de Lebesgue dans R et $\mathrm{Int}_e A$ désigne l'intérieur euclidien (dans la topologie euclidienne $\mathcal{T}_e$) de l'ensemble A. En désignant par $\mathcal{T}_r$ la r-topologie, et par $\mathcal{T}_{pp}$ la topologie p.p. et par $\mathcal{T}_e$ la topologie euclidienne dans R, on a $\mathcal{T}_d \supsetneq \mathcal{T}_r \supsetneq \mathcal{T}_{pp} \supsetneq \mathcal{T}_e$ et la fonction $f : R \to R$ est $\mathcal{T}_{pp}$ continue si et seulement si elle est $\mathcal{T}_d$ continue et $\mathcal{T}_e$ continue presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue (v. [9] et [10]).

Remarque 5. Remarquons d'abord que $C_q(R, \mathcal{T}_r) = C_q(R, \mathcal{T}_{pp}) = C_q(R, \mathcal{T}_e)$. En effet, si $f \in C_q(R, \mathcal{T}_r)$, $x \in R$, $U \in \mathcal{T}_{pp}$ est un entourage du point x et $\varepsilon > 0$ est un nombre, on a $U \in \mathcal{T}_r$ et il existe un ensemble nonvide $V \subset U$ tel que $V \in \mathcal{T}_r$ et $\operatorname{osc}_V f \leq \varepsilon$. Mais $\mathrm{Int}_e V \neq \emptyset$ (v. [9]) et $\mathrm{Int}_e V \in \mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_{pp}$ et $\operatorname{osc}_{\mathrm{Int}_e V} f \leq \varepsilon$, d'où il vient

$f \notin C_q(R, \mathcal{T}_{pp})$. On a donc $C_q(R, \mathcal{T}_r) \subset C_q(R, \mathcal{T}_{pp})$. De même on prouve que $C_q(R, \mathcal{T}_{pp}) \subset C_q(R, \mathcal{T}_e)$. Démontrons encore que $C_q(R, \mathcal{T}_e) \subset C_q(R, \mathcal{T}_r)$. Soient $f \in C_q(R, \mathcal{T}_e)$, $x \in R$ et $U \in \mathcal{T}_r$ tel que $x \in U$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $U \in \mathcal{T}_r$, $\mathrm{Int}_e\, U \neq \emptyset$. Soit $y \in \mathrm{Int}_e\, U$ un point. La fonction $f \in C_q(R, \mathcal{T}_e)$, elle est donc cliquée au point y et il existe un ensemble $\mathcal{T}_e$ ouvort non-vide $V \subset \mathrm{Int}_e\, U \subset U$ tel que $\operatorname{osc}_V f \leq \varepsilon$.

Mais $V \subset \mathcal{T}_e \subset \mathcal{T}_r$, on a donc $C_q(R, \mathcal{T}_e) \subset C_q(R, \mathcal{T}_r)$.

Remarque 6. $Q(R, \mathcal{T}_r) \subset Q(R, \mathcal{T}_{pp}) \subsetneqq Q(R, \mathcal{T}_e)(*)$. En effet, les inclusions $(*)$ on obtient de même que dans la remarque 5. Si des nombres $\alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \ldots > 0$ sont tels que $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$ et 0 est un point de dispersion de l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\beta_n, \alpha_n)$ alors la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ lorsque } x \in \bigcup_n (\alpha_n, \beta_n) \cup \{0\} \\ 1 \text{ dans le cas resté} \end{cases}$$

est $\mathcal{T}_e$ quasi-continue, mais elle nest pas $\mathcal{T}_{pp}$ quasi-continue au point 0.

Probleme 3. Existe-t-il une fonction $f \in Q(R, \mathcal{T}_r) - Q(R, \mathcal{T}_{pp})$?

Remarque 7. Les familles des ensembles ayant la propriété de Baire dans les topologies $\mathcal{T}_e$, $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_{pp}$ sont les mêmes. En effet, les familles des ensembles nondenses dans les topologies $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$ sont les memes (v. [9]). Si $A \subset R$ est un ensemble non dense dans $\mathcal{T}_{pp}$ et $U \in \mathcal{T}_e$ nonvide, il existe un ensemble nonvide $V \subset U - A$ tel que $V \in \mathcal{T}_{pp}$. Mais $\mathrm{Int}_e\, V \neq \emptyset$

(v. [9]) et $\mathrm{Int}_e\ V \in \mathcal{T}_e$, donc A est nondense aussi dans $\mathcal{T}_e$. De même on prouve que tout ensemble non dense dans $\mathcal{T}_r$ est aussi non dense dans $\mathcal{T}_{pp}$. Il en résulte que les familles des ensembles nondenses dans les topologie $\mathcal{T}_e$, $\mathcal{T}_{pp}$ et $\mathcal{T}_r$ respectivement sont les mêmes. On a, de plus, $\mathcal{T}_r \supset \mathcal{T}_{pp} \supset \mathcal{T}_e$ et quel que soit l'ensemble $A \in \mathcal{T}_r$, on a $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}_e A) \supset A$. Il en résulte que A est de la forme $A = B \cup C$, où $B \in \mathcal{T}_e$ et C est non dense dans $\mathcal{T}_e$ et la preuve est finie.

Problème 4. $S(Q(R, \mathcal{T}_r)) = S(Q(R, \mathcal{T}_{pp})) = S(Q(R, \mathcal{T}_e))$?

Remarque 8. Les inclusions $S(Q(R, \mathcal{T}_r)) \subset S(Q(R,\mathcal{T}_{pp})) \subset$ $\subset S(Q(R, \mathcal{T}_e))$ sont évidentes. Tous les ensembles $\mathcal{T}_e$ ouverts appartient à l'ensemble $S(Q(R, \mathcal{T}_r))$. Afin de reseudre le problème 4, il suffit donc de prouver que tous ensembles $\mathcal{T}_e$ nondenses appartient à $S(Q(R, \mathcal{T}_r))$.

Remarque 9. Dans l'article [11] O'Malley a introduit la topologie d_{xy} des ensembles mesurable (L) $A \subset R^2$ tels que toutes les sections

$$A_x = \{y \in R : (x,y) \in A\} \quad \text{et} \quad A^y = \{x \in R ; (x,y) \in A\}$$

sont $\mathcal{T}_d$ ouverts. Dans [3] on prouve qu'une fonction $f: R^2 \to R$ est d_{xy} oliquée si et seulement si elle est mesurable (L). Il en résulte que $S(C_q(R^2, d_{xy}))$ est la famille des ensembles mesurables (L) dans R^2.

Problème 5. $S(Q(R^2, d_{xy})) = S(C_q(R^2, d_{xy}))$?

Remarque 10. Si A est la famille de toutes les fonctions $f : R \to R$ continues presque partout (relativement à la mesure de Lebesgue), alors $S(A)$ est la famille de tous les ensembles $A \subset R$ pour lesquels il existe un ensemble borelien $B \subset R$

et un ensemble $C \subset R$ du type F_σ et de mesure zéro tels que $A = B \cup D$, où $D \subset C$, (v. [5])

Remarque 11. Étant donnée une famille A de fonctions, désignons par $B(A)$ la plus petite famille de fonctions telle que $A \subset B(A)$ et telle que la condition suivante est satisfaite:

$$f_n \in B(A) \quad \text{pour} \quad n=1,2,\ldots \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} f_n = f \Rightarrow f \in B(A).$$

Dans les exemples procédés nous avons :

$$S(A) = S_1(A) = \{A;\ \text{il existe } f \in B(A) \text{ et un ensemble } V \in \mathcal{T}_e \text{ tels que } A = f^{-1}(V)\}.$$

Considérons l'exemple suivant.

Soit A la famille de toutes les fonctions décroissantes $f : R \to R$. Alors on a : $A = B(A)$ et $S(A)$ est la famille des ensembles boréliens dans R. Donc $S(A) \neq S_1(A)$ (comparer [6] et [7]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bruckner A.M., Differentiation of real functions, Lectures Notes Math., 659 (1978), 1 - 247, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York

[2] Grande Z., Sur les fonctions approximativement quasi--continues, Revue Roum. Pures et Appliq.

[3] Grande Z., Natkaniec T., On some topologies on R^2 of O'Malley's type

[4] Marcus S., Sur les fonctions quasi-continues au sens de S. Kempisty, Coll. Math. 8 (1961), 47-53

[5] Mauldin R.D., The Baire order the functions continuous almost everywhere, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975),

p. 371 - 377

[6] Mrówka S., Characterization of classes of functions by Lebesgue sets, Czech. Math. J. 19 (1969), 738 - 744

[7] Mrówka S., On some approximation theorems, Nieuw Archief for Wiskunde 3 (1968), 94-111

[8] Neubrunnova A., On quasi-continuous and cliquish functions Časopis Pest. Math. 99 (1974), 109 - 114

[9] O'Malley R., Approximately differentiable functions : the r-topology, Pacific J. Math. 72 (1978), 207 - 222

[10] O'Malley R., Approximately continuous functions which are continuous almost everywhere, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 33 (1979), 395-402

[11] O'Malley R., Separate approximate continuity and strong approximate continuity, Colloquium Math. 50 (1985), 129 - - 132

[12] Oxtovy J., Measure and category, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1971

[13] Zahorski Z., Sur la première dérivée , Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 1 - 54

O MIERZALNOŚCI FUNKCJI QUASI-CIĄGŁYCH

Streszczenie

W tym artykule bada się najmniejsze σ-ciało podzbiorów przestrzeni topologicznej X, ze względu na które są mierzalne wszystkie funkcje quasi-ciągłe (klikowe) $f : X \to R$, przy czym R oznacza zbiór liczb rzeczywistych.