Problemy Matematyczne
13 (1992), 3–12

Współczesna Forma Klasycznych Problemów Teorii Prawdopodobieństwa – "Operatorowe" Rozkłady Graniczne

Andrzej Łuczak

1. Wstęp.

Twierdzenia dotyczące zachowania granicznego ciągu sum niezależnych zmiennych losowych można podzielić na dwie zasadnicze grupy. Klasycznymi przedstawicielami tych grup są: mocne (słabe) prawo wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne. W obu przypadkach mamy dany ciąg niezależnych zmiennych losowych $\{X_n\}$ o jednakowych rozkładach, tworzymy sumę $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, normujemy ją przy pomocy stałych $a_n > 0$, $b_n \in \Re$ i pytamy o zachowanie graniczne ciągu

$$Z_n = a_n S_n + b_n.$$

Przy założeniu, że istnieje wartość oczekiwana $E(X_n) = m$ i wyborze stałych $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = -m$, tak że $Z_n = \frac{1}{n} S_n - m$, otrzymujemy mocne (słabe) prawo wielkich liczb mówiące, że $Z_n \longrightarrow 0$ z prawdopodobieństwem 1 (wg prawdopodobieństwa).

Jeżeli założymy ponadto istnienie wariancji $D^2 X_n = \sigma^2 > 0$ i obierzemy stałe

$$(*) \qquad a_n = \frac{1}{(\sigma n)}, \quad b_n = \frac{-(m\sqrt{n})}{\sigma},$$

tak, że

$$Z_n = \frac{(S_n - ES_n)}{\sqrt{D^2 S_n}},$$

otrzymujemy centralne twierdzenie graniczne mówiące, że

$$P(Z_n < X) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{t^2}{2})dt.$$

Zauważmy, że twierdzeniu temu można nadać następującą "miarową " formę. Dla dwóch miar prawdopodobieństwa μ i ν na $\Re$ ich splot $\mu * \nu$ jest miarą prawdopodobieństwa określoną jako

$$\mu * \nu(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(E - x)\nu(dx)$$

dla borelowskiego podzbioru E przestrzeni $\Re$.
Ponieważ rozkładem sumy niezależnych zmiennych losowych jest splot rozkładów tych zmiennych, zatem przy ν oznaczającym rozkład zmiennej X_n, S_n ma rozkład $\nu * \ldots * \nu$ (n - krotny splot ν ze sobą, oznaczany dalej przez ν^n) i zmienne losowe $a_n S_n + b_n$ mają rozkłady $T_{a_n}\nu * \delta(b_n)$, gdzie $\delta(b)$ jest rozkładem skoncentrowanym w punkcie b (tzn. $\delta(b)(\{b\}) = 1$, $T_a x = ax$ przy ustalonym $a \in \Re \setminus \{0\}$, a rozkład $T_a\lambda$ określany jest jako

$$T_a\lambda(E) = \lambda(T_a^{-1}E) = \lambda(E)$$

dla miary prawdopodobieństwa λ i zbioru borelowskiego E. Jeśli założymy teraz, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \nu(dx) < \infty$$

i oznaczymy

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\nu(dx) = m, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \nu(dx) = \sigma^2,$$

to dla stałych a_n i b_n określonych wzorem (*) (przy założeniu, że $\sigma^2 > 0$) otrzymamy centralne twierdzenie graniczne mówiące, że dystrybuanty rozkładów $T_{a_n}\nu^n * \delta(b_n)$ są zbieżne do dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego. Ta zbieżność dystrybuant jest, jak się okazuje, szczególną formą tzw. słabej zbieżności miar zdefiniowanej jako $\lambda_n \Rightarrow \lambda$, jeżeli

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\lambda_n(dx) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\lambda(dx)$$

dla każdej funkcji ciągłej i ograniczonej f na $\Re$. Jak widać zatem, w dwóch rozważanych powyżej twierdzeniach mamy do czynienia z dwoma różnymi rodzajami zbieżności: w prawie wielkich liczb – ze zbieżnością ciągu funkcyjnego prawie wszędzie (wg miary), w centralnym twierdzeniu granicznym – ze słabą zbieżnością ciągu rozkładów. Zagadnienia dotyczące słabej zbieżności miar prawdopodobieństwa (których szczególnym przypadkiem jest centralne twierdzenie graniczne) prowadzą do teorii rozkładów nieskończenie podzielnych. Niektórym aspektom tej teorii, szczególnie w ich współczesnej postaci, poświęcony jest niniejszy artykuł.

W dalszym ciągu przedmiotem naszych rozważań będą miary (tj rozkłady) prawdopodobieństwa określone na borelowskich podzbiorach przestrzeni euklidesowej $\Re^n$. Każda taka miara μ jest w sposób jednoznaczny wyznaczona przez swoją funkcję charakterystyczną $\widehat{\mu}$ zdefiniowaną wzorem

$$\widehat{\mu}(x) = \int_{\Re^n} \exp\{i(x,y)\}\mu(dy), \quad x \in \Re^N,$$

gdzie $(\cdot,\cdot)$ oznacza standardowy iloczyn skalarny w $\Re^N$. Ponadto, dla operatora liniowego A na $\Re^N$ i miary μ, miara $A\mu$ określona jest jako

$$A\mu(E) = \mu(A^{-1}(E)), \qquad E - \text{ zbiór borelowski.}$$

Nietrudno sprawdzić, że

$$(AB)\mu = A(B\mu), \quad \widehat{A\mu}(x) = \widehat{\mu}(A^*x), \quad A(\mu * \nu) = A\mu * A\nu,$$

gdzie A, B są operatorami liniowymi w $\Re^N$, a μ, ν – miarami prawdopodobieństwa; A^* – jak zwykle oznacza operator sprzężony do A. Ze względu na charakter rozważanych zagadnień będziemy konsekwentnie stosować terminologię odnoszącą się do miar prawdopodobieństwa, a nie do zmiennych losowych. Czytelnik przyzwyczajony do bardziej tradycyjnego ujęcia powinien pamiętać, że splot $\mu_1 * \ldots * \mu_n$ jest niczym innym jak rozkładem sumy zmiennych losowych $X_1 + \ldots + X_n$ takich, że zmiena X_i ma rozkład μ_i, $i = 1, \ldots, n$, a miara $A\mu$ jest rozkładem zmiennej losowej $A \circ X$, gdzie X jest zmienną losową o wartościach w $\Re^N$ i rozkładzie μ.

2. Rozkłady nieskończenie podzielne.

Niech $\{\mu_{nk} : k = 1, \ldots, k_n, n = 1, 2 \ldots\}$ będzie trójkątną macierzą miar prawdopodobieństwa na $\Re^N$. Macierz ta nazywa się jednostajnie infinitezymalna, jeżeli dla dowolnego otoczenia zera U w $\Re^N$ spełniony jest warunek

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \max_{1 \le k \le k_n} \mu_{nk}(\Re^N \setminus U) = 0,$$

Oznaczamy

$$\mu_n = \mu_{n1} * \ldots * \mu_{nk_n}.$$

Poniższe twierdzenie stanowi fundament całej teorii rozkładów granicznych.

Twierdzenie 1 *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *μ jest rozkładem granicznym dla ciągu miar $\mu_n * \delta(h_n)$ przy pewnym ciągu $\{h_n\}$ z $\Re^N$;*

(ii) *dla każdej liczby naturalnej p istnieje rozkład prawdopodobieństwa λ^m na $\Re^N$ taki, że $\mu = \lambda^m$;*

(iii) *funkcja charakterystyczna μ ma postać*

$$\hat{\mu}(x) = \exp\{i(m, x) - \frac{1}{2}(Dx, x) + \int_{\Re^N \setminus \{0\}} [e^{i(x,y)} - 1 - \frac{i(x, y)}{1 + \| y \|^2}] M(dy)\}, \tag{1}$$

gdzie $m \in \Re^N$, D jest operatorem nieujemnym na $\Re^N$, a M jest miarą borelowską na $\Re^N \setminus \{0\}$ taką, że

$$\int_{\Re^N \setminus \{0\}} \min(1, \| y \|^2) \cdot M(dy) < \infty.$$

Ponadto, miara μ jest wyznaczona jednoznacznie przez m, D i M.

Miary μ, o których mówi powyższe twierdzenie nazywane są miarami nieskończenie podzielnymi (nazwa ta jest konsekwencją warunku (ii)). Wzór (1) nazywany jest wzorem Levy'ego-Chinczyna, a miara M miarą spektralną Levy'ego. Ze względu na wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między miarą μ, a trójką m, D, M stosuje się zazwyczaj zapis $\mu = [m, D, M]$ na oznaczenie miary nieskończenie podzielnej μ, której funkcja charakterystyczna dana jest wzorem (1).

3. Rozkłady stabilne, Levy'ego i półstabilne.
W klasycznej teorii rozkładów nieskończenie podzielnych szczególną rolę odgrywają rozkłady graniczne dla ciągów splotów miar "normowanych" pewnymi stałymi liczbowymi. Mówiąc dokładniej, miary μ_{nk} występujące w definicji rozkładów nieskończenie podzielnych mają postać

$$\mu_{nk} = T_{a_n}\nu_k,$$

gdzie $a_n > 0$, a $\{v_n\}$ jest pewnym ciągiem rozkładów prawdopodobieństwa na $\Re^N$. Tak więc

$$\mu_n * \delta(h_n) = T_{a_n}(\nu_1 * \ldots * \nu_{k_n}) * \delta(h_n) \tag{2}$$

i problem dotyczy charakteryzacji rozkładów będących granicami ciągu (2). W następujących trzech przypadkach zagadnienie to zostało rozwiązane:

a) $k_n = n, \quad \nu_n = \nu;$

b) $k_n = n, \quad \nu_n$ – dowolne, $\{T_a\nu_k : \quad k = 1, \ldots, n, \quad n = 1, 2, \ldots\}$ – jednostajnie infinitezymalna;

c) ciąg $\{k_n\}$ spełnia warunek $\frac{k_{n+1}}{k_n} \longrightarrow r, \; 1 \le r < \infty, \; \nu_n = \nu.$

Rozkłady graniczne w powyższych przypadkach nazywają się odpowiednio rozkładami stabilnymi, Levy'ego i półstabilnymi. Okazuje się, że każda z tych klas rozkładów może być scharakteryzowana przez pewne równanie, które spełniają miary należące do danej klasy. Aby przedstawić te równania, zdefiniujemy dla miary nieskończenie podzielnej $\mu = [m, D, M]$ i $t > 0$ miarę μ^t jako miarę nieskończenie podzielną daną przez $\mu^t = [tm, tD, tM]$, tzn taką, dla której $\widehat{\mu^t} = (\hat{\mu})^t$. (Zauważmy, że definicja powyższa jest zgodna z naszym wcześniejszym określeniem miary μ^n jako n-krotnego splotu μ ze sobą). Mamy wtedy:

Twierdzenie 2 *μ jest rozkładem stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: $\alpha \in (0,2], h_t \in \Re^N, dla t > 0$ takie, że*

$$\mu^t = T_{t^\alpha}\mu * \delta(h_t). \tag{3}$$

Twierdzenie 3 *μ jest rozkładem Levy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $c \in (0,1)$ istnieje miara prawdopodobieństwa λ_c taka, że*

$$\mu = T_c\mu * \lambda_c. \tag{4}$$

Twierdzenie 4 *μ jest rozkładem półstabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $a, b \in (0,1)$ i $h \in \Re^N$ takie, że*

$$\mu^a = T_b\mu * \delta(h). \tag{5}$$

Okazuje się, że powyższe wyniki mają naturalne uogólnienia prowadzące do klas rozkładów zawierających odpowiednio rozkłady stabilne, Levy'ego i półstabilne.

4. "Operatorowe" rozkłady graniczne.

Idea uogólnienia wspomnianego na końcu poprzedniego paragrafu jest bardzo prosta i naturalna: mianowicie, polega ona na zastąpieniu operatorów mnożenia T_{α_n} w (2) dowolnymi operatorami liniowymi, odwracalnymi A_n działającymi w $\Re^N$. Tak więc rozpatruje się miary będące granicami ciągów

$$A_n(\nu_1 * \ldots * \nu_{k_n}) * \delta(h_n). \tag{6}$$

Rozkłady graniczne w przypadkach a), b) i c) nazywają się teraz odpowiednio rozkładami operatorowo-stabilnymi, operatorowo-Levy'ego i operatorowo-półstabilnymi. (Odnotujmy, że w przypadkach a) i c) jednostajna infinitezymalność $\{A_n\nu_k\}$ wynika z samego faktu istnienia granicy ciągu (6).) Okazuje się, że również i w tych ogólniejszych przypadkach rozkłady graniczne mogą być scharakteryzowane przez równania analogiczne do równań (3), (4) i (5), przy założeniu, że miara graniczna jest "istotnie N-wymiarowa", innymi słowy-pełna, gdzie przez miarę pełną w $\Re^N$ rozumiemy miarę, która nie jest skoncentrowana na żadnej $(N-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyźnie w $\Re^N$. Mamy zatem następujące charakteryzacje pełnych miar operatorowo-stabilnych, operatorowo-Levy'ego i operatorowo-półstabilnych:

Twierdzenie 5 ([9]) *Niech μ będzie pełna. μ jest rozkładem operatorowo-stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: operator liniowy odwracalny B działający w $\Re^N$ i $h_t \in \Re^N$, $t > 0$ takie, że*

$$\mu^t = e^{B \cdot \ln t}\mu * \delta(h_t). \tag{7}$$

Twierdzenie 6 ([10]) *Niech μ będzie pełna. μ jest rozkladem operatorowo-Levy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje operator liniowy odwracalny Q działający w $\Re^N$ taki, że wszystkie jego wartości własne mają ujemne części rzeczywiste oraz miary prawdopodobieństwa λ_t, $t \geq 0$ takie, że*

$$\mu = e^{tQ}\mu * \lambda_t. \tag{8}$$

Twierdzenie 7 ([3]) *Niech μ będzie pełna. μ jest rozkładem operatorowo-półstabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją: operator liniowy odwracalny A działający w $\Re^N$, $a \in (0,1)$ i $h \in \Re^N$ takie, że*

$$\mu^a = A\mu * \delta(h). \tag{9}$$

Zauważmy, że powyższe rozważania prowadzą do jeszcze jednej interesującej klasy rozkładów. Ponieważ rozkłady operatorowo-stabilne są zawarte zarówno w klasie rozkładów operatorowo-Levy'ego jak i w klasie rozkładów operatorowo-półstabilnych, zatem naturalne wydaje się znalezienie opisu ich "najbliższych krewnych", a mianowicie klasy rozkładów operatorowo-Levy'ego będących jednocześnie operatorowo-półstabilnymi. Opis taki dany jest przez

Twierdzenie 8 ([7]) *Niech μ będzie pełna. μ jest operatorowo-półstabilnym rozkładem operatorowo-Levy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy μ spełnia równanie (8) z operatorem Q jak w twierdzeniu 6, a λ_t są pełnymi rozkładami operatorowo-półstabilnymi dla każdego $t \geq 0$.*

Czytelnikowi świadomemu wielkiej roli funkcji charakterystycznych w teorii prawdopodobieństwa nasuwa się niewątpliwie zasadnicze pytanie: czy przedstawione wyżej klasy rozkładów granicznych dają się scharakteryzować w języku tych funkcji, tzn. czy można podać konkretną postać funkcji charakterystycznej dla rozkładów należących do poszczególnych klas, tak jak to było możliwe dla całej klasy rozkładów nieskończenie podzielnych (twierdzenie 1, wzór (1))? Okazuje się, że opis taki jest możliwy. Ze względu na znaczny stopień komplikacji nie będziemy przytaczać tutaj konkretnych wzorów, ograniczając się jedynie do wskazówek bibliograficznych. Funkcje charakterystyczne rozkładów operatorowo-stabilnych omawiane są w [1], [2], [4], [5], [8], rozkładów operatorowo-półstabilnych — w [6], a operatorowo-półstabilnych rozkładów operatorowo-Levy'ego — w [7]. Na zakończenie tego paragrafu zatrzymajmy się jeszcze nad dwoma podstawowymi problemami dotyczącymi rozkładów prawdopodobieństwa w $\Re^N$, a mianowicie nad istnieniem gęstości i momentów omawianych miar. Jak się okazuje, zarówno rozkłady operatorowo-Levy'ego jak i operatorowo-półstabilne (a zatem i operatorowo-stabilne) są absolutnie ciągłe względem miary Lebesgue'a w $\Re^N$ (patrz [11] dla rozkładów operatorowo-Levy'ego i [6] dla rozkładów operatorowo-półstabilnych). Zagadnienie istnienia momentów zostało rozstrzygnięte dla rozkładów operatorowo-półstabilnych (a zatem i operatorowo-stabilnych): rozkłady te mają momenty rzędu γ skończone dla $\gamma < \delta$ i nieskończone dla $\gamma \geq \delta$, gdzie δ jest liczbą związaną z własnościami spektralnymi operatora A w równaniu (9) (patrz [6]).

5. Uwagi końcowe.

Naszkicowana wyżej teoria "operatorowych" rozkładów granicznych jest dziedziną stosunkowo młodą - zapoczątkowana została ona pracą [9] w 1969r. Po dokonaniu opisu poszczególnych klas miar w języku równań spełnianych przez odpowiednie rozkłady oraz w języku funkcji charakterystycznych skoncentrowano się na badaniu konkretnych własności odpowiednich klas rozkładów. Jako przykłady takich własności można wymienić - poza przykładami przedstawionymi na końcu poprzedniego paragrafu - symetrię rozkładów, istnienie niezależnych rozkładów brzegowych, przedstawienia całkowe, związki z procesami o przyrostach niezależnych, zagadnienia dotyczące "przyciągania" itd. Teoria ta znalazła również dalsze uogólnienia na przypadek nieskończenie wymiarowy. Omówienie chociażby części tej problematyki w artykule takim, jak niniejszy, mającym przede wszystkim informacyjno-poglądowy charakter, jest zarówno niemożliwe, jak i niecelowe. Autor chciał jedynie zwrócić uwagę na to, w jaki sposób klasyczne zagadnienia teorii rozkładów nieskończenie podzielnych prowadzą - po ich naturalnym uogólnieniu - do nowych, interesujących rezultatów.

Bibliografia

[1] Hudson W. N., Jurek Z. J., Veeh J. A., *The symmetry group and exponents of operator stable probability measures*, Ann. Probab. 14 (1986), 1014-1023,

[2] Hudson W. N., Mason J. D., *Operator stable laws*, J. Multivariate Anal. 11 (1981), 434-447,

[3] Jajte R., *Semi-stable probability measures on* $\Re^N$, Studia Math. 61 (1977), 29-30,

[4] Jurek Z. J., *Remarks on operator stable probability measures*, Comm. Math. 21 (1979), 71-74,

[5] Kucharczak J., *Remarks on operator stable measures*, Colloq. Math. 34 (1975), 109-119,

[6] Łuczak A., *Operator semi-stable probability measures on* $\Re^N$, Colloq. Math. 45 (1981), 287-300, Corrigenda to "Operator semi-stable probability measures on $\Re^N$ " ibidem 52 (1987), 167-169,

[7] Łuczak A., *Operator-semistable operator Levy's measures on finite dimensional vector spaces*, Probab. Theory Related Fields 90 (1991), 317-340

[8] Schmidt K., *Stable probability measures on* $\Re^N$, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 33 (1975), 19-31,

[9] Sharpe M., *Operator stable probability distributions on vector groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 136 (1969), 51-65,

[10] Urbanik K., *Levy's probability measures on Euclidean spaces*, Studia Math. 44 (1972), 119-148,

[11] Yamazato M., *OL distributions on Euclidean spaces*, Teor. Verojatnost. i Primen. 29 (1984), 3-18.

UNIWERSYTET ŁÓDZKI
INSTYTUT MATEMATYKI
Banacha 22
90-238 Łódź, Poland

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
INSTYTUT MATEMATYKI
Chodkiewicza 30
85-064 Bydgoszcz, Poland