ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ w BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1987 z. 9

ZBIGNIEW GRANDE, EWA STROŃSKA
WSP w Bydgoszczy

SUR DES DÉRIVÉES QUASI-CONTINUES

Soit R l'ensemble des nombres réels. Une fonction $f : R \to R$ est dite quasi-continue au point $x \in R$ lorsqu'il existe pour tout nombre positif ε et pour tout entourage ouvert U du point x un ensemble ouvert, nonvide $V \subset U$ tel que

$$|f(u) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } u \in V. \quad ([4])$$

Dans l'article [3] est prouvé que la famille des fonctions ponctuellement discontinues est le plus petit espace linéaire de fonctions contenant toutes les fonctions quasi-continues. De même on peut prouver que la famille de toutes les fonctions ponctuellement discontinues de classe α de Baire ($1 \le \alpha < \Omega$) est le plus petit espace linéaire de fonctions contenant toutes les fonctions quasi-continues de classe α.

Dans cet article nous prouvons que la famille des fonctions approximativement continues est le plus petit espace linéaire des fonctions contenant toutes les fonctions à la fois quasi-continues et approximativement continues et que la famille des dérivées est le plus petit espace linéaire de fonctions contenant toutes les dérivées quasi-continues.

Puisque les familles des fonctions approximativement continues, des dérivées et des fonctions quasi-continues respectivement sent fermées par rapport à la convergence uniforme ([4] et [2]), la famille des fonctions à la fois approximativement et quasi-continues et la famille des dérivées quasi-continues sont fermées relativement à la convergence uniforme. Par conséquent elles sont fermées dans les espaces de toutes les fonctions approximativement continues et respectivement de toutes les dérivées avec la métrique de convergence uniforme.

De plus, il résulte de lemme 11 du travail [6] de Zahorski, qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction à la fois quasi-continue et approximativement continue (pour toute dérivée quasi-continue) une fonction $g : R \rightarrow [0, \varepsilon]$ approximativement continue et telle que la somme $f + g$ n'est pas quasi-continue. Donc la famille des fonctions à la fois approximativement- et quasi-continues (des dérivées quasi-continues) est un ensemble fermé et nondense dans l'espace des fonctions approximativement continues (des dérivées) avec la métrique de convergence uniforme.

Théorème 1. Soit $f : R \rightarrow R$ une fonction approximativement continue. Il existe des fonctions $g : R \rightarrow R$, $h : R \rightarrow R$ à la fois approximativement-et quasi-continues et telles que $f = g + h$.

Preuve. Soient A l'ensemble des points de continuité de la fonction f et $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres positifs tels que

$$(0) \qquad a_n > 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad \text{pour } n = 1,2,\ldots .$$

Posons pour $k = 1,2,\ldots$,

$$A_k = \{x \in R \ ; \ \operatorname{osc} f(x) \geqslant a_k\} .$$

On a $R = A \cup \bigcup_k A_k$.

Puisque f est de première classe de Baire ([1]), tous les ensembles A_k sont donc nondenses, fermés et il existe pour tout $k = 1,2,\ldots$ une suite d'ensembles fermés, disjoints deux à deux A_{kl} tels que

$$A_k - A_{k-1} = \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl} \quad \text{et} \quad \operatorname{osc}_{A_{kl}} f \le a_{k+2}$$

$(k = 2, 3,\ldots$ et $l = 1,2,\ldots)$. (v. [6])

Soit $(I_{klm})_{m=1}^{\infty}$ une famille d'intervalles fermés d'extrémités appartenant à l'ensemble A tels que :

(1) $I_{1lm} \Longrightarrow A_1$ et $I_{klm} \Longrightarrow A_{kl}$ $(k=2,3,\ldots,l=1,2,\ldots)$

c'est-à-dire $A_{kl} \subset \mathrm{Cl}\,(\bigcup_{m=1}^{\infty} I_{klm})$ (Cl désigne l'opération de fermeture) et si $x_n \in I_{klm_n}$ $(n = 1,2,\ldots$ et $m_{n_1} \ne m_{n_2}$ lorsque $n_1 \ne n_2)$ et s'il existe $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, alors $x \in A_{kl}$;

(2) $I_{klm} \subset R - A_k$ et $\operatorname{osc}_{I_{klm}} f < \frac{1}{m}$ $(k,l,m = 1,2,\ldots)$

(3) $I_{kl_1m_1} \cap I_{kl_2m_2} = \emptyset$ lorsque $l_1 \ne l_2$ ou $m_1 \ne m_2$ $(k,l_1,l_2,m_1,m_2 = 1,2,\ldots)$;

(4) $\mathrm{Cl}\,(\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_r\, I_{klm})^d \subset A_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ où X^d désigne la dérivée de l'ensemble X et $\mathrm{Fr}\, X$ désigne la frontière de l'ensemble X ;

(5) Si $k_1, k_2, l_1, l_2, m_1, m_2 = 1,2,\ldots$ et $k_1 < k_2$, on a $I_{k_1l_1m_1} \cap I_{k_2l_2m_2} = \emptyset$ ou bien $I_{k_2l_2m_2} \subset \mathrm{Int}\, I_{k_1l_1m_1}$

(Int désigne l'opération d'intérieur) ;

(6) Tout point $x \in A_k$ est un point de dispersion de l'ensemble $\bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{klm}$ $(k = 1,2,\ldots)$.

La construction de telle famille $\{I_{klm}\}_{l,m=1}^{\infty}$ $(k = 1,2,\ldots)$ satisfaisant aux conditions (1) - (5) n'est pas difficulte. Afin elle satisfasse encore à la condition (6) il suffit de choisir des intervalles I_{klm} dans les composantes ouvertes de l'ensemble $R - A_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ de façon que

$$\frac{m(I_{klm})}{\mathrm{dist}(I_{klm};A_k)} < \frac{1}{2^{l+m}} \quad (l,m = 1,2,\ldots) ,$$

où

$$\mathrm{dist}\ (I_{klm}, A_k) = \inf \{ |x - y| ; x \in I_{klm}, y \in A_k \} ,$$

Soient

$$g_{1lm} : I_{1lm} \longrightarrow R$$

des fonctions continues et telles que $g_{1lm}(x) = 0$ lorsque x est une extrémité de l'intervalle I_{1lm} $(k,l,m = 1,2,\ldots)$, et $(\pm g_{1lm} + f/I_{1lm})(I_{1lm}) \supset [-m , m]$ $(l,m = 1,2,\ldots)$.

Posons

$$f_1(x) = \begin{cases} g_{1lm}(x) \text{ lorsque } x \in I_{1lm} & (l,m = 1,2,\ldots) \\ 0 \quad \text{lorsque } x \in R - \bigcup_{l,m=1}^{\infty} I_{1lm} . \end{cases}$$

$$g_1 = f + f_1 \quad \text{et} \quad h_1 = f - f_1$$

De (1) - (6) résulte que les fonctions g_1 et h_1 sont approximativement continues partout et quasi-continues en tout point $x \in A_1 \cup A$.

Soient

$$g_{2lm} : I_{2lm} \longrightarrow [-2a_1, 2a_1] \quad (l,m = 1,2,\ldots)$$

des fonctions continues et telles que $g_{2lm}(x) = 0$ lorsque x est une extrémité de certain intervalle I_{2lm} et

$$g_{2lm}(I_{2lm}) = [-2a_1, 2a_1] .$$

Posons

$$f_2(x) = \begin{cases} g_{2lm}(x) & \text{lorsque } x \in I_{2lm} \quad (l,m = 1,2,\ldots.) \\ 0 & \text{lorsque } x \in R - \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{2lm} , \end{cases}$$

et

$$g_2 = g_1 + f_2 \quad ; \quad h_2 = h_1 - f_2 .$$

Les fonctions g_2, h_2 sont approximativement continues partout et quasi-continues en tout point $x \in A_2 \cup A$.
En général, dans le $k^{\text{ème}}$ pas nous définissons les fonctions continues $g_{klm} : I_{klm} \longrightarrow [-a_{k-2}; a_{k-2}]$ $(l,m = 1,2,\ldots)$ telles que $g_{klm}(x) = 0$ lorsque x est une extrémité de certain intervalle I_{klm} et $g_{klm}(I_{klm}) = [- a_{k-2}; a_{k-2}]$,

$$f_k(x) = \begin{cases} g_{klm}(x) & \text{lorsque } x \in I_{klm} \ (l,m=1,2,\ldots) \\ 0 & \text{lorsque } x \in R - \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} I_{klm} \end{cases}$$

et $g_k = g_{k-1} + f_k$ et $h_k = h_{k-1} - f_k$.
Les fonctions g_k et h_k sont approximativement continues partout et quasi-continues en tout point $x \in A_k \cup A$. De plus, les suites $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ et $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ sont uniformément convergentes, donc leurs limites $g = \lim\limits_{k \to \infty} g_{k/2}$ et $h = \lim\limits_{k \to \infty} h_{k/2}$ sont

les mêmes en tout point

$$x \in A \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = R .$$

Mais $g_{k/2} + h_{k/2} = f$ pour $k = 1,2,\ldots,$ on a donc

$$g + h = \lim_{k\to\infty} g_{k/2} + \lim_{k\to\infty} h_{k/2} = \lim_{k\to\infty} (g_k + h_k)/2 = f$$

et la preuve est achevée .

Théorème 2. Soit $f : R \longrightarrow R$ une fonction dérivée . Il existe des fonctions dérivées quasi-continues $g,h : R \longrightarrow R$ telles que $f = g + h$.

La preuve est la même que celui du théorème 1, mais on peut supposer que g_{1lm} sont telles que

$$\frac{\int_{I_{1lm}} |g_{1lm}(u)|\, du}{m(I_{1lm})} < \frac{1}{2^{1+m}} \operatorname{dist}(I_{1lm}, A_1)$$

$(1,m = 1,2,\ldots)$.

TRAVAUX CITÉS

[1] Bruckner A.M., Differentiation of real functions, Lectures Notes Math., 659 (1978), pp. 1-247

[2] Ewert J., Przemski M., Cliquish, lower- and upper-quasi-continuous functions, Słupskie Prace Matematyczno-Przyrodnicze 4, Słupsk (1983), pp. 3-12

[3] Grande Z., Sur les fonctions cliquish, Čas. Pest. Math. 110 (1985), pp.225-236

[4] Kempisty S., Sur les fonctions quasi-continues, Fund. Math. 19 (1932), pp.184-197

[5] Sierpiński W., Sur une propriété des ensembles F_δ liné-

aires, Fund. Math. 14 (1929), 216-220.

[6] Zahorski Z., Sur les première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), pp. 1-54

O POCHODNYCH QUASICIĄGŁYCH

Streszczenie

W tej pracy pokazujemy, że każda funkcja aproksymatywnie ciągła (pochodna) jest sumą dwóch funkcji jednocześnie aproksymatywnie - i quasi-ciągłych (pochodnych quasiciągłych).