ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1988 z.10

ZBIGNIEW GRANDE
WSP w Bydgoszczy

QUELQUES REMARQUES SUR LES FONCTIONS PRESQUE CONTINUES

Soient R l'espace des nombres réels et $I \subset R$ un intervalle compact, nondégénéré. Une fonction $f:I \longrightarrow R$ est dite presque continue lorsque, quel que soit l'ensemble ouvert $U \subset I \times R$ contenant le graphe $G(f)$ de la fonction f, il existe une fonction continue $g: I \longrightarrow R$ dont le graphe $G(g)$ est contenu dans U (v. [5]). Dans l'article [4] Kellum a prouvé que toute fonction $f: I \longrightarrow R$ (même $f:R \longrightarrow R$) est la somme de deux fonctions presque continues et la limite de certaine suite de fonctions presque continues. Dans cet article je prouve que:

- toute fonction mesurable (ayant la propriété de Baire)[mesurable et avec la propriété de Baire] est la somme de deux fonctions et la limite de certaine suite de fonctions à la fois mesurables (ayant la propriété de Baire) [mesurables et ayant la propriété de Baire] et presque continues;

- toute fonction (fonction mesurable) [fonction ayant la propriété de Baire] {fonction mesurable avec la propriété de Baire} $f:I \longrightarrow R_+ - \{0\}$ est le produit de deux fonctions presque continues (presque continues, mesurables)[presque continues avec la propriété de Baire] {presque continues, mesurables et avec la propriété de Baire} ;

- toute fonction $f:I \longrightarrow R$ est la limite de certaine suite transfinie de fonctions à la fois mesurables, ayant la propriété de Baire et presque continues,; et

- il existe une fonction $f: [0,1]^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections $f_x(t) = f(x,t)$ et $f^y(t) = f(t,y)$ continues et n'étant pas presque continue.

Rappelons que l'ensemble $A \subset I \times R$ est dit un ensemble bloquant pour certaine fonction $f:I \longrightarrow R$ lorsqu'il est fermé, $A \cap G(f) = \emptyset$ et $A \cap G(g) \neq \emptyset$ pour toute fonction continue $g:I \longrightarrow R$. Un ensemble bloquant A est minimal pour la fonction $f:I \longrightarrow R$ lorsque $A \subset B$ pour tout ensemble bloquant B de la fonction f (v. [5]). On sait que la fonction $f:I \longrightarrow R$ n'est pas presque continue si et seulement s'il existe un ensemble bloquant minimal de f dont la projection $P_x(A)$ sur l'axe OX est un intervalle nondégénéré (v. [5]).

Lemme. Il existe un ensemble $B \subset I$ du type F_σ et de mesure zéro tel que l'intersection de B avec tout intervalle ouvert $K \subset I$ est de puissance du continu.

Preuve. Rangeons tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles de l'intervalle I en une suite

$$I_1, I_2, \dots, I_n, \dots \quad (I_i \neq I_j \text{ lorsque } i \neq j \text{ ; } i,j=1,2,\dots).$$

Dans tout intervalle I_n ($n=1,2,\dots$) il existe un ensemble de Cantor $A_n \subset I_n$ de mesure zéro et tel que $A_n \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = \emptyset$.

L'ensemble

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

satisfait à toutes les conditions exigées.

Théorème 1. Si $f: I \longrightarrow R$ est une fonction, il existe des fonctions $g,h : I \longrightarrow R$ presque continues et telles que $f = g + h$ et les ensembles $\{x \in I;\ f(x) \neq g(x)\}$ et $\{x \in I;\ h(x) \neq 0\}$ sont de mesure zéro et de première catégorie.

Preuve. La famille de tous les ensembles bloquant minimals dans $I \times R$ est de puissance du continu. Soit

$A_1, A_2, \ldots A_\alpha, \ldots$ ($\alpha < \omega_1$ et ω_1 est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu) une suite transfinie de tous les ensembles bloquant minimals telle que $A_\alpha \neq A_\beta$ lorsque $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta < \omega_1)$.

Soient (x_1, u_1) et (y_1, v_1) des points de l'ensemble A_1 tels que $x_1 \neq y_1$ et $x_1, y_1 \in B$, où B est l'ensemble du lemme. Fixons le nombre ordinal $\alpha < \omega_1$ $(\alpha > 1)$ et supposons que des points (x_β, y_β), $(y_\beta, v_\beta) \in A_\beta$ sont déjà définis pour $\beta < \alpha$ et que $x_\beta, y_\beta \in B$, $x_\beta \neq x_\gamma$, $x_\beta \neq y_\gamma$, $y_\beta \neq x_\gamma$, $y_\beta \neq y_\gamma$ pour $\gamma < \beta < \alpha$. L'ensemble $P_x(A_\alpha) \cap B$ est de puissance du continu, il existe des points (x_α, u_α), $(y_\alpha, v_\alpha) \in A_\alpha$ tels que $x_\alpha \neq y_\alpha$ et $x_\alpha, y_\alpha \neq x_\beta, y_\beta$ pour $\beta < \alpha$.

Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } x \notin \{x_\alpha;\ \alpha < \omega_1\} \cup \{y_\alpha;\ \alpha < \omega_1\} \\ u_\alpha & \text{lorsque } x = x_\alpha;\ \alpha < \omega_1 \\ f(x) - v_\alpha & \text{lorsque } x = y_\alpha;\ \alpha < \omega_1 \end{cases}$$

et

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \notin \{y_\alpha \,;\, \alpha < \omega_1\} \cup \{x_\alpha \,;\, \alpha < \omega_1\} \\ v_\alpha & \text{lorsque } x = y_\alpha \,;\, \alpha < \omega_1 \\ f(x) - u_\alpha & \text{lorsque } x = x_\alpha \,;\, \alpha < \omega_1. \end{cases}$$

Évidemment $f = g + h$. Les fonctions g et h sont presque continues, puisque leurs graphes coupent tous les ensembles bloquant minimals. On voit également que

$$\{x \in I;\ g(x) \neq f(x)\} \subset B \quad \text{et} \quad \{x \in I;\ h(x) \neq 0\} \subset B.$$

L'ensemble B est de mesure zéro et de premiere catégorie, la preuve est donc achevée.

Corollaire 1. Toute function $f: I \longrightarrow R$ (mesurable) [avec la propriété de Baire] {mesurable et avec la propriété de Baire} est la somme de deux fonctions presque continues et (mesurables) [avec la propriété de Baire] {mesurables et avec la propriété de Baire}.

Problème 1. Toute fonction borélienne /de classe α de Baire $(\alpha > 1)$) doit-elle être la somme de deux fonctions boréliennes /de classe α de Baire/ et presque continues?

Dans le cas $\alpha = 1$ la réponse est affirmative /v. [1] et [2] /.

Théorème 2. Toute fonction /fonction mesurable/ [ayant la propriété de Baire] {fonction mesurable et ayant la propriété de Baire} $f: I \longrightarrow R_+ - \{0\}$ est le produit de deux fonctions /fonctions mesurables/ [ayant la propriété de Baire] {fonctions mesurables et ayant la propriété de Baire} et presque continues.

Preuve. En conservant les désignations de la preuve du théorème 1, il suffit de poser

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \notin \{x_\alpha ; \alpha < \omega_1\} \cup \{y_\alpha ; \alpha < \omega_1\} \\ u_\alpha & \text{pour } x = x_\alpha ; \alpha < \omega_1 \\ f(x)/v_\alpha & \text{pour } x = y_\alpha ; \alpha < \omega_1 \end{cases}$$

et

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \notin \{x_\alpha ; \alpha < \omega_1\} \cup \{y_\alpha ; \alpha < \omega_1\} \\ v_\alpha & \text{lorsque } x = y_\alpha ; \alpha < \omega_1 \\ f(x)/u_\alpha & \text{lorsque } x = x_\alpha ; \alpha < \omega_1 . \end{cases}$$

On peut également donner une autre preuve /proposée par Natkaniec/ En effet, si $k = \ln f$, alors $k = l + m$, où les fonctions k, l sont presque continues /et de même mesurables comme f/ et

$$f = e^k = e^{l+m} = e^l e^m .$$

Puisque les functions e^l et e^m sont presque continues /v. [5]/, la preuve est achevée.

Remarque 1. Il existe des certaines fonctions $f: I \longrightarrow R$ qui ne sont les produits d'aucunes fonctions presque continues /v. [1] et [3] /.

Probleme 2. Toute fonction borélienne /de classe α de Baire/ $f: I \longrightarrow R_+ - \{0\}$ doit-elle être le produit de deux fonctions boréliennes /de classe α de Baire/ presque continues?

Théorème 3. Si $f: I \longrightarrow R$ est une fonction, il existe une suite de fonctions presque continues $f_n: I \longrightarrow R$ /n = 1,2,.../ telles que chacun des ensembles $\{x \in I;\ f_n(x) \neq f(x)\}$ (n = 1,2,...) est de première catégorie et de mesure zéro.

Preuve. Soient $B \subset I$ l'ensemble du lemme et

$$A_1, A_2, \dots, A_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \omega_1)$$

une suite transfinie de tous les ensembles bloquant minimals telle que $A_\alpha \neq A_\beta$ lorsque $\alpha \neq \beta$.

Il existe pour $k = 1,2,\dots$ et $\alpha < \omega_1$ des points $(x_k^\alpha, y_k^\alpha) \in A_\alpha \cap B$ tels que $x_k^\alpha \neq x_l^\beta$ pour $\alpha \neq \beta$ ou $k \neq l$.

Posons, pour $n = 1,2,\dots$,

$$f_n(x) = \begin{cases} y_k^\alpha & \text{lorsque } x = x_k^\alpha \text{ ; } k=n, n+1, \dots \text{ et } \alpha < \omega_1 \\ f(x) & \text{au cas resté .} \end{cases}$$

Toute fonction f_n $(n = 1,2,\dots)$ est presque continue,

$$\{x \in I : f(x) \neq f_n(x)\} \subset \{x_k : k=n, n+1, \dots \text{ et } \alpha < \omega_1\} \cap B$$

et $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. La preuve est donc achevée.

Puisque l'ensemble B est de première catégorie et de mesure zéro, on a:

Corollaire 2. Toute fonction mesurable /ayant la propriété de Baire/ [mesurable et ayant la propriété de Baire] est la limite de certaine suite de fonctions mesurables /ayant la propriété de Baire/ [mesurables et yant la propriété de Baire] et presque continues.

Problème 3. Toute fonction borélienne /de classe $\alpha \geq 2$ de Baire/ $f: I \to R$ doit-elle être la limite de certaine suite de fonctions boréliennes /de classe α de Baire/ et presque continues?

Théoreme 4. Soit $C \subset I$ un ensemble nonvide, dénombrable. Si $f_1 : C \to R$ est une fonction, il existe une fonction $f: I \to R$ mesurable, ayant la propriété de Baire, presque continue et telle que $f(x) = f_1(x)$ pour tout $x \in C$.

Preuve. Soit

$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \omega_1)$

une suite transfinie de tous les ensembles bloquant minimals telle que $A_\alpha \neq A_\beta$ lorsque $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta < \omega_1)$. Soit B l'ensemble du lemme. Il existe un point $(x_1, f(x_1)) \in A_1$ tel que $x_1 \in B - C$. Fixons le nombre ordinal $\alpha < \omega_1$ $(\alpha > 1)$ et supposons que, quel que soit le nombre ordinal $\beta < \alpha$, il existe un point $(x_\beta, f(x_\beta)) \in A_\beta$ tel que $x_\beta \in B - C - \{x_\gamma : \gamma < \beta\}$. Puisque l'ensemble $P_x(A_\alpha) \cap B$ est de puissance du continu et puisque le nombre ordinal α est de puissance plus petite que continu, il existe un point $(x_\alpha, f(x_\alpha)) \in A_\alpha$ tel que $x_\alpha \in B - C - \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{lorsque } x \in C \\ f(x_\alpha) & \text{lorsque } x = x_\alpha \ ; \ \alpha < \omega_1 \\ 0 & \text{lorsque } x \in I - C - \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}. \end{cases}$$

Le graphe $G(f)$ coupe tous les ensembles bloquant, minimals A_α $(\alpha < \omega_1)$, la fonction f est donc presque continue. Puisque

$\{x \in I : f(x) \neq 0\} \subset B \cup C$,

la fonction f est mesurable et possède la propriété de Baire. Évidemment $f(x) = f_1(x)$ pour tout point $x \in C$. La preuve est donc achevée.

Rappelons maintenant la notion suivante:

Une suite transfinie $\{f_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ de fonctions $f_\alpha : I \to R$ est dite convergente au point x vers $f(x)$ $\left(\lim\limits_{\alpha \to \omega_1} f_\alpha(x) = f(x)\right)$ lorsqu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un indice ordinal $\beta < \omega_1$ tel que $|f_\alpha(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $\beta \leq \alpha < \omega_1$. (v. [8]).

Théorème 5. Admettons l'hypothese du continu. Toute fonction $f: I \longrightarrow R$ est la limite de certaine suite transfinie de fonctions mesurables et avec la propriété de Baire $f_\alpha : I \longrightarrow R$ $(\alpha < \omega_1)$.

Preuve. Soit

$$a_1, a_2, \ldots, a_\alpha \ \ldots \ ; \quad \alpha < \omega_1$$

une suite transfinie des nombres réels de l'intervalle I telle que $a_\alpha \neq a_\beta$ lorsque $\alpha \neq \beta$ $(\alpha, \beta < \omega_1)$.

Posons, pour $\alpha < \omega_1$,

$$C_\alpha = \{a_\beta : \beta \leq \alpha\} \quad \text{et} \quad f_\alpha = f/C_\alpha \quad .$$

D'après le théorème 4, il existe pour toute function f_α $(\alpha < \omega_1)$ une fonction $g_\alpha : I \longrightarrow R$ presque continue, mesurable, avec la propriété de Baire et telle que $g_\alpha(x) = f_\alpha(x) = f(x)$ pour $x \in C_\alpha$. On voit facilement que $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \omega_1} g_\alpha(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ et la preuve est achevée.

Problème 4. Toute fonction $f: I \longrightarrow R$ doit-elle être la limite de certaine suite transfinie du type ω_1 de fonctions boréliennes et presque continues?

On voit facilement que la fonction presque continue $f: I^2 \longrightarrow R$ /la définition de la presque continuité des fonctions de deux variables est la même que celle pour les fonctions d'une variable/ possède également toutes ses sections $f_x(t) = f(x,t)$ et $f^y(t) = f(t,y)$ presque continues. Je montre un exemple de fonction $f: [0,1]^2 \longrightarrow R$ ayant toutes les sections f_x et f^y continues et n'étant pas presque continue.

Exemple. Soit

$$A = \{(x,y) : 0 < x \leq 1 \ \text{ et } \ x/2 \leq y \leq 3x/2\} \ .$$

L'ensemble

$$B = \{(x,y) : 0 < x \leq 1 \text{ et } y = x/2 \text{ ou } y = x \text{ ou } y = 3x/2\}$$

étant fermé dans A (dans la topologie euclidienne) et la fonction

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } (x,y) \in B \text{ et } y = x \\ 0 & \text{lorsque } (x,y) \notin B \text{ et } y \neq x \end{cases}$$

étant continue dans B, d'apres le théorème de Tietze ([6], p.117), il existe une fonction continue et bornée $f_2 : A \longrightarrow R$ telle que $f_2/B = f_1$. Posons

$$f(x,y) = \begin{cases} f_2(x,y) & \text{pour } (x,y) \in A \\ 0 & \text{pour } (x,y) \in [0,1]^2 - A . \end{cases}$$

On voit facilement que f est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ et que toutes les sections f_x et f^y sont continues.

Démontrons encore que la fonction f n'est pas presque continue.

Dans ce but posons

$$U = [0,1/2) \times [0,1] \times (-1/4, 1/4)$$

et

$$V = \{(x,y,z) \in [0,1]^2 \times R ; \ 0 < x \leq 1 , \ 0 < y \leq 1 \text{ et } f(x,y) - 1/4 < z < f(x,y) + 1/4\} .$$

L'ensemble U est ouvert dans $[0,1]^2 \times R$. Puisque la fonction f est continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$, l'ensemble V est aussi ouvert. L'ensemble $U \cup V$ est ouvert dans $[0,1]^2 \times R$ et $G(f) \subset U \cup V$. Si $g : [0,1]^2 \longrightarrow R$ est une fonction continue telle que $G(g) \subset U \cup V$, alors la fonction

$$h(x) = g(x,x) \quad (x \in [0,1])$$

est aussi continue et

$$G(h) \subset U_1 \cup V_1 ,$$

où

$$U_1 = \{(x,y) : 0 \leq x < 1/2 \text{ et } -1/4 < y < 1/4\}$$

et

$$V_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 3/4 < y < 5/4\}.$$

Chacun des ensembles U_1 et V_1 est ouvert dans $[0,1] \times R$ et coupe $G(g)$, le graphe $G(g)$ ne peut pas etre connexe, en contradiction avec la continuité de la fonction g. La fonction f n'est pas donc presque continue.

TRAVAUX CITÉS

[1] J.B.Brown, Almost continuous Darboux functions and Reed's pointwise convergence criteria, Fund.Math.86 (1974) , pp. 249-253

[2] A.M.Bruckner, J.G.Ceder, R.Keston, Representations and approximations by Darboux functions in the first class of Baire, Revue.Roum. Pures et Appl.13 (1968) , pp 1247-1254

[3] J.G.Ceder, On factoring a function into a product of Darboux functions, Rend. Circ. Mat. Palermo 31 (1982) , pp.16-22

[4] K.R.Kellum, B.D.Garrett, Almost continuous real functions, Proc.Amer.Math.Soc. 33 (1972) , pp. 181-184

[5] K.R.Kellum, Sums and limits almost continuous functions, Colloq.Math. 31 (1974) , pp. 125-128

[6] C.Kuratowski, Topologie I, Warszawa PWN 1958

[7] S.Marcus, Sur la réprésentation d'une fonction arbitraire par des fonctions juissant de la propriété de Darboux, Trans.Amer.Math.Soc.35 (1966) , pp.484-494

[8] W.Sierpiński, Sur les suites transfinies convergentes de fonctions de Baire, Fund.Math. 1 (1920) , pp. 132-141

KILKA UWAG O FUNKCJACH PRAWIE CIĄGŁYCH

Streszczenie

Niech R będzie zbiorem liczb rzeczywistych oraz $I \subset R$ pewnym przedziałem zwartym. W tym artykule pokazujemy, że każda funkcja $f: I \longrightarrow R$ mierzalna (L) lub z własnością Baire'a jest sumą, iloczynem lub granicą ciągu takich samych funkcji prawie ciągłych, że każda funkcja jest granicą pozaskończonego ciągu funkcji prawie ciągłych, mierzalnych (L) i z własnością Baire'a oraz że istnieje funkcja $f: I^2 \longrightarrow R$ mająca wszystkie cięcia f_x i f^y ciągłe i nie będąca prawie ciągłą.