ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ w BYDGOSZCZY

Problemy Matematyczne 1987 z. 9

ZBIGNIEW GRANDE, EWA STROŃSKA

WSP w Bydgoszczy

DEUX REMARQUES CONCERNANT LA DENSITÉ DES ENSEMBLES ET LES FONCTIONS SURPASSEMENT CONTINUES

I. Soient R l'ensemble des nombres réels et m la mesure de Lebesgue dans R.

On dit qu'une suite d'intervalles $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ (de longueur positive et finie) est convergente vers un point x, lorsque $x \in I_k$ pour tout $k = 1,2,\ldots$ et la suite de longueurs $d(I_k)$ des intervalles I_k est convergente vers 0. Étant donné un ensemble mesurable $A \subset R$ (au sens de Lebesgue) et le point x étant fixé, les bornes supérieure et inférieure respectivement de l'ensemble des nombres

$$\limsup_{k \to \infty} \frac{m(A \cap I_k)}{m(I_k)}$$

et de celui des nombres

$$\liminf_{k \to \infty} \frac{m(A \cap I_k)}{m(I_k)}$$

pour toutes les suites d'intervalles (I_k) convergentes vers x, s'appellent densités, supérieure ou inférieure respectivement de l'ensemble A au point x. Si ces deux densités, supérieure et inférieure, sont égales, leur valeur commune s'appelle densité (tout court) de cet ensemble en ce point.

Théorème 1. Soit $A \subset R$ un ensemble mesurable (au sens de Lebesgue) de mesure positive. Étant donné un nombre positif $a < m(A)$, il existe un ensemble fermé $B \subset A$ tel que $m(B) > a$ et la densité supérieure de l'ensemble B en tout point $x \in B$ est égale à 1.

Preuve. Soit b un nombre tel que $a < b < m(A)$. Il existe un ensemble fermé $C \subset A$ tel que $\infty > m(C) > b$. Désignons par C_1 l'ensemble de tous les peints $x \in C$ étant des peints de densité de l'ensemble A. On a $m(C - C_1) = 0$.
Soit S_1 la famille de tous les intervalles fermés I tels que

$$m(C \cap I) > \frac{1}{2} \quad m(I).$$

D'après le théorème de Vitali, il existe des intervalles

$$I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{1n_1} \in S_1$$

disjoints deux à deux et tels que

$$m(C \cap \bigcup_{i=1}^{n_1} I_{1i}) > b .$$

Soit S_2 la famille de tous les intervalles fermés $I \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} I_{1i}$ de longueur plus petite que $\frac{1}{2}$ et tels que

$$m(I \cap C) > (1 - \frac{1}{2^2}) \cdot m(I) .$$

De nouveau, d'après le théorème de Vitali, il existe des intervalles

$$I_{21}, I_{22}, \ldots, I_{2n_2} \in S_2$$

disjoints deux à deux et tels que

$$m(C \cap \bigcup_{i=1}^{n_2} I_{2i}) >$$

$$> \max \left[b \; ; \; m(C \cap \bigcup_{i=1}^{n_1} I_{1i}) - \frac{1}{2 \cdot 4^2} \inf \{ m(I_{1i}),\ 1 \leq i \leq n_1 \} \right].$$

En général, dans le $k^{\text{ème}}$ pas on obtient des intervalles fermés

$$I_{k1}, I_{k2}, \ldots, I_{kn_k} \in S_k$$

disjoints deux à deux, contenus dans $\bigcup_{i=1}^{n_{k-1}} I_{k-1,i}$ de longueur plus petite que $\frac{1}{k}$ et tels que

(1) $\quad m(I_{ki} \cap C) > (1 - \frac{1}{2^k}) \cdot m(I) \quad$ pour $i = 1,2,\ldots,n_k$

et

(2) $$m\,(C \cap \bigcup_{i=1}^{n_k} I_{ki}) >$$

$$> \max \left[b \; ; \; m(C \cap \bigcup_{i=1}^{n_{k-1}} I_{k-1,i}) - \frac{1}{k \cdot 4^k} \inf \{ m(I_{ji}),\ 1 \leq j \leq k-1 \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq n_j \} \right]$$

Posons

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} I_{ki} \cap C .$$

Évidemment B est un ensemble fermé et $B \subset C \subset A$.

Puisque

$$m\,(\bigcup_{i=1}^{n_k} I_{k,i} \cap C) > b \quad \text{pour} \quad k = 1,2,\ldots$$

et puisque

$$\bigcup_{u=1}^{n_1} I_{1i} \supset \bigcup_{i=1}^{n_2} I_{2i} \supset \ldots \supset \bigcup_{i=1}^{n_k} I_{k,i} \supset \ldots ,$$

on a donc

$$m(B) = \lim_{k \to \infty} m \left(\bigcup_{i=1}^{i_k} I_{k,i} \cap C \right) \geq b > a .$$

Étant donné le point $x \in B$, il existe une suite d'indices naturels $i_1(x), i_2(x),\ldots, i_n(x),\ldots$ telle que

$$\{x\}=\bigcap_{k=1}^{\infty} I_{k,i_k(x)} .$$

D'après (1) et (2), on a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m(B\cap I_{k,i_k(x)})}{m(I_{k,i_k(x)})} = 1 ,$$

ce qui termine la preuve.

II. Définition 1. On dit qu'une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $f : R \to R$ a la propriété $O(\alpha)$ ($\alpha \in (0,1]$) au point x lorsqu'il existe un ensemble mesurable $E\subset R$ contenant x et de densité α au point x et tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, la densité de l'ensemble $\{u\in E, |f(u) - f(x)|<\varepsilon\}$ existe et est égale à α .

Définition 2. Un point $x\in R$ est dit un point de Lebesgue du type α ($\alpha\in(0,1]$) de la fonction mesurable et localement intégrable $f : R \to R$ lorsqu'il existe un ensemble mesurable $E\subset R$ contenant x, de densité α au point x et tel que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(E\cap I_k)} \cdot \int_{E\cap I_k} |f(u) - f(x)|\,du = 0$$

pour toute suite d'intervalles $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ convergente vers x et telle que $m(E\cap I_k) > 0$ pour tout $k = 1,2,\ldots$.

Definition 3. On dit que la fonction mesurable et localement intégrable $f : R \to R$ a la propriété $P(\alpha)$ ($\alpha\in(0,1]$) au point x lorsqu'il existe un ensemble mesurable $E\subset R$ contenant x et de densité α au point x et tel que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} f(u)du = f(x)$$

pour toute suite d'intervalles $(I_k)_{k=1}$ convergente vers x et telle que $m(E \cap I_k) > 0$ pour tout $k = 1,2,\ldots$.

Puisque

$$\left| \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} f(u)du - f(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} f(u)du - \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} f(x)du \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} (f(u) - f(x))\, du \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{m(I_k \cap E)} \cdot \int_{E \cap I_k} |f(u) - f(x)| du$$

pour tout intervalle I_k tel que $m(I_k \cap E) > 0$ et qu'il existe $\int_{I_k} f(u)du$, on a donc le corollaire suivant :

Corollaire 1. Soit $f : R \to R$ une fonction mesurable et localement intégrable. Si x est un point de Lebesque du type α ($\alpha \in (0,1]$), alors la fonction f a la propriété $P(\alpha)$ au point x .

Théorème 2. Soit $f : R \to R$ une fonction mesurable et bornée. Pour que la fonction f possède la propriéte $O(\alpha)$ ($\alpha \in (0,1]$) au point x, il faut et il suffit que le point x soit un point de Lebesgue du type α de la fonction f .

Preuve. La nécessité. Soit E un ensemble mesurable contenant x, de densité α au point x le même que dans la définition 1. Fixons le nombre $\varepsilon > 0$.

Soit $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite d'intervalles convergente vers x.
Si M est un nombre tel que $|f(u)| \leq M$ pour tout $u \in R$ et si

$$E_{\varepsilon} = \{ u \in E \ ; \ |f(u) - f(x)| \geqslant \varepsilon \},$$

alors on a

$$\int_{E \cap I_k} |f(u) - f(u)| du = \int_{E \cap I_k} |f(u) - f(x)| du + \int_{(E - E_{\varepsilon}) \cap I_k} |f(u) - f(x)| du \leqq$$

$$\leqq 2 M m(E_{\varepsilon} \cap I_k) + \varepsilon m((E - E_{\varepsilon}) \cap I_k).$$

Puisque

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m(E_{\varepsilon} \cap I_k)}{m(I_k)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \to \infty} \frac{m(E \cap I_k)}{m(I_k)} = \alpha ,$$

on a

$$m(E \cap I_k) > \frac{\alpha}{2} m(I_k) \quad \text{pour} \quad k \geqslant k_0 ,$$

et par conséquent

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m(E_{\varepsilon} \cap I_k)}{m(E \cap I_k)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \to \infty} \frac{m((E - E_{\varepsilon}) \cap I_k)}{m(E \cap I_k)} = 1 .$$

Il en résulte

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} | f(u) - f(x) | du \leqq$$

$$\leqq \lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E_{\varepsilon} \cap I_k} | f(u) - f(x) | du + \lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot$$

$$\cdot \int_{(E - E_{\varepsilon}) \cap I_k} | f(u) - f(x) | du \leqq 2 M \lim_{k \to \infty} \frac{m(E_{\varepsilon} \cap I_k)}{m(E \cap I_k)} +$$

$$+ \varepsilon \lim_{k \to \infty} \frac{m((E - E_{\varepsilon}) \cap I_k)}{m(E \cap I_k)} = \varepsilon .$$

Le nombre $\mathcal{E}$ étant arbitraire, la preuve de la nécessité est achevée.

La suffisance. Le point x étant un point de Lebesgue du type α de la fonction f, il existe un ensemble mesurable $E \subset R$ contenant x, de densité α au point x et tel que

$$(i) \quad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} |f(u) - f(x)| du = 0 \quad .$$

Supposons, par contre, que la fonction f ne possède pas la propriété $O(\alpha)$ au point x. Il existe donc un nombre $\mathcal{E} > 0$ tel que l'ensemble

$$G_{\mathcal{E}} = \{ u \in E, \ |f(u) - f(x)| < \mathcal{E} \}$$

est au point x de densité inférieure plus petite que α. Il existe donc une suite d'intervalles $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ convergente vers x et telle que

$$\lim_{k \to \infty} \sup \frac{m(G_{\mathcal{E}} \cap I_k)}{m(I_k)} = \beta < \alpha .$$

Puisque

$$\lim_{k \to \infty} \frac{m(E \cap I_k)}{m(I_k)} = \alpha ,$$

il existe donc un indice naturel k_o tel que

$$m(E \cap I_k) > \frac{\alpha}{2} m(I_k) \qquad \text{pour } k \geqq k_o$$

Par conséquent

$$\lim_{k \to \infty} \sup \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} |f(u) - f(x)| du \geqq$$

$$\geqq \lim_{k \to \infty} \sup \frac{2}{\alpha} \frac{1}{m(I_k)} \cdot \int_{(E - G_{\mathcal{E}}) \cap I_k} |f(u) - f(x)| du \geqq$$

$$\geq \frac{2}{\alpha}\, \varepsilon \limsup_{k\to\infty} \frac{m((E - G_\varepsilon)\cap I_k)}{m(I_k)} \geq \frac{2\varepsilon}{\alpha}(\alpha - \beta) > 0 ,$$

en contradiction avec (i) .

Cette contradiction finie la preuve.

Remarque 1. On peut obtenir la preuve du théorème 2 d'une autre façon. Dans ce but, il suffit considérer la fonction f/E et introduitre dans E la base de différentiation $(F, \Rightarrow)$ ([1]), où F est la famille d'ensembles $I \cap E$ tels que $m(I\cap E) > 0$ et I sont des intervalles.

Remarque 2. Si $\alpha = 1$, la propriété $O(\alpha)$ est equivalente à la continuité approximative, et la propriété $P(\alpha)$ est équivalente à la propriété "être une dérivée" .

Dans son article [2] Lipiński a prouvé le théorème suivant :

Théorème. Pour qu'une fonction mesurable $f : R \to \bar{R}$ ($\bar{R} = R \cup \{-\infty , \infty\}$) soit approximativement continue, il faut et il suffit que toutes les fonctions $f_a^b(x) = \max\{a, \min[b, f(x)]\}$ ($a,b \in R$ et $a < b$) soient des dérivées.

Cependant on a le suivant :

Théorème 3. Si $\alpha \in (\frac{1}{2} , \frac{3}{4}]$, il existe une fonction mesurable $f : R \to [-1, 1]$ sans la propriété $O(\alpha)$ au point 0 et telle que toutes les fonctions f_a^b possédent la propriété $P(\alpha)$ au point 0 .

Preuve. Soient $A, B \subset R - \{0\}$ des ensembles mesurables, disjoints et de densité $\frac{1}{4}$ au point 0. Posons

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{lorsque } x \in A \\ 0 & \text{lorsque } x \in R - (A \cup B) \\ 1 & \text{lorsque } x \in B . \end{cases}$$

Puisque la densité de l'ensemble

$$\{u\ ;\ |f(u) - f(0)| < \tfrac{1}{2}\} = \{u\ ;\ |f(u)| < \tfrac{1}{2}\} = R - (A \cup B)$$

est égale $\frac{1}{2} < \alpha$ au point 0, donc la fonçtion f ne possède pas la propriété $O(\alpha)$ au point 0.

Prouvons encore que toutes les fonctions f_a^b possèdent la propriété $P(\alpha)$ au point 0. Si $a \leq -1$ et $b \geq 1$, posons $E = A \cup B \cup C$, où $C \subset R - (A \cup B)$ est un ensemble mesurable contenant 0 et de densité $(\alpha - \frac{1}{2})$ au point 0. Étant donnée la suite d'intervalles $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ convergente vers 0, on a

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} f_a^b(u)du = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{A \cap I_k} f(u)du +$$

$$+ \lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{B \cap I_k} f(u)du + \lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{C \cap I_k} f(u)du =$$

$$= - \lim_{k \to \infty} \frac{m(A \cap I_k)}{m(E \cap I_k)} + \lim_{k \to \infty} \frac{m(B \cap I_k)}{m(E \cap I_k)} =$$

$$= - \lim_{k \to \infty} \frac{m(A \cap I_k)}{m(I_k)} \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{m(I_k)}{m(E \cap I_k)} +$$

$$+ \lim_{k \to \infty} \frac{m(B \cap I_k)}{m(I_k)} \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{m(I_k)}{m(E \cap I_k)} =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha} = 0 = f_a^b(0) .$$

Dans le cas où $a \geq 0$ et $b > a$, soit $E = [R - (A \cup B)] \cup C$ où $C \subset A \cup \{0\}$ est un ensemble mesurable contenant 0 et de densité $(\alpha - \frac{1}{2})$ au point 0.

Si $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite d'intervalles convergente vers 0, on a

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{m(E \cap I_k)} \cdot \int_{E \cap I_k} f_a^b(u)du =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{a\cdot m(E\cap I_k)}{m(E\cap I_k)} = a = f_a^b(0) .$$

De même on prouve dans le cas, où $b \leqq 0$ et $a < b$. Il rèste à considérer le cas où $a < 0$ et $b > 0$.

Evidemment dans ce cas, $f_a^b = f_{a_1}^{b_1}$, où $a_1 = \max(-1, a)$ et $b_1 = \min(1, b)$.

Soit $E = [R - (A \cup B)] \cup C \cup D \cup \{0\}$, où $C \subset A$ est un ensemble mesurable de densité c_1 au point 0 et $D \subset B$ est un ensemble mesurable de densité d_1 au point 0 et les nombres c_1, d_1 sont positifs et tels que

$$c_1 + d_1 = \alpha - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a_1}{\alpha} c_1 + \frac{b_1}{\alpha} d_1 = 0 .$$

Si $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite d'intervalles convergente vers 0, on a

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(E\cap I_k)} \cdot \int_{E\cap I_k} f_a^b(u)du = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(E\cap I_k)} \cdot$$

$$\int_{I_k\cap[R-(A\cup B)]} f_{a_1}^{b_1}(u)du + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(E\cap I_k)} \cdot \int_{C\cap I_k} f_{a_1}^{b_1}(u)du +$$

$$+ \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(E\cap I_k)} \cdot \int_{D\cap I_k} f_{a_1}^{b_1}(u)du = a_1 \lim_{k\to\infty} \frac{m(C\cap I_k)}{m(E\cap I_k)} +$$

$$+ b_1 \lim_{k\to\infty} \frac{m(D\cap I_k)}{m(E\cap I_k)} = a_1 \lim_{k\to\infty} \frac{m(C\cap I_k)}{m(I_k)} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{m(I_k)}{m(E\cap I_k)} +$$

$$+ b_1 \lim_{k\to\infty} \frac{m(D\cap I_k)}{m(I_k)} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{m(I_k)}{m(E\cap I_k)} = \frac{a_1}{\alpha} c_1 + \frac{b_1}{\alpha} d_1 =$$

$$= 0 = f_{a_1}^{b_1}(0) = f_a^b(0)$$

et la preuve est achevée .

Remarque 3. Évidemment, la fonction mesurable $f : R \to R$ a la propriété $O(\alpha)$ ($\alpha \in (0,1]$) au point x si et seulement si toutes les fonctions f_a^b possèdent cette propriété en ce point x .

TRAVAUX CITÉS

[1] Bruckner A., Differentiation of integrals. Amer. Math. Monthly 78 (9) (1971), 1-51

[2] Lipiński J.S., Sur les fonctions approximativement continues, Colloq. Math. 5 (1958), 172-175

DWIE UWAGI DOTYCZĄCE GĘSTOŚCI ZBIORÓW I FUNKCJI PRZEWYŻSZAJĄCO CIĄGŁYCH

Streszczenie

W pierwszej części tego artykułu pokazujemy, że dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset R$ miary dodatniej i dla dowolnej liczby dodatniej $a < m(A)$ istnieje zbiór domknięty $B \subset A$ o mierze większej niż a i mający we wszystkich swoich punktach gęstość górną równą 1. W drugiej natomiast pokazujemy, że twierdzenie Lipińskiego z pracy [2] charakteryzujące aproksymatywną ciągłość w języku pochodnych nie da się przenieść na przypadek pewnych ciągłych przewyższających.