ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY

Problemy Matematyczne 1983/84 z. 5/6

NORBERT ROBY
Université de Montpellier II

SUR UN FONCTEUR LIÉ AUX PUISSANCES DIVISÉES DE DEGRÉ 4 D'UN MODULE

Sommaire: Pour tout module unitaire M sur un anneau commutatif unitaire A et tout entier $n \leqslant 0$, soit $\Gamma_n(M)$ la composante homogène de degré n de l'algèbre des puissances divisées $\Gamma(M)$. Soit $\bar{\Gamma}_n(M)$ le sous-module de $\Gamma_n(M)$ engendré par les éléments de la forme $x^{[n]}(x \in M)$. Dans [I], A. Prószyński a défini le module quotient : $\tilde{\Gamma}_n(M) = \Gamma_n(M)/\bar{\Gamma}_n(M)$. On se propose ici d'expliciter $\tilde{\Gamma}_4(M)$ quand M est une somme directe finie de modules monogènes.

L'étude de $\tilde{\Gamma}_n(M)$ dans le cas general a été poursuivie dans [II], essentiellement lorsque l'anneau A est noethérien. Mais on n'y trouve de détermination explicite que dans des cas bien particuliers. La détermination complète de $\tilde{\Gamma}_3(M)$ quand M est une somme directe finie de modules monogènes a été faite dans notre article cité [III].

DÉFINITION : Pour l'anneau A, nous désignons par $\underline{b}_2$ (resp. $\underline{b}_3$) l'idéal engendré par les éléments: $a^2 - a$ (resp. $a^3 - a$) où a parcourt A.

L'objet de cet article est de démontrer le résultat suivant:

THEOREME : Soit $\{I_1, \ldots, I_n\}$ un système fini d'idéaux de A.

Posons :

$$M = \bigoplus_{p=1}^{n} A/I_p ;$$

$$U = \bigoplus_{p<q} A/I_p + I_q + \underline{b}_2 ; \quad V = \bigoplus_{p<q} A/I_p + I_q + \underline{b}_3 ; \quad W = \bigoplus_{p<q<r} A/I_p + I_q + I_r + \underline{b}$$

Alors on a : $\tilde{\Gamma}_4(M) \simeq U \oplus V \oplus W \oplus W$.

Corollaire .

$$\tilde{\Gamma}_4(A^n) = (A/\underline{b}_2)^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}} \oplus (A/\underline{b}_3)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Nous utiliserons un procédé de récurrence sur n .

Rappels : Pour tout idéal I de A, on rappelle (cf. [IV], p. 127) que $D_n(I)$ $(n \geq 0)$ désigne l'idéal de A engendré par les éléments $C_n^{\alpha} i^{\alpha}$ où $1 \leq \alpha \leq n$ et $i \in I$. Si $n \geq 1$, $D_n(I)$ est engendré également par les élements $d i^{\delta}$, avec $i \in I$ et $d\delta = n$. Pour ces deux systèmes de générateurs, il suffit d'ailleurs que i décrive un système de générateurs de I.

Pour un module monogène M de générateur e et d'annulateur I, on sait alors (cf. [IV], prop. 8, p. 136) que $\Gamma_n(M) \simeq A/D_n(I)$, l'isomorphisme associant $e^{[n]}$ à la classe de 1 modulo D_n (I).

Nous entreprenons maintenant la démonstration du théorème. Pour commencer, M désigne un A-module et I un idéal de A absolument quelconques.

Lemme 1 : Soit le module

$$P = \Gamma_3(M)/I\,\Gamma_3(M) \oplus \Gamma_2(M)/D_2(I)\Gamma_2(M) \oplus M/D_3(I)M$$

Soient les applications canoniques :

$$u_3 : \Gamma_3(M) \to \Gamma_3(M)/I\,\Gamma_3(M)$$
$$u_2 : \Gamma_2(M) \to \Gamma_2(M)/D_2(I)\Gamma_2(M)$$
$$u_1 : M \to M/D_3(I)M$$

Soit H le sous-module de P engendré par les éléments du type

$$(1) : a\, u_3(x^{[3]}) + a^2\, u_2(x^{[2]}) + a^3\, u_1(x)$$

où $a \in A$, $x \in M$.

Posons Q = P/H . Alors on a :

$$(2) \quad \tilde{\Gamma}_4(M \oplus A/I) \simeq \Gamma_4(M) \oplus Q$$

Preuve : Notons e un générateur de A/I. Il existe un isomorphisme (cf. [V] , th. III 4, p. 262) :

$$\Gamma_4(M \oplus A/I) \simeq \Gamma_4(M) \oplus [\Gamma_3(M) \otimes A/I] \oplus [\Gamma_2(M) \otimes \Gamma_2(A/I)] \oplus$$

$$\oplus [M \otimes \Gamma_3(A/I)] \oplus \Gamma_4(A/I).$$

qui, pour $x \in M$ et $a \in A$, associe les éléments :

$$(x + ae)^{[4]} \text{ et } x^{[4]} + a\, x^{[3]} \otimes e + a^2 x^{[2]} \otimes e^{[2]} + a^3 x \otimes e^{[3]} + a^4 e^{[4]}$$

Le module $\bar{\Gamma}_4(M \oplus A/I)$ contient en particulier $x^{[4]}$ (faire $a = 0$), ainsi que $e^{[4]}$ (faire $x = 0$ et $a = 1$). En outre : $\Gamma_3(M) \otimes A/I \simeq \Gamma_3(M)/I\, \Gamma_3(M)$; $\Gamma_2(M) \otimes \Gamma_2(A/I) \simeq$ $\simeq \Gamma_2(M)/D_2(I)\Gamma_2(M)$; $M \otimes \Gamma_3(A/I) \simeq M/D_3(I)\, M$. Le lemme 1 en resulte.

Nous allons maintenant opérer une réduction sur le système des générateurs de H définie au lemme 1 .

<u>Lemme 2</u> : <u>Le module</u> H <u>est engendré par l'ensemble des éléments de l'un des types suivants, où</u> $x \in M$ et $a \in A$:

α) $u_3(x^{[3]}) + u_2(x^{[2]}) + u_1(x)$;

β) $(a^2 - a)u_2(x^{[2]})$;

γ) $(a^3 - a)u_1(x)$

<u>Preuve</u> :

Soit $b \in A$. Dans (1), remplaçons x par bx :

(3) $a\, b^3\, u_3(x^{[3]}) + a^2 b^2 u_2\, (x^{[2]}) + a^3 b\, u_1(x) \in H$.

Dans (1), faisons $a = 1$:

(4) $u_3(x^{[3]}) + u_2(x^{[2]}) + u_1(x) \in H$.

Ceci montre que les éléments du type α) sont dans H.

Multiplions (4) par ab^3 et retranchons de (3) :

(5) $ab^2(a-b)u_2(x^{[2]}) + ab(a^2-b^2)u_1(x) \in H$.

Echangeons a et b dans (5) :

(6) $a^2 b\, (b-a)u_2(x^{[2]}) + ab\, (b^2-a^2)u_1(x) \in H$.

Ajoutons (5) et (6) :

(7) $ab(a-b)^2 u_2(x^{[2]}) \in H$.

Faisons $b = 1$:

(8) $a(a-1)^2 u_2(x^{[2]}) \in H$

Changeons, dans (8), a en $1 - a$:

(9) $a^2(1-a)u_2(x^{[2]}) \in H$

Ajoutons (8) et (9):

(10) $(a^2-a)u_2(x^{[2]}) \in H$

Ainsi, les élements de type β) sont dans H.

On déduit de (10) que, pour tout $c \in A$ et tout $n \geqslant 2$, on a:

$c^n u_2 (x^{[2]}) \equiv c\, u_2(x^{[2]})$ modulo H.

Dans la relation (5) le terme contenant $u_2(x^{[2]})$ est donc dans H; on en déduit :

(11) $ab(b^2-a^2)u_1(x) \in H$.

Faisons

(12) $(a^3- a)u_1(x) \in H$.

Ainsi, les éléments de type γ) sont aussi dans H .

Inversement, modulo les éléments β) et γ), tout les générateurs (1) définis au lemme 1 sont proportionnels aux éléments de type α) ; cela démontre le lemme.

<u>Lemme 3</u> : <u>Quels que soient</u> x,y,z <u>dans</u> M <u>et</u> a <u>dans</u> A <u>on a</u> :

(13) $u_3(x^{[2]}y + xy^{[2]}) + u_2(xy) \in H$;

(14) $u_3(xyz) \in H$;

(15) $(a^3-a)u_3(x^{[3]}) \in H$;

(16) $(a^2 -a)u_3 (x^{[2]}y) \in H$

Preuve: (13) s'obtient à partir de (4) en y remplaçant x pour $x + y$;

(14) s'obtient à partir de (13) en y remplaçant y par $y + z$;

(15) s'obtient en multipliant (4) par (a^3-a), en tenant compte de (12) et de (10).

Dans (13), remplacons x par ax :

(17) $a^2\, u_3(x^{[2]}y) + a\, u_3(xy^{[2]}) + a\, u_2(xy) \in H$.

Alors, (16) s'obtient en multipliant (13) par a et en retranchant de (17).

<u>Lemme 4</u> : <u>On a</u>

(18) $\underline{b}_3 \cdot \Gamma_3(M)/I\,\Gamma_3(M) \subset H$

(19) $\underline{b}_2 \cdot \Gamma_2(M)/D_2(I)\Gamma_2(M) \subset H$

(20) $\underline{b}_3 \cdot M/D_3(I)M \subset H$

<u>Preuve</u> : (18) provient de (15), (16) et (14), en remarquant que $\Gamma_3(M)/I\,\Gamma_3(M)$ est engendré par les éléments de l'un des types:

$u_3(x^{[3]})$, $u_3(x^{[2]}y)$, $u_3(xyz)$;

(19) et (20) proviennent du lemme 2, en remarquant que $\Gamma_2(M)/D_2(I)\Gamma_2(M)$ est engendré par les éléments du type $u_2(x^{[2]})$ [car même $u_2(xy) = u_2((x+y)^{[2]} - x^{[2]} - y^{[2]})$] et que $M/D_3(I)$ est constitué des éléments $u_2(x)$.

<u>Lemme 5</u> : <u>Soit le module</u>

$$P' = \Gamma_3(M)/(I+\underline{b}_3)\Gamma_3(M) \oplus \Gamma_2(M)/(I+\underline{b}_2)\Gamma_2(M) \oplus M/(I+\underline{b}_3)M$$

<u>Soient les applications canoniques</u> :

$$v_3 : \Gamma_3(M) \to \Gamma_3(M)/(I+\underline{b}_3)\,\Gamma_3(M);$$

$$v_2 : \Gamma_2(M) \to \Gamma_2(M)/(I+\underline{b}_2)\Gamma_2(M);$$

$$v_1 : \quad M \to M/(I+\underline{b}_3)M$$

<u>Soit</u> H' <u>le sous module de</u> P' <u>engendré par les éléments du type</u>

(21) $v_3(x^{[3]}) + v_2(x^{[2]}) + v_1(x)$

<u>où</u> $x \in M$.

<u>Alors</u>, <u>pour le module</u> Q <u>défini au lemme</u> 1 <u>on a</u> :

$$Q \simeq P'/H'$$

On a en effet $Q = P/H$. Or, en vertu du lemme 4, pour faire le quotient de P par H on peut commencer par faire le quotient de P par le sous module

$$\underline{b}_3\Gamma_3(M)/I\Gamma_3(M) \oplus \underline{b}_2\Gamma_2(M)/D_2(I)\Gamma_2(M) \oplus \underline{b}_3\ M/D_3(I)M\ ,$$

obtenant ainsi le module :

$$\Gamma_3(M)/(I+\underline{b}_3)\Gamma_3(M) \oplus \Gamma_2(M)/(D_2(I)+\ \underline{b}_2)\Gamma_2(M) \oplus M/(D_3(I)+\ \underline{b}_3)M$$

Il ne reste plus ensuite qu'à faire le quotient de ce dernier module par l'image de H, laquelle, d'après le lemme 2, est engendrée par l'image des éléments de type α).

Or on a :

Lemme 6 : i) $D_2(I)+\ \underline{b}_2 = I + \underline{b}_2$

ii) $D_3(I)+\ \underline{b}_3 = I + \underline{b}_3$

iii) $D_2(I)+\ \underline{b}_3 = I + \underline{b}_3$

Preuve : Pour tout entier $m \geq 0$, soit $\underline{b}_m$ l'idéal engendré par les éléments a^m-a; soit $n \leq m$. De $D_n(I) \subset I$, on déduit $D_n(I)+\ \underline{b}_m \subset I + \underline{b}_m$.
Réciproquement, pour tout $i \in I$, on a : $i = (i-i^m)+i^m \in \underline{b}_m+D_n(I)$, d'où l'inclusion inverse. Donc : $D_n(I)+\ \underline{b}_m = I + \underline{b}_m$.
Du lemme 6 résulte que le module-quotient de P considéré ci-dessus est égal à P'; les éléments de type α) de H ont pour image les éléments du type (21), donc l'image de H est H'. Le lemme 5 en résulte.
Relativement au module H', les points (13), (14) et (16) du lemme 3 entrainent les suivants :

Lemme 7 : Quels que soient x,y,z dans M et a dans A on a :

(22) $v_3(x^{[3]}y)+\ v_3(xy^{[2]})+\ v_2(xy) \in H'$;

(23) $v_3(xyz) \in H'$;

(24) $(a^2-a)v_3(x^{[2]}y) \in H'$.

Nous rappelons que tous les résultats qui précèdent ont été établis sans aucune hypothèse particulière sur le module M. A partir de maintenant, nous en faisons une.

<u>Hypothèse valable pour la suite de cet article</u> :

M <u>est une somme directe finie de modules monogènes</u>

(25) $$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \ , \qquad M_i \simeq A/I_i$$

Soit e_i un générateur de M_i .

<u>Lemme 8</u> : <u>On a</u> :

(26) $$\Gamma_3(M) = \bigoplus_i A\, e_i^{[3]} \oplus \bigoplus_{i<j} A\, e_i^{[2]} e_j \oplus \bigoplus_{i<j} A\, e_i e_j^{[2]} \oplus \bigoplus_{i<j<k} A\, e_i e_j e_k$$

<u>Preuve</u> : On a un isomorphisme (cf. [VI], th. III 4, p. 262)

(27) $$\Gamma_3(M) \simeq \bigoplus_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_n=3 \\ 0\le\alpha_i}} \Gamma_{\alpha_1}(M_1) \otimes \dots \otimes \Gamma_{\alpha_n}(M_n) =$$

$$= \bigoplus_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_n=3 \\ 0\le\alpha_i}} Ae_1^{[\alpha_1]} \otimes \dots \otimes Ae_n^{[\alpha_n]}$$

Le module $A\, e_1^{[\alpha_1]} \otimes \dots \otimes Ae_n^{[\alpha_n]}$ au second membre correspond au sous-module $A\, e_1^{[\alpha_1]} \dots e_n^{[\alpha_n]}$ du premier membre ; d'où , pour $\Gamma_3(M)$, une décomposition en somme directe

$$\Gamma_3(M) = \bigoplus_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_n=3 \\ 0\le\alpha_i}} A\, e_1^{[\alpha_1]} \dots e_n^{[\alpha_n]} \ ,$$

qui est précisément celle que fournit le lemme 8

Lemme 9 : i) <u>L'annulateur de</u> $e_i^{[3]}$ <u>est</u> $D_3(I_i)$;

ii) <u>Pour</u> $i \neq j$, <u>l'annulateur de</u> $e_i^{[2]} e_j$ <u>est</u> $D_2(I_i) + I_j$;

iii) <u>Pour</u> $i < j < k$, <u>l'annulateur de</u> $e_i e_j e_k$ <u>est</u> $I_i + I_j + I_k$.

<u>Preuve</u> : Dans l'isomorphisme (27), le sous-module $Ae_i^{[3]}$ de $\Gamma_3(M)$ correspond au module $\Gamma_3(M_i)$; cela démontre i).
Le sous-module $A\, e_i^{[2]} e_j$ de $\Gamma_3(M)$ correpond au module $\Gamma_2(M_i) \otimes M_j \simeq A/D_2(I_i) \otimes A/I_j \simeq A/D_2(I_i) + I_j$, ce qui démontre ii).

Le sous-module $A\, e_i e_j e_k$ correspond au module $M_i \otimes M_j \otimes M_k$, d'annulateur $I_i + I_j + I_k$, d'où iii). Pour le degré 2, on démontrerait de même le

__Lemme 10__ : i) $\Gamma_2(M) = \bigoplus_i A\, e_i^{[2]} \bigoplus_{i<j} A\, e_i e_j$;

ii) __l'annulateur de__ $e_i^{[2]}$ est $D_2(I_i)$;

iii) __l'annulateur de__ e_j est $I_i + I_j$.

Reprenons maintenant la définition du module P' donnée au lemme 5, en tenant compte du lemme 8. Il vient :

$$(28)\quad P' = \bigoplus_i A\, v_3(e_i^{[3]}) \oplus \bigoplus_{i<j} A\, v_3(e_i^{[2]} e_j) \oplus \bigoplus_{i<j} A v_3(e_i e_j^{[2]}) \oplus \bigoplus_{i<j<k} A v_3(e_i e_j e_k) \oplus v_2(\Gamma_2(M)) \oplus v_1(M).$$

Soit S le sous-module de P' engendré par les éléments du type :

$$(29)\quad v_3(e_i^{[3]}) + v_2(e_i^{[2]}) + v_1(e_i) \qquad (i=1,\dots,n\ );$$

Soit S' le sous-module de P' engendré par des éléments du type

$$(30)\quad v_3(e_i^{[2]} e_j) + v_3(e_i\, e_j^{[2]}) + v_2\,(e_i e_j) \qquad (i<j)$$

Posons enfin :

$$S'' = \bigoplus_{i<j<k} A v_3(e_i e_j e_k) \quad\text{et}\quad T = \bigoplus_{i<j} A v_3(e_i e_j{}^{[2]}).$$

__Lemme 11__ . __On a__ :

$$(31)\quad P' = S \oplus S' \oplus S'' \oplus T \oplus v_2(\Gamma_2(M)) \oplus v_1(M).$$

__Preuve__ : En vertu de (28) et de la forme des éléments (29) et (30) , il est clair que :

$$P' = S + S' + S'' + T + v_2(\Gamma_2(M)) + v_1(M)$$

Il reste à prouver que la somme est directe. Soient donc des éléments :

$s \in S$, $s' \in S'$, $s'' \in S''$, $t \in T$, $Z \in v_2(\Gamma_2(M))$, $z \in v_1(M)$, tels que :

(32) $\quad s + s' + s'' + t + Z + z = 0$.

Ecrivons :

$$s = \sum_i \lambda_i (v_3(e_i^{[3]}) + v_2(e_i^{[2]}) + v_1(e_i)) \quad (\lambda_i \in A)$$

Si, relativement à la décomposition (28), on considère la composante de (32) sur $Av_3(e_i^{[3]})$, on obtient : $\lambda_i \, v_3(e_i^{[3]}) = 0$. Donc $\lambda_i e_i^{[3]} \in (I + \underline{b}_3) e_i^{[3]}$. D'après le lemme 9, point i), on a : $\lambda_i \in I + \underline{b}_3 + D_3(I_i)$, équivalent à $\lambda_i \in I + I_i + \underline{b}_3$ [lemme 6, point ii)]. On en déduit $\lambda_i \in I + I_i + \underline{b}_2$ et, de la même manière : $\lambda_i \in I + \underline{b}_2 + D_2(I_i)$. D'où :
$\lambda_i e_i^{[2]} \in (I + \underline{b}_2)\, e_i^{[2]}$ et $\lambda_i v_2\, (e_i^{[2]}) = 0$. Enfin, de $\lambda_i \in I + I_i + \underline{b}_3$ on déduit : $\lambda_i e_i \in (I + \underline{b}_3) e_i$, d'où : $\lambda_i v_1(e_i) = 0$. Finalement, on a : $s = 0$.

Ecrivons maintenant :

$$s' = \sum_{i<j} \lambda_{ij} \, (v_3(e_i^{[2]} e_j) + v_3(e_i e_j^{[2]}) + v_2(e_i e_j)). \quad (\lambda_{ij} \in A).$$

Si, relativement à la décomposition (28), on considère la composante de (32) sur $Av_3(e_i^{[2]} e_j)$ $(i < j)$, on obtient :

$$\lambda_{ij} \, v_3(e_i^{[2]} e_j) = 0 .$$

Donc : $\lambda_{ij} \, e_i^{[2]} e_j \in (I + \underline{b}_3) e_i^{[2]} e_j$.

On en déduit, grâce au lemme 9, point ii):

$$\lambda_{ij} \in I + \underline{b}_3 + D_2(I_i) + I_j$$

Or (lemme 6)

$$I + \underline{b}_3 + D_2(I_i) + I_j = I + \underline{b}_3 + I_i + I_j = I + \underline{b}_3 + I_i + D_2(I_j)$$

Donc, inversement :

$$\lambda_{ij} \, e_i e_j^{[2]} \in (I + \underline{b}_3) \, e_i e_j^{[2]} \quad \text{et}$$

$$\lambda_{ij} \, v_3(e_i e_j^{[2]}) = 0$$

De même (lemme 10, iii):

$$\lambda_{ij}\, e_i e_j \in (I+\underline{b}_3)e_i e_j \subset (I+\underline{b}_2)e_i e_j, \quad \text{d'où :}$$

$$\lambda_{ij}\, v_2\,(e_i e_j) = 0.$$

On a finalement : $s' = 0$.

La relation (32) se réduit alors à :

$$s'' + t + Z + z = 0$$

Grâce à (28) on en déduit immédiatement que $s'' = t = Z = z = 0$. Ceci démontre le lemme 11.

<u>Lemme 12</u> : <u>On a</u> :

$$(33)\quad H' = S \oplus S' \oplus S'' \oplus \underline{b}_2 T .$$

<u>Preuve:</u> En vertu du lemme 11 il suffit de prouver que

$$(34)\quad H' = S + S' + S'' + \underline{b}_2 T$$

On a : $S \subset H'$ car les générateurs (29) de S sont de la forme (21) (lemme 5)

$S' \subset H'$ car les générateurs (30) de S' sont de la forme (22)(lemme 7)

$S'' \subset H'$ et $\underline{b}_2 T \subset H'$ grâce au même lemme 7.

Il reste donc à démontrer l'inclusion de H' dans le second membre de (34). Un élément z quelconque de H' s'écrit : (lemme 5):

$$z = \sum_\alpha \lambda_\alpha \left[v_3(x_\alpha^{[3]}) + v_2(x_\alpha^{[2]}) + v_1(x_\alpha) \right]. \quad (x_\alpha \in M \ ; \ \lambda_\alpha \in A).$$

On peut d'ailleurs, pour simplifier, supposer que $\lambda_\alpha = 1$; en effet $\lambda_\alpha v_3(x_\alpha^{[3]}) = \lambda_\alpha^3\, v_3(x_\alpha^{[3]})$ et $\lambda_\alpha v_2(x_\alpha^{[2]}) = \lambda_\alpha^2 v_2(x_\alpha^{[2]})$; quitte à remplacer x_α par $\lambda_\alpha x_\alpha$, on suppose donc $\lambda_\alpha = 1$. Il existe pour x_α une décomposition:

$$x_\alpha = \sum_i \lambda_{i\alpha} e_i \qquad (\lambda_{i\alpha} \in A)$$

d'où :

$$x_\alpha^{[2]} = \sum_i \lambda_{i\alpha}^2\, e_i^{[2]} + \sum_{i<j} \lambda_{i\alpha}\, \lambda_{j\alpha}\, e_i e_j \ ;$$

$$x_\alpha^{[3]} = \sum_i \lambda_{i\alpha}^3\, e_i^{[3]} + \sum_{i<j} \lambda_{i\alpha}^2\, \lambda_{j\alpha}\, e_i^{[2]} e_j +$$

$$+ \sum_{i<j} \lambda_{i\alpha}\lambda^2_{j\alpha} e_i e_j^{[2]} + \sum_{i<j<k} \lambda_{i\alpha}\lambda_{j\alpha}\lambda_{k\alpha} e_i e_j e_k$$

On en déduit une décomposition de z :

$$z = \sum_{i,\alpha} \lambda^3_{i\alpha} v_3(e_i^{[3]}) + \lambda^2_{i\alpha} v_2(e_i^{[2]}) + \lambda_{i\alpha} v_1(e_i) +$$

$$+ \sum_{i<j,\alpha} \lambda^2_{i\alpha}\lambda_{j\alpha} v_3(e_i^{[2]}e_j) + \lambda_{i\alpha}\lambda^2_{j\alpha} v_3(e_i e_j^{[2]}) +$$

$$+ \lambda_{i\alpha}\lambda_{j\alpha} v_2(e_i e_j) + \sum_{i<j<k,\alpha} \lambda_{i\alpha}\lambda_{j\alpha}\lambda_{k\alpha} v_3(e_i e_j e_k).$$

Le premier Σ, égal aussi à $\sum_{i,\alpha} \lambda_{i\alpha} (v_3(e_i^{[3]}) + v_2(e_i^{[2]}) + v_1(e_i))$

est dans S; le troisieme Σ est dans S".

Considérons le deuxieme Σ. Modulo $\underline{b}_2 T$, le terme $\lambda_{i\alpha}\lambda^2_{j\alpha} v_3(e_i e_j^{[2]})$ est égal à $\lambda^2_{i\alpha}\lambda_{j\alpha} v_3(e_i e_j^{[2]})$.
On a aussi $\lambda_{i\alpha}\lambda_{j\alpha} v_2(e_i e_j) = \lambda^2_{i\alpha}\lambda_{j\alpha} v_2(e_i e_j)$.
[car $\underline{b}_2\, v_2(\Gamma_2(M)) = 0$]. Modulo $\underline{b}_2 T$, le second Σ est donc égal à $\sum_{i<j,\alpha} \lambda^2_{i\alpha}\lambda_{j\alpha} [v_3(e_i^{[2]}e_j) + v_3(e_i e_j^{[2]}) + v_2(e_i e_j)]$, qui est un élément de S'.
Cela démontre le lemme 12

<u>Lemme 13</u> : <u>Pour le module</u> Q <u>défini au lemme</u> 1, <u>on a</u> :

$$(35) \quad Q \simeq T/\underline{b}_2 T \oplus v_2(\Gamma_2(M)) \oplus v_1(M),$$

<u>Preuve</u> : On utilise les lemmes 5, 11 et 12 .

Nous allons maintenant expliciter le second membre de (35). Tout d'abord. :

$$T = \bigoplus_{i<j} A\, v_3(e_i e_j^{[2]}) \simeq \bigoplus_{i<j} (A\, e_i e_j^{[2]})/(I + \underline{b}_3) e_i e_j^{[2]}$$

Comme $\underline{b}_3 \subset \underline{b}_2$, on a : $I + \underline{b}_3 + \underline{b}_2 = I + \underline{b}_2$, donc :

$$T/\underline{b}_2 T \simeq \bigoplus_{i<j} (A\, e_i e_j^{[2]})/(I + \underline{b}_2) e_i e_j^{[2]}$$

Mais aussi : $A\, e_i e_j^{[2]} \simeq A/I_i + D_2(I_j)$ (lemme 9, ii).

Comme $I + \underline{b}_2 + I_i + D_2(I_j) = I_i + I_j + I + \underline{b}_2$ (lemme 6)on a enfin

(36) $T/\underline{b}_2T \simeq \bigoplus_{i<j} A/I_i + I_j + I + \underline{b}_2$.

D'après le lemme (10) on a aussi, et de la même manière :

(37) $$v_2(\Gamma_2(M)) = \bigoplus_i A\, e_i^{[2]}/(I+\underline{b}_2)e_i^{[2]} \oplus \bigoplus_{i<j} Ae_ie_j/(I+\underline{b}_2)e_ie_j$$
$$\simeq \bigoplus_i A/D_2(I_i) + I + \underline{b}_2 \quad \oplus \bigoplus_{i<j} A/I + I_i + I_j + \underline{b}_2$$

avec d'ailleurs : $D_2(I_i) + I + \underline{b}_2 = I_i + I + \underline{b}_2$

Enfin :

(38) $v_1(M) = \sum_i Ae_i/(I+\underline{b}_3)e_i \simeq \sum_i A/I_i+I+\underline{b}_3$.

En portant les résultats de (36), (37) et (38) dans (35) (lemme 13), et de là dans (2) (lemme 1), on obtient le

<u>Lemme 14</u> : <u>Pour le module</u> $M = A/I_1 \oplus \ldots \oplus A/I_n$ <u>et l'idéal</u> I, on a :

$$\widetilde{\Gamma}_4(M \oplus A/I) \simeq \widetilde{\Gamma}_4(M) \oplus \bigoplus_{i<j} A/I_i + I_j + I + \underline{b}_2 \oplus \bigoplus_{i<j} A/I_i + I_j + I + \underline{b}_2$$
$$\oplus \bigoplus_i A/I_i + I + \underline{b}_2 \oplus \bigoplus_i A/I_i+I+\underline{b}_3$$

A partir de là, la démonstration pour récurrence du THEOREME est immédiate.

REFERENCES

[I] PRÓSZYŃSKI A., Some functors related to polynomial theory, Fundamenta Mathematicae XCVIII, 1978 , p. 219-229 .

[II] PRÓSZYŃSKI A., Some functors related to polynomial theory, II, col. sur les formes quadratiques (1977, Montpellier) Bull.Soc.Math. France, Mémoire 59, 1979 , p. 125-129

[III] ROBY N., Sur un foncteur lié aux puissances divisées de degré 3, Problemy Matematyczne z. 5/6 1986 ss. 5-14

[IV] ROBY N., Sur l'algèbre des puissances divisées d'un module monogène, Revista de la Union Matemática Argentina, Volumen 24, Numero 4, 1969, p. 127-141

[V] ROBY N., Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 3è série, t. 80, 1963, p. 213-348

O FUNKTORZE ZWIĄZANYM Z PODZIELONYMI POTĘGAMI STOPNIA 4 MODUŁU

Streszczenie

Niech $\Gamma_n(M)$ oznacza składową jednorodną stopnia n algebry z podzielonymi potęgami $\Gamma(M)$ i niech $\overline{\Gamma}_n(M)$ będzie podmodułem $\Gamma_n(M)$ generowanym przez wszystkie podzielone potęgi $x^{[n]}$ $(x \in M)$. Autor oblicza moduł ilorazowy $\widetilde{\Gamma}_4(M)$ w przypadku, gdy M jest skończoną sumą prostą modułów cyklicznych .