ZESZYTY MATEMATYCZNE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1987 z. 9

ANTONI DOGOŃSKI, TOMASZ NATKANIEC
WSP w Bydgoszczy

PROSTE PRZYKŁADY KRAT GENEROWANYCH PRZEZ PEWNE RODZINY FUNKCJI

Niech R^R oznacza rodzinę wszystkich funkcji $f:R \to R$. Rodzinę $\mathcal{A} \subset R^R$ nazywamy kratą funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje $\max(f,g) \in \mathcal{A}$ i $\min(f,g) \in \mathcal{A}$ dla dowolnych $f,g \in \mathcal{A}$. Od dawna wiadomo, że gdy $\mathcal{A}$ jest rodziną funkcji ciągłych względem pewnej topologii $\mathcal{T}$, to $\mathcal{A}$ jest kratą funkcji. Jeżeli $\mathcal{A} \subset R^R$, to $\alpha(\mathcal{A})$ oznacza kratę generowaną przez rodzinę $\mathcal{A}$, to znaczy najmniejszą kratę funkcji zawierającą rodzinę $\mathcal{A}$. Zauważmy, że jeżeli $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ to $\alpha(\mathcal{A}) \subset \alpha(\mathcal{B})$ oraz $\alpha(\alpha(\mathcal{A})) = \alpha(\mathcal{A})$. W [1] prof. Grande postawił szereg problemów dotyczących opisania krat generowanych przez określone rodziny funkcji Dotychczas zbadane zostały kraty generowane przez :

a) rodzinę wszystkich funkcji różniczkowalnych [3],

b) rodzinę wszystkich funkcji quasi-ciągłych oraz d-quasi-ciągłych [2],

c) rodzinę wszystkich funkcji posiadających własność Darbous[4]

W niniejszej pracy opisujemy kraty generowane przez rodzinę wszystkich funkcji różnowartościowych, rodzinę wszystkich funkcji liniowych oraz rodzinę wszystkich wielomianów.

I. Niech $\mathcal{R}_1$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji różnowartościowych :

$R_1 = \{f : R \longrightarrow R,\ f$ jest funkcją różnowartościową$\}$.

Niech $\mathcal{R}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji $f: R \longrightarrow R$ spełniających warunek : $\exists n \in N\ \forall y \in R\ |f^{-1}(y)| \leq n$, gdzie $|f^{-1}(y)|$ oznacza moc zbioru $f^{-1}(y)$. Dla każdej funkcji $f \in \mathcal{R}$ określamy $n_0(f) = \max\{n :\ \exists y \in R\ \ |f^{-1}(y)| = n\}$.

Zauważmy, że $\mathcal{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n$, gdzie $\mathcal{R}_n = \{f : R \longrightarrow R,\ n_0(f) \leq n\}$

TWIERDZENIE 1. Rodzina $\mathcal{R}$ jest kratą generowaną przez rodzinę funkcji różnowartościowych: $\alpha(\mathcal{R}_1) = \mathcal{R}$.

DOWÓD . W pierwszej części udowodnimy, że $\mathcal{R}$ jest kratą funkcji. Niech $f,g \in \mathcal{R}$. Wtedy istnieje n_1 takie, że $f \in \mathcal{R}_{n_1}$ oraz istnieje n_2 takie, że $g \in \mathcal{R}_{n_2}$.

Niech $n = \max(n_1, n_2)$. Wtedy $f,g \in \mathcal{R}_n$.

Połóżmy $h = \max(f, g)$. Dla każdego $y \in R$ mamy:

$|f^{-1}(y)| \leq n$ i $|g^{-1}(y)| \leq n$.

Skoro $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy } f(x) \geq g(x) \\ g(x) & \text{gdy } g(x) > f(x) \end{cases}$, więc $|h^{-1}(y)| \leq 2n$.

Stąd $h \in \mathcal{R}_{2n} \subset \mathcal{R}$. Podobnie przebiega dowód dla $\min(f,g)$.

W drugiej części udowodnimy, że $\mathcal{R} \subset \alpha(\mathcal{R}_1)$.

Dowodzimy indukcyjnie względem n, że $\mathcal{R}_n \subset \alpha(\mathcal{R}_1)$.

1. Twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

2. Założenie indukcyjne: dla każdego $k < n$ $\mathcal{R}_k \subset \alpha(\mathcal{R}_1)$.

Teza: $\mathcal{R}_n \subset \alpha(\mathcal{R}_1)$. Wystarczy dowieść, że $\mathcal{R}_n \subset \alpha(\mathcal{R}_{n-1})$.

Istotnie, wtedy z założenia indukcyjnego otrzymamy:

$\mathcal{R}_n \subset \alpha(\mathcal{R}_{n-1}) \subset \alpha(\alpha(\mathcal{R}_1)) = \alpha(\mathcal{R}_1)$, a więc $\mathcal{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \subset \alpha(\mathcal{R}_1)$.

Niech h będzie dowolną funkcją z rodziny $\mathcal{R}_n$.

Jeżeli $n_0(h) \leq n-1$, to $h \in \mathcal{R}_{n-1} \subset \alpha(\mathcal{R}_1)$.

Załóżmy, że $n_0(h) = n$ i określmy zbiory:

$$A = \{y \in R,\ |h^{-1}(y)| = n_0(h)\} \text{ i } B = h^{-1}(A).$$

Podzielmy zbiór B na dwa podzbiory B_1 i B_2 spełniające następujące warunki : $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $h(B_1) = h(B_2) = A$ oraz $h|_{B_1}$ jest różnowartościowa.

Rozpatrzmy dwa przypadki :

1. Dla każdego $y_0 \in R$ $|(-\infty, y_0) \setminus A| = \mathfrak{c}$.

LEMAT 1. Jeżeli spełniony jest warunek 1, to zbiór $R \setminus A$ można rozbić na dwa zbiory C_1, C_2 takie, że :

$$\forall y \in R \quad |C_i \cap \{x:\ x \le y\}| = \mathfrak{c}, \quad \text{gdzie } i = 1,2.$$

DOWÓD. Ustawmy wszystkie liczby rzeczywiste w ciąg :

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots \quad \alpha < \mathfrak{c}$.

(Liczbę kardynalną $\mathfrak{c}$ utożsamiamy z najmniejszą liczbą porządkową α taką, że zbiór liczb porządkowych mniejszych od α ma moc $\mathfrak{c}$). Dla każdej liczby porządkowej $\alpha < \mathfrak{c}$ wybieramy liczby a_α, b_α takie, że $a_\alpha, b_\alpha \notin A$, $a_\alpha \ne b_\alpha$, $a_\alpha, b_\alpha \le x_\alpha$ oraz $a_\alpha, b_\alpha \notin \bigcup_{\beta<\alpha} \{a_\beta, b_\beta\}$. Wtedy $C_1 = \{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ i $C_2 = R \setminus (A \cup C_1)$ spełniają warunki lematu 1.

Definiujemy funkcje $f_1, f_2 \in \mathcal{R}_{n-1}$ w następujący sposób :

$$f_1(x_\alpha) = \begin{cases} h(x_\alpha) & \text{dla } x_\alpha \in B_1 \cup h^{-1}(C_2), \\ \min\limits_{\gamma} \{x_\gamma \in C_1 :\ x_\gamma \le h(x_\alpha) \text{ i } x_\gamma \notin \{f(x_\beta) : \beta < \alpha\}\} & \text{dla } x_\alpha \in B_2 \cup h^{-1}(C_1). \end{cases}$$

$$f_2(x_\alpha) = \begin{cases} h(x) & \text{dla } x_\alpha \in B_2 \cup h^{-1}(C_1), \\ \min\limits_{\gamma} \{x_\gamma \in C_2 :\ x_\gamma \le h(x_\alpha) \text{ i } x_\gamma \notin \{f(x_\beta) : \beta < \alpha\}\} & \text{dla } x_\alpha \in B_1 \cup h^{-1}(C_2). \end{cases}$$

Wtedy $h = \max(f_1, f_2)$, a więc $h \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_{n-1})$.

2. Istnieje $y_0 \in R$, że $|(-\infty, y) \setminus A| < \mathfrak{c}$.
Wtedy dla każdego $y \in R$ $|(-\infty, y) \cap A| = \mathfrak{c}$.
Podobnie jak w lemacie 1 można dowieść, że istnieje rozbicie zbioru A na dwa zbiory A_1, A_2 takie, że :

$$\forall_{y \in R}\ |(-\infty, y) \cap A_i| = \mathfrak{c} \quad \text{dla } i \in \{1,2\}.$$

Niech $B_{ij} = B_i \cap h^{-1}(A_j)$ dla $i,j \in \{1,2\}$ oraz

$$f_{i,j}(x_\alpha) = \begin{cases} h(x_\alpha) & \text{dla } x_\alpha \in B_{ij} \cup (R \setminus B), \\ \min\limits_{\beta} \left\{ x_\beta \in A_{3-j} \setminus \{ f_{i,j}(x_\beta) : \beta < \alpha \} : x_\beta \le h(x_\alpha) \right\} & \\ & \text{dla } x_\alpha \in B \setminus B_{ij}. \end{cases}$$

Wtedy $f_{i,j} \in \mathcal{R}_{n-1}$ oraz $h = \max\{f_{i,j} : i,j \in \{1,2\}\}$.

UWAGA. Nie każdą funkcję $h \in \mathcal{R}_2$ można przedstawić jako maksimum (minimum) dwóch funkcji różnowartościowych.

P r z y k ł a d. Niech $h: R \to R$ będzie funkcją spełniającą następujący warunek: $\forall y \in R$ $|h^{-1}(y)| = 2$.
Tej funkcji nie można przedstawić jako maksimum dwóch funkcji różnowartościowych. Istotnie, przypuśćmy, że $h = \max(f_1, f_2)$ i $f_1, f_2 \in \mathcal{R}_1$. Wtedy R można przedstawić w postaci sumy niepustych zbiorów A i B takich, że: $A = \{x : h(x) = f_1(x)\}$, $B = \{x : h(x) = f_2(x)\}$ oraz $f_1(A) = f_2(B) = R$.
Wtedy dla dowolnego punktu $b \in B$ istnieje punkt $a \in A$ taki, że $f_1(a) = f_1(b)$ co przeczy założeniu, że funkcja f_1 jest różnowartościowa.

II. Rozpatrujemy rodzinę wszystkich funkcji liniowych.
Wprowadźmy następujące oznaczenia.

$\mathcal{M}_0 = \{f : R \to R : f$ jest funkcją liniową$\}$ oraz $\mathcal{M} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n$, gdzie $\mathcal{M}_n = \{f : R \to R : \exists k \leq n \ \exists a_1,\dots,a_k \ (-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_k < a_{k+1} = \infty) :$ $f \mid P_i$ jest liniowa dla $P_i = \langle a_i, a_{i+1} \rangle$, $i = 0,1,2,\dots, k\}$.

(Przyjmujemy, że $\langle a,b \rangle$ jest równy $(-\infty, b\rangle$ gdy $a = -\infty$ oraz $\langle a,b \rangle$ jest równy $\langle a, \infty)$ gdy $b = \infty$).

Zauważmy, że funkcja $f \in \mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg n punktów $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ taki, że funkcja $f \mid P_i$ jest liniowa dla każdego przedziału $P_i = \langle a_i, a_{i+1} \rangle$ dla $i = 0,1, 2, \dots, n$. Każdą funkcję $f \in \mathcal{M}$ będziemy nazywać przedziałami liniową. Punkty $a_1, a_2,\dots,a_n$, w których funkcja f nie jest różniczkowalna będziemy nazywać zębami funkcji f.

TWIERDZENIE 2. Krata generowana przez rodzinę funkcji liniowych jest równa rodzinie funkcji przedziałami liniowych: $\alpha(\mathcal{H}_0) = \mathcal{M}$.

DOWÓD. Udowodnimy najpierw, że $\mathcal{M}$ jest kratą funkcji. Niech $f,g \in \mathcal{M}$. Wtedy $f,g \in \mathcal{M}_n$ dla pewnego $n \in N$. Niech punkty $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ $(m \leq n)$ będą zębami funkcji f oraz

$$P_i = \langle a_i, a_{i+1} \rangle \text{ dla } i = 1,2,\dots,m-1, \ P_0 = (-\infty, a_1\rangle \text{ i } P_m = \langle a_m, \infty).$$

Udowodnimy, że $h = \max(f,g) \in \mathcal{M}$.

Zauważmy, że jeśli f i g są liniowe w pewnym przedziale P, to funkcja h posiada w przedziale P co najwyżej jeden ząb. Rozpatrzmy przypadek, gdy g jest liniowa. Ponieważ f jest liniowa na przedziale $P_i = \langle a_i, a_{i+1} \rangle$, więc h ma co najwyżej jeden ząb w przedziale P_i $(i = 0,1,\dots,m)$. Zatem h ma w sumie co najwyżej $2m+1$ zębów i $h \in \mathcal{M}$. Podobnie dowodzimy, że $\min(f,g) \in \mathcal{M}$. Załóżmy, że funkcja g ma k $(k \leq n)$ zębów.

Niech $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ będą zębami funkcji g i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Dla $0 \le i \le m$ niech $B_i = B \cap P_i$. Wtedy $B_i = \{b_{i,1}, \ldots, b_{i,s_i}\}$ i $a_i = b_{i,0} \le b_{i,1} < \ldots < b_{i,s_i} \le b_{i,s_i+1} = a_{i+1}$. Niech $P_{i,t}$ oznacza przedział $\langle b_{i,t}, b_{i,t+1} \rangle$ dla $t = 0,1,\ldots,s_i$. Wtedy $P_i = \bigcup_{t=0}^{s_i} P_{i,t}$. Ponieważ f i g są liniowe w przedziale $P_{i,t}$, więc $h = \max(f,g)$ ma co najwyżej jeden ząb w $P_{i,t}$. Ponieważ R jest sumą $m+k+1$ przedziałów $P_{i,t}$ ($i = 0,1,\ldots,m$, $t = 0,1,\ldots,s_i$), więc h ma $2m + 2k + 1$ zębów. Zatem $h \in \mathcal{M}$. Podobnie dowodzimy, że $\min(f,g) \in \mathcal{M}$. Tak więc $\mathcal{M}$ jest kratą funkcji.

W drugiej części udowodnimy, że krata $\mathcal{M}$ jest generowana przez $\mathcal{M}_0$. W tym celu udowodnimy przez indukcję względem n, że inkluzja $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$ zachodzi dla każdej liczby $n \in N$.

1. Twierdzenie jest prawdziwe dla $n=0$: $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$.

2. Załóżmy, że $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$. Chcemy udowodnić, że $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$. W tym celu wystarczy udowodnić, że $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_n)$.

Niech $f \in \mathcal{M}_{n+1}$. Można założyć, że funkcja f ma $n+1$ zębów $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$. Przyjmijmy $a_0 = -\infty$ oraz $a_{n+2} = +\infty$ oraz $P_i = \langle a_i, a_{i+1} \rangle$ dla $i = 0,1,2,\ldots,n+1$. Niech $f_i(x) = m_i \cdot x + c_i$ będzie funkcją liniową taką, że $f|_{P_i} = f_i|_{P_i}$ ($i = 0,1,2,\ldots,n+1$).

Niech $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \le a_n, \\ f_n(x) & \text{dla } x > a_n. \end{cases}$

Wtedy $g \in \mathcal{M}_n$.

Niech $A = \{x < a_{n+1} : f(x) = f_{n+1}(x)\}$. Rozważmy dwa przypadki:

a) $A = \emptyset$. Wtedy połóżmy $h = f_{n+1}$ i zauważmy, że jeżeli $m_n \le m_{n+1}$, to $f = \max(g,h)$ oraz jeżeli $m_n > m_{n+1}$, to

$f = \min(g,h)$. Zatem $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n)$.

b) Załóżmy, że $A \neq \emptyset$ i połóżmy $x_0 = \max A$. Zauważmy, że wtedy $x_0 < a$. Określamy funkcje h w następujący sposób:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \leq x_0, \\ f_{n+1}(x) & \text{dla } x > x_0. \end{cases}$$

Wtedy h ma co najwyżej n zębów, więc $h \in \mathcal{M}_n$.
Zauważmy, że jeżeli $m_n \leq m_{n+1}$, to $f = \max(g,h)$, a jeżeli $m_n > m_{n+1}$, to $f = \min(g,h)$, więc w tym przypadku również $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n)$. Z założenia indukcyjnego wynika, że $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$. Zatem $\mathcal{M}_{n+1} \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_n) \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$. Dowód twierdzenia został zakończony.

III. Niech $\mathcal{W}_0$ oznacza rodzinę wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych.

DEFINICJA. Mówimy, że funkcja $f: R \to R$ jest kawałkami wielomianowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: liczba $n \in N$, ciąg liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(-\infty = a_0 < a_1 < \ldots < a_n < a_{n+1} = \infty)$ oraz ciąg wielomianów $w_0, w_1, \ldots, w_n$ takie, że $f|P_i = w_i|P_i$ dla $i = 0,1,2,\ldots,n$, gdzie $P_i = \langle a_i, a_{i+1}\rangle$. (Przyjmujemy dodatkowo, że $\langle -\infty, a_1\rangle = (-\infty, a_1\rangle$ oraz $\langle a_n, \infty\rangle = \langle a_n, \infty)$)
Punkty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywać będziemy zębami funkcji f.
Niech $\mathcal{W}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji kawałkami wielomianowych. Dla każdej liczby naturalnej n definiujemy rodzinę $\mathcal{W}_n$:

$$\mathcal{W}_n = \{f \in \mathcal{W} : \exists k \leq n \ \exists a_1, a_2, \ldots, a_k \ (-\infty = a_0 < a_1 \ldots < a_k < a_{k+1} = \infty) \ w_0, \exists w_1, \ldots, w_k \in \mathcal{W}_0 \ f|\langle a_i, a_{i+1}\rangle = w_i|\langle a_i, a_{i+1}\rangle \quad i = 0,1,2,\ldots,k\}.$$

Zauważmy, że $\mathcal{W} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{W}_n$.

TWIERDZENIE 3. Rodzina $\mathcal{W}$ jest kratą funkcji generowaną przez rodzinę wszystkich wielomianów: $\alpha(\mathcal{W}_0) = \mathcal{W}$.

DOWÓD. Udowodnimy najpierw, że rodzina $\mathcal{W}$ jest kratą funkcji. Niech $f, g \in \mathcal{W}$. Wtedy $f, g \in \mathcal{W}_n$ dla pewnego $n \in N$. Udowodnimy, że $\max(f,g) \in \mathcal{W}$. Zauważmy, że jeżeli w, v są wielomianami i P jest przedziałem, to ilość zębów funkcji $\max(w, v)$ w przedziale P jest nie większa niż ilość miejsc zerowych funkcji $w-v$, a więc nie większa niż $\max(st(w), st(v))$ (gdzie $st(w)$ oznacza stopień wielomianu w).

Niech $P_0, P_1, \ldots, P_k$ będą przedziałami wyznaczonymi przez zęby funkcji f i g. Wtedy dla każdego $i = 0,1,\ldots,k$ istnieją wielomiany w_i, v_i takie, że $f|_{P_i} = w_i|_{P_i}$ oraz $g|_{P_i} = v_i|_{P_i}$, a więc funkcja $h = \max(f,g)$ ma w P_i skończoną ilość zębów. W rezultacie h ma skończoną ilość zębów i $h \in \mathcal{W}$.

W drugiej części udowodnimy, że $\mathcal{W} \subset \alpha(\mathcal{W}_0)$. Udowodnimy przez indukcję, że dla każdej liczby naturalnej $n \in N$ rodzina $\mathcal{W}_{n+1}$ jest zawarta w $\alpha(\mathcal{W}_n)$. Rozpatrzmy najpierw przypadek gdy $n = 0$. Niech $f \in \mathcal{W}_1$. Bez zmniejszenia ogólności rozważań można zauważyć, że $a_1 = 0$ oraz $f(a_1) = 0$. Przyjmijmy, że $f|_{(-\infty,0)} = w_0|_{(-\infty,0)}$ oraz $f|_{\langle 0,\infty)} = w_1|_{\langle 0,\infty)}$.

Niech m_0 będzie liczbą rzeczywistą dodatnią taką, że: $m_0 > \max((w_0)'(0), (w_1)'(0))$. Wtedy istnieje $c > 0$ takie, że dla każdego $x \in \langle -c, c\rangle$ funkcja $t(x) = m_0 \cdot x$ spełnia dwa warunki:

(1) $t(x) > \max(w_0(x), w_1(x))$ dla $c \geqslant x > 0$ oraz

(2) $t(x) < \min(w_0(x), w_1(x))$ dla $-c \leq x < 0$.

Niech p_1 będzie wielomianem stopnia nieparzystego spełniającym warunki :

(3) $p_1(x) \geqslant \max(t(x), w_0(x), w_1(x))$ dla $x \geqslant c$,

(4) $p_1(c) = t(c)$,

(5) $p_1(x) < t(x)$ dla $x < c$.

Wtedy $\max(t, p_1)(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{dla } x \geqslant c, \\ t(x) & \text{dla } x < c. \end{cases}$

Podobnie, niech p_0 będzie wielomianem stopnia nieparzystego spełniającym warunki:

(6) $p_0(x) \leq \min(t(x), w_0(x), w_1(x))$ dla $x \leq -c$,

(7) $p_0(-c) = t(-c)$,

(8) $p_0(x) > t(x)$ dla $x > -c$.

Połóżmy $v_0(x) = \min(\max(t, p_1), p_0)(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{dla } x \geqslant c, \\ t(x) & \text{dla } -c < x < c, \\ p_0(x) & \text{dla } x \leq -c. \end{cases}$

Wtedy $v_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{W}_0)$ oraz v_0 ma następujące własności :

$v_0(x) \geqslant \max(w_0(x), w_1(x))$ dla $x \geqslant 0$ oraz

$v_0(x) \leq \min(w_0(x), w_1(x))$ dla $x < 0$.

W podobny sposób określamy funkcję $v_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{W}_0)$ taką, że:

$v_1(x) \geqslant \max(w_0(x), w_1(x))$ dla $x \leq 0$ oraz

$v_1(x) \leq \min(w_0(x), w_1(x))$ dla $x > 0$.

Pozostaje zauważyć, że $f = \min(\max(w_0, v_0), \max(w_1, v_1))$. Zatem $f \in \mathcal{L}(\mathcal{W})$. Załóżmy teraz, że $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{L}(\mathcal{W}_0)$. Niech $f \in \mathcal{W}_{n+1}$. Można założyć, że f ma $n+1$ zębów $a_1 < a_2 < \dots a_n < a_{n+1}$.

Niech $w_0, w_1, \dots, w_{n+1}$ będą wielomianami takimi, że $f|_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle} = w_i|_{\langle a_i, a_{i+1}\rangle}$ $i = 0,2,\dots,n+1$ (gdzie $a_0 = -\infty$ i $a_{n+2} = +\infty$). Podobnie jak w poprzednim przypadku możemy określić funkcję $v_0, v_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$, które spełniają następujące warunki: $v_0(a_{n+1}) = w_n(a_{n+1}) = w_{n+1}(a_{n+1}) = v_1(a_{n+1})$,

$v_0(x) \geqslant \max(w_{n+1}(x), w_n(x))$ dla $x \geqslant a_{n+1}$,

$v_0(x) \leqslant \min(w_{n+1}(x), f(x))$ dla $x \leqslant a_{n+1}$,

$v_1(x) \geqslant \max(w_{n+1}(x), f(x))$ dla $x \leqslant a_{n+1}$,

$v_1(x) \leqslant \min(w_{n+1}(x), w_n(x))$ dla $x > a_{n+1}$.

Połóżmy $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \leqslant a_{n+1}, \\ w_n(x) & \text{dla } x > a_{n+1}. \end{cases}$

Wtedy g ma n zębów, a więc $g \in \mathcal{W}_n$. Zauważmy, że

$f = \min(\max(g, v_0), \max(w_{n+1}, v_1))$, a więc $f \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$.

UWAGA. Niech $\mathcal{S}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji wielomianowych f, o tej własności, że w odpowiadającym im ciągu $w_0, w_1, \dots, w_n$ występują jedynie wielomiany drugiego stopnia. Łatwo zauważyć, że $\mathcal{S}$ jest kratą funkcji, ale $\mathcal{S}$ nie jest generowana przez rodzinę wielomianów drugiego stopnia.

DOWÓD. Niech $\mathcal{H}_0$ oznacza rodzinę wszystkich wielomianów drugiego stopnia. Definiujemy indukcyjnie rodziny $\mathcal{H}_n$ $(n \geqslant 1)$:

$\mathcal{H}_1 = \{\max(f_1, f_2), \min(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in \mathcal{H}_0\}$,

.

.

.

$\mathcal{H}_{n+1} = \{\max(f_1, f_2), \min(f_1, f_2) : f_1, f_2 \in \mathcal{H}_n\}$.

Zauważmy, że $\alpha(\mathcal{K}_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n$. Udowodnimy, że dla dowolnego $n \in N$ i dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{K}_n$ zachodzi warunek:

(i) $\lim_{x \to \infty} f = \lim_{x \to -\infty} f = \pm \infty$. Dla $n = 0$ warunek (i) jest oczywisty.

Załóżmy, że jeżeli $f \in \mathcal{K}_n$, to $\lim_{x \to \infty} f = \lim_{x \to -\infty} f = \pm \infty$.

Pokażemy, że tak jest dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{K}_{n+1}$.

Niech $f \in \mathcal{K}_{n+1}$. Załóżmy, że istnieją funkcje $f_1, f_2 \in \mathcal{K}_n$ takie, że $f = \max(f_1, f_2)$.

Mogą zajść następujące przypadki.

1. Jeżeli $\lim_{x \to \infty} f_1 = \lim_{x \to -\infty} f_1 = \infty$ oraz $\lim_{x \to \infty} f_2 = \lim_{x \to -\infty} f_2 = \infty$, to $\lim_{x \to \infty} f = \lim_{x \to -\infty} f = \infty$.

2. Jeżeli $\lim_{x \to \infty} f_1 = \lim_{x \to -\infty} f_1 = \infty$ oraz $\lim_{x \to \infty} f_2 = \lim_{x \to -\infty} f_2 = -\infty$, to $\lim_{x \to \infty} f = \lim_{x \to -\infty} f = \infty$

3. Jeżeli $\lim_{x \to \infty} f_1 = \lim_{x \to -\infty} f_1 = -\infty$ oraz $\lim_{x \to \infty} f_2 = \lim_{x \to -\infty} f_2 = -\infty$, to $\lim_{x \to \infty} f = \lim_{x \to -\infty} f = -\infty$.

Zatem funkcja f spełnia warunek (i). Udowodniliśmy więc przez indukcję, że dowolna funkcja $f \in \alpha(\mathcal{K}_0)$ spełnia warunek (i).

Weźmy teraz funkcję wielomianową postaci

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $f \in \mathcal{S}$ oraz że f nie spełnia warunku (i).

To oznacza, że krata $\mathcal{S}$ nie jest generowana przez rodzinę wielomianów drugiego stopnia.

Uwagi końcowe

Dla dowolnej rodziny funkcji $\mathcal{A}$ definiujemy

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} ,$$

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{\max(f,g), \min(f,g) : f,g \in \mathcal{A}_n\} \quad \text{dla } n = 0,1,2,\ldots$$

Łatwo zauważyć, że

$$\alpha(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n .$$

Rząd $\ell(\mathcal{A})$ kraty generowanej przez $\mathcal{A}$ definiujemy w następujący sposób :

$$\ell(\mathcal{A}) = \begin{cases} \min\{n : \mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n\} & \text{jeżeli } \{n : \mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{w przeciwnym przypadku .} \end{cases}$$

Zauważmy, że rząd rodzin opisywanych w poprzednich twierdzeniach jest równy ∞. Ponadto dla dowolnej liczby n istnieje rodzina funkcji $\mathcal{A}$, dla której $\ell(\mathcal{A}) = n$.

Istotnie, niech $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}\}$ będzie 2^n - elemento podzbiorem R. Definiujemy rodzinę funkcji rzeczywistych $\mathcal{A}$ w następujący sposób

$$\mathcal{A} = \{\chi_B : B \subset A , |B| \leq 1\} , \text{ gdzie } \chi_B \text{ oznacza funkcj}$$

charakterystyczną zbioru B.

Wtedy

$$\mathcal{A}_m = \{\chi_B : B \subset A, |B| \leq 2^m\} \quad \text{dla } m = 0,1,2,\ldots$$

oraz $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n+1} = \{0,1\}^A$.

Zatem $\ell(\mathcal{A}) = n$.

REFERENCES

[1] Grande Z., Some problems in differentiation theory, Real Analysis Exchange, Vol. 10, No 2 1984-85 , 334-343

[2] Grande Z., Natkaniec T., Lattices generated by $\mathcal{T}$-quasi continuous functions, Bull. Pol. Ac. of Sc. Mathematices, Vol. 34, No 9-10, 1986, 525-531

[3] Natkaniec T., The lattice generated by differentiable functions, Real Analysis Exchange, Vol. 12, No. 1, 1986-87, 247-252

[4] Natkaniec T., On lattices generated by Darboux functions, Bull. Pol. Ac. of Sc. Mathematices, Vol. 35, No 8-10, 1987

SIMPLE EXAMPLES OF LATTICES GENERATED BY SOME FAMILIES OF REAL FUNCTIONS

Summary

The lattices generated by the following families of real functions: the family of all 1-1 functions, the family of all linear functions and the family of all polynomials are characterized.

The order of lattices is introduced.