

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY  
Problemy Matematyczne 1988 z.10

STANISŁAW SZYMAŃSKI

WSP w Bydgoszczy

GEOMETRIE LOKALNIE EUKLIDESOWE

1. Określenie geometrii lokalnie euklidesowej

Punktem wyjścia do rozważań jest następujące określenie geometrii Df. 1 Geometrią nazywamy strukturę  $\Sigma = (\mathcal{G}, \mathcal{I})$  składającą się z pewnego zbioru  $\mathcal{G}$  oraz odwzorowania  $\mathcal{I} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$  przy czym spełnione są własności:

A 1. Para  $(\mathcal{G}, \mathcal{I})$  jest przestrzenią metryczną.

A 2. Dla każdych dwóch elementów  $A, B \in \mathcal{G}$  i dwóch liczb dodatnich  $\alpha, \beta$  istnieje skończona ilość  $n$  elementów  $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathcal{G}$  takich, że

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left[ \mathcal{I}(P_i, P_{i+1}) - \mathcal{I}(A, B) \right] < \alpha \quad \text{i} \quad \mathcal{I}(P_i, P_{i+1}) < \beta$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n-1$  oraz  $P_1 = A$  i  $P_n = B$ .

Df 2. Dwie geometrie  $\Sigma_1 = (\mathcal{G}_1, \mathcal{I}_1)$  i  $\Sigma_2 = (\mathcal{G}_2, \mathcal{I}_2)$  nazywamy równoważnymi jeżeli

1. istnieje odwzorowanie bijektywne  $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ ,

2.  $\bigwedge_{A, B \in \mathcal{G}_1} \mathcal{I}_1(A, B) = \mathcal{I}_2(f(A), f(B))$ .

Odzworowanie  $f$  będziemy nazywali funkcją nałożenia geometrii  $\Sigma_1$  na geometrię  $\Sigma_2$ .

Terminu funkcja nałożenia będziemy także używać w przypadku gdy jej dziedziną nie jest cały zbiór  $S_1$ , lecz tylko pewne figury rozważanej geometrii.

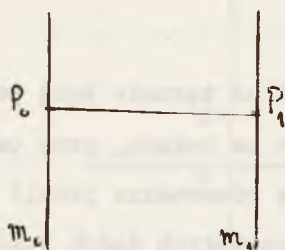
Spośród geometrii spełniających własności A1 i A2 analizować będziemy te geometrie  $\Sigma = (S, f)$ , w których spełniona będzie własność A3. Istnieje liczba  $r > 0$  taka, że dla każdego punktu  $A \in S$  istnieje funkcja nałożenia  $f$  otoczenia kołowego  $K(A, r)$  na otoczenie  $K(f(A), r)$  płaszczyzny euklidesowej  $\Pi$ .

Df 3. Geometrię, w której spełniona jest własność A3 nazywamy geometrią lokalnie euklidesową.

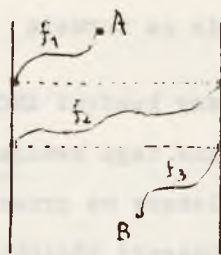
Poniżej scharakteryzujemy krótko cztery podstawowe geometrie lokalnie euklidesowe.

### Geometria na cylindrze

Za zbiór punktów tej geometrii przyjmujemy pas płaszczyzny euklidesowej o krawędziach  $m_0, m_1$ , przy czym punkty leżące na krawędziach będziemy uważali za równoważne jeżeli można je połączyć odcinkiem prostopadłym do nich. /Rys.1/. Odległość między punktami A i B pasa równa jest długości najkrótszej z linii, które rozpadają się na krzywe rozłączne  $f_1, f_2, \dots, f_n$  tak, że  $f_1$  zaczyna się w punkcie A,  $f_n$  kończy się w punkcie B, zaś  $f_i$  kończy się i  $f_{i+1}$  zaczyna się w punktach równoważnych ( $n > 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ). Dla  $n = 1$  linia  $f$  jest krzywą  $f_1$  łączącą punkty A i B. Linię  $f$  dla  $n = 3$  zobrazowano na rysunku drugim.



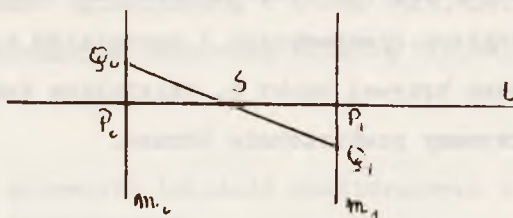
Rys. 1



Rys. 2

### Geometria na skręconym cylindrze

Niech na płaszczyźnie euklidesowej dany będzie pas o krawędziach  $m_0, m_1$  oraz prosta  $l$  prostopadła do nich. Przez  $P_0$  i  $P_1$  oznaczamy punkty przecięcia prostej  $l$  odpowiednio z prostą  $m_0$  i  $m_1$ . Przez  $S$  oznaczamy środek odcinka  $P_0P_1$ . Wówczas za punkty naszej geometrii przyjmijmy punkty wewnętrzna pasa oraz krawędzi, przy czym dwa punkty leżące na krawędzi  $m_0$  i  $m_1$  będą równoważne jeżeli można połączyć je odcinkiem przechodzącym przez punkt  $S$ . /Rys. 3/.



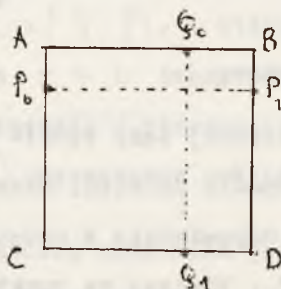
Rys. 3

Odległość między punktami w tej geometrii określona jest w sposób analogiczny jak w geometrii na cylindrze. Biorąc pod uwagę ograniczony pas płaszczyzny i sklejjąc go w punktach równoważnych otrzymamy wstęgę Möbiusa. Widzimy więc, że powierzchnie skręconego cylindra stanowi wstęgę Möbiusa o nieskończonej szerokości.

### Geometria na torusie

Rozpatrzmy kwadrat ABCD. Punktami geometrii na torusie będą punkty wewnętrzne tego kwadratu oraz punkty leżące na bokach, przy czym punkty leżące na przeciwległych bokach będą równoważne jeżeli można je połączyć odcinkiem równoległym do pozostałych dwóch boków.

/Rys. 4/.



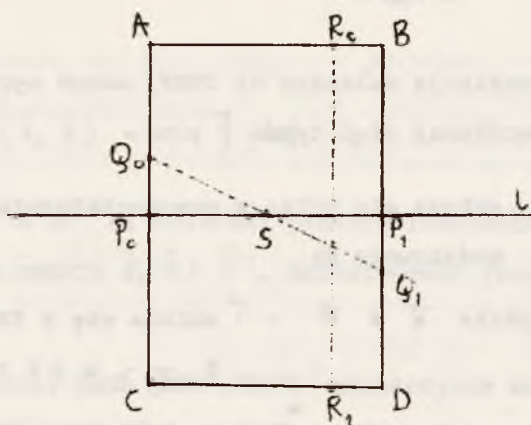
Rys. 4

Odległość między dwoma punktami A i B realizowana jest również po linii najkrótszej  $f$ , która może składać się ze skończonej ilości krzywych rozłącznych  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , gdzie  $f_1$  kończy się, a  $f_{i+1}$  zaczyna się w punktach równoważnych i początkiem krzywej  $f_1$  jest punkt A, zaś końcem krzywej punkt B. Sklejając kwadrat w punktach równoważnych otrzymamy powierzchnię torusa.

### Geometria na butelce Kleina

Niech dany będzie prostokąt ABCD, prosta  $l$  będąca symetralną boków AC i BD. Oznaczmy przez  $P_0$  i  $P_1$  punkty przecięcia prostej  $l$  z tymi bokami oraz niech  $S$  oznacza środek odcinka  $P_0 P_1$  /Rys. 5/.

Punktami geometrii na butelce Kleina będą punkty wewnętrzne prostokąta ABCD oraz punkty jego boków z tym, że punkty leżące na bokach



Rys. 5

AB i CD są równoważne jeżeli można połączyć je odcinkiem równoległym do pozostałych boków, zaś punkty boków AC i BD są wówczas równoważne jeżeli można połączyć je odcinkiem przechodzącym przez punkt S. Odległość między dwoma punktami określona tak samo jak w wyżej wymienionych geometriach.

Sklejając boki AB i CD prostokąta ABCD w punktach równoważnych otrzymamy cylinder ograniczony. Z kolei sklejając brzozy cylindra w punktach równoważnych otrzymamy butelkę Kleina.

## 2. Konstrukcja geometrii lokalnie euklidesowych w oparciu o przekształcenia izometryczne

Df 4. Grupę  $\Gamma$  przekształceń izometrycznych płaszczyzny euklidesowej nazywamy jednostajnie nieciągłą grupą przekształceń izometrycznych JNGPI jeżeli spełniona jest własność

$$(1) \quad \bigvee_{d > 0} \bigwedge_{F \in \Gamma} \bigwedge_{\substack{X, F(X) \in \bar{U} \\ X \neq F(X)}} |X - F(X)| \geq d$$

Tw. 1. Ze względu na translacje należące do JNGPI można wyróżnić /z dokładnością do izomorfizmu/ pięć typów  $\Gamma$ :

a/  $\Gamma = [E]$  - składa się tylko z przekształcenia tożsamościowego E;

b/  $\Gamma = [T_{\vec{a}}]$ , gdzie  $\vec{a} \neq \vec{0}$  -  $\Gamma$  składa się z translacji  $T_{m\vec{a}}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ;

c/  $\Gamma = \left[ S_{\vec{a}}^{\frac{\pi}{2}} \right]$ , gdzie  $\vec{a} \neq \vec{0}$  -  $\Gamma$  składa się z translacji  $T_{m\vec{a}}$  i symetrii z poślizgiem  $T_{n\vec{a}} S_1^{\frac{\pi}{2}}$  i  $m, n \in \mathbb{Z}$ ;

d/  $\Gamma = [T_{\vec{a}}, T_{\vec{b}}]$  gdzie  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  są wektorami niekolinearnymi -  $\Gamma$  składa się z translacji  $T_{\vec{x}}$ , gdzie  $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$  i  $m, n \in \mathbb{Z}$ ;

e/  $\Gamma = \left[ S_1^{\frac{\pi}{2}}, T_{\vec{a}} \right]$  gdzie  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$  -  $\Gamma$  składa się z translacji  $T_{\vec{x}}$  i symetrii z poślizgiem  $T_{\vec{x}} S_1^{\frac{\pi}{2}}$ , gdzie  $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$  i  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

gdzie w nawiasach kwadratowych zawarte są generatory grup.

Z kolei na punktach płaszczyzny euklidesowej  $\mathbb{T}$  określimy relację równoważności " $\sim$ " tak, aby spełniona była własność

$$(2) \quad \begin{array}{l} \bigwedge \\ d > 0 \\ A, B \in \mathbb{T} \\ A \neq B \end{array} \quad \left( A \sim B \Rightarrow |AB| \geq d \right)$$

Interesować nas będą te relacje równoważności, które pozwalają w oparciu o przestrzeń ilorazową  $\mathbb{T}/\sim$  i odległość określoną

wzorem

$$(3) \quad \tilde{\mathcal{G}}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \min \left\{ |AB| \quad ; \quad A \in /A, B \in /B \right\},$$

gdzie  $/A$  i  $/B$  są zbiorami punktów równoważnych wyznaczających odpowiednio punkty  $\tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{G}}$ , skonstruować geometrię lokalnie euklidesową.

Tw. 2. Jeżeli dana jest JNGPI  $\Gamma$  płaszczyzny euklidesowej  $\Pi$  oraz relacja równoważności punktów zdefiniowana jest w następujący sposób

$$(4) \quad (A \sim B) \Leftrightarrow \bigvee_{F \in \Gamma} F(A) = B,$$

to zachodzi własność (2) i  $\Sigma_{\Gamma} = (\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{G}})$  jest geometrią lokalnie euklidesową.

Z twierdzenia 1 i 2 wynika, że istnieje pięć typów geometrii lokalnie euklidesowych  $\Sigma_{\Gamma}$ .

Zgodnie z (4) punkt  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{G}}$  geometrii  $\Sigma_{\Gamma}$  jest wyznaczony przez orbitę  $/A$  generowaną przez punkt  $A$ . Stąd wynika, że dla zadania zbioru wszystkich punktów  $/orbit/ \tilde{\mathcal{G}}$  geometrii  $\Sigma_{\Gamma}$  wystarczy podać na płaszczyźnie pewien obszar o własnościach:

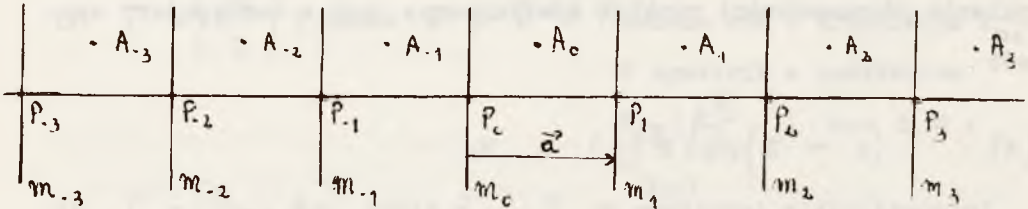
- 1/ obszar zawiera punkty każdej orbity;
- 2/ wewnątrz obszaru nie leżą dwa różne punkty tej samej orbity -  
takie punkty mogą leżeć tylko na brzegu obszaru.

Obszar płaszczyzny posiadający w/w własności nazywamy fundamentalnym obszarem grupy  $\Gamma$ .

I tak dla grupy  $\Gamma = [E]$  obszarem fundamentalnym jest cała płaszczyzna  $\Pi$ , a  $\Sigma_{\Gamma}$  stanowi geometrię euklidesową. Jeżeli  $\Gamma = [\Gamma_{\mathcal{G}}]$ ,

$T_{\vec{a}}$ , to fundamentalnym obszarem tej grupy jest pas płaszczyzny o krawędziach  $m_0$  i  $m_1$  i szerokości  $|\vec{a}|$ , a odpowiadająca geometria  $\sum_{\Gamma}$  jest równoważna geometrii na cylindrze. Łatwo zauważyć, że punkt  $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{G}}$  stanowi orbitę  $\mathcal{A}$  punktów leżących na prostej równoległej do wektora  $\vec{a}$  w odstępach  $|\vec{a}|$  /Rys. 6/,

tj.  $\mathcal{A} = \{ \dots A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, A_3, \dots \}$



Rys. 6

Inaszej  $\mathcal{A} = O_A(\Gamma) = \{g(A); g \in \Gamma\}$ , gdzie  $\Gamma = [T_{m\vec{a}}]$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Aby znaleźć  $\tilde{\rho}(\tilde{A}, \tilde{B})$  należy dowolny punkt  $B \in \mathcal{B}$  zrzutować na prostą zawierającą punkty orbity  $\mathcal{A}$ . Wówczas rzut tego punktu będzie zawarty między punktami  $A_k$  i  $A_{k+1}$  i  $\tilde{\rho}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \min\{|BA_k|, |BA_{k+1}|\}$ .

Nie trudno wykazać, że jeżeli  $r < \frac{|\vec{a}|}{4}$ , to

$$\bigwedge_{S \in \mathbb{N}} \bigwedge_{A, B \in K(S, r)} |AB| = \tilde{\rho}(\tilde{A}, \tilde{B}), \quad A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B}.$$

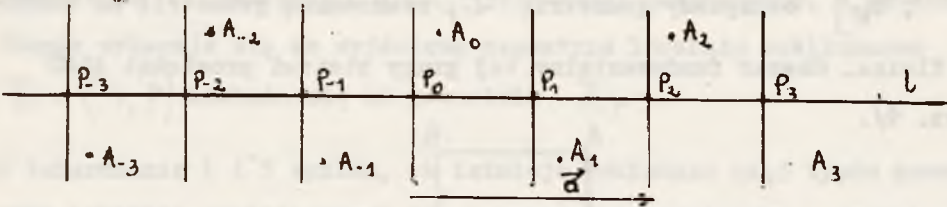
gdzie  $\tilde{A}, \tilde{B}$  są wyznaczone przez orbity  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{B}$ . Z kolei

$\Gamma = [S_1^{\vec{a}}]$  odpowiada geometria  $\sum_{\Gamma}$  równoważna geometrii na cylindrze skręconym. Każdy punkt  $\tilde{A}$  tej geometrii wyznaczony jest przez orbitę



$$/A = O_A(\Gamma) = \{ g(A); g \in \Gamma \}, \text{ gdzie } \Gamma = \left[ S_1^{\frac{p_i}{q_i}} \right].$$

/Rys. 7/

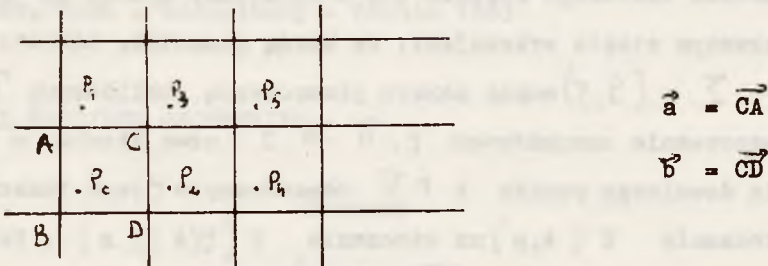


Rys. 7

Na rysunku 7 orbita  $/A$  jest generowana przez dowolny swój punkt np.  $A_0$  za pomocą translacji  $T_{m\vec{a}}$  i symetrii z poślizgiem  $T_{n\vec{a}} S_1^{\frac{p_i}{q_i}}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Odległość euklidesowa punktów dowolnego koła o promieniu  $r < \frac{|\vec{a}|}{8}$  jest równa odległości w sensie definicji 3.

W przypadku gdy  $\Gamma = [T_{\vec{a}}, T_{\vec{b}}]$ , otrzymamy geometrię równoważną geometrii na torusie. Punkty tej geometrii są wyznaczone przez zbiory punktów równoważnych ze względu na translację

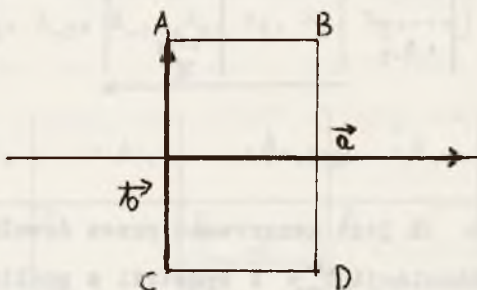
$T_{m\vec{a}} + n\vec{b}$ , gdzie  $m, n \in \mathbb{Z}$  /Rys. 8/



Rys. 8

Odległość euklidesowa punktów koła o dowolnym środku i promieniu

$r < \frac{|\vec{a}|}{4}$  jest równa odległości  $\tilde{r}$  w  $\Sigma_r$ . Natomiast gdy  $\Gamma = [S_1^{\vec{a}}, T_{\vec{b}}]$  otrzymamy geometrię  $\Sigma_r$  równoważną geometrii na butelce Kleina. Obszar fundamentalny tej grupy stanowi prostokąt ABCD /Rys. 9/.



Rys. 9

### 3. Klasyfikacja geometrii lokalnie euklidesowych

**Tw. 3** Każdą geometrię lokalnie euklidesową można nałożyć na jedną z pięciu geometrii  $\Sigma_r$ .

Dowód twierdzenia trzeciego rozpada się w naturalny sposób na trzy etapy. W pierwszym etapie wykazujemy, że każdą geometrię lokalnie euklidesową  $\Sigma = (G, \rho)$  można nakryć płaszczyznę euklidesową  $\Pi$  tj. istnieje odwzorowanie surjektywne  $\varphi: \Pi \rightarrow G$  oraz liczba  $s > 0$  takie, że dla dowolnego punktu  $A \in \Pi$  odwzorowanie  $\varphi$  jest funkcją nałożenia otoczenia  $K(A, s)$  na otoczenie  $K(\varphi(A), s)$ . Powyższe nakrycie oznaczymy symbolem  $(\Pi, \Sigma, \varphi)$  lub krótko  $\varphi$ . W drugim etapie za pomocą nakrycia  $\varphi: \Pi \rightarrow G$  określimy równoważność punktów płaszczyzny  $\Pi$ :

$$\bigwedge_{A, B \in \Pi} (A \sim B) \Leftrightarrow (\varphi(A) = \varphi(B))$$

i konstruujemy grupę  $\Gamma$  nakrycia  $(\Pi, \Sigma, \varrho)$ , tj. wyznaczamy zbiór wszystkich przekształceń izometrycznych  $F$  płaszczyzny  $\Pi$ , które odwzorowują każdy punkt płaszczyzny  $\Pi$  na punkt mu równoważny. Oczywiście  $\Gamma$  nakrycia  $(\Pi, \Sigma, \varrho)$  jest JNGPJ płaszczyzny. W ostatnim etapie wykazuje się że wyjściowa geometria lokalnie euklidesowa  $\Sigma = (\mathcal{G}, \mathcal{G})$  nakłada się na geometrię  $\Sigma_r$ .

Z twierdzenia 1 i 3 wynika, że istnieje dokładnie pięć typów geometrii lokalnie euklidesowych tj. geometrii wymienionych w punkcie 1.

Powyższy artykuł powstał głównie w oparciu o pracę [1] i jest interesującą propozycją dydaktyczną zarówno dla studentów jak i nauczycieli matematyki szkół średnich.

#### LITERATURA

- 1 W.W.Nikulin, J.R.Szafarewicz, "Geometrii i grupy" Moskwa - Nauka - 1983
- 2 A.Berdon, "The Geometry of Discrete Groups" Springer - Verlag, New York - Heidelberg - Berlin 1983

#### LOCAL EUCLIDES GEOMETRIES

##### Summary

In this article the author characterized local Euclides geometries. He gave a construction of these geometries with the aid of the uniformly discontinuous groups of isometric applications, He proved also that every local Euclides geometry is equivalent with some geometry constructed in this way.