ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1988 z.10

THADDAUS MARIAN JĘDRYKA
WSP w Bydgoszczy

ZUM BEWEISEN MATHEMATISCHER AUSSGREN

1. Einleitung

Die Mathematik bildet eine Einheit. Die Unterschiedlichkeit ihrer Methoden folgt aus der Verschiedenheit der mathematischen Gegenstände. Ihre Einheitlichkeit und Geschlossenheit gründet sich auf den mathematischen Beweis, welcher sich auf einheitliche Grundsätze der mathematischen Logik, besonders auf die Sätze der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik stützt.

Wenn also die Geschlossenheit der Mathematik in der Methode des mathematischen Beweises begründet ist, so ist erkennbar, dass die Sicherheit in der Führung von Beweisen mathematischer Aussagen genau so wichtig ist wie die Mathematisierung der Gegenstände der Mathematik. Die Mathematisierung der mathematischen Objekte sichert die Universalität der Anwendung der Mathematik, dagegen ist der Beweis das Fundament für die Geschlossenheit, Sicherung und logische Einheit der mathematischen Methoden.

Daraus folgen Rolle und Bedeutung der Entwicklung einer Gewandtheit im Beweisen mathematischer Aussagen.

Wie soll man nun die Beweiskunst entwickeln? Natürlich zunächst auf klassische Weise. das heisst über die Demonstration von Beweisen ma-

thematischer Sätze während mathematischer Vorlesungen und anderer Mathematiklehrveranstaltungen. Jedoch nicht immer achtet das ganze Auditorium darauf, woraus die Beweiskunst besteht.
Was spielt nun beim Führen von Beweisen mathematischer Aussagen eine Rolle? Was erleichtert die Aneignung und Beherrschung der Beweiskunst? In diesem Bereich Hilfe zu leisten, ist eine Aufgabe der Mathematikdidaktik. Sie erfüllt eine dienende Rolle im Mathematikunterricht, muss also auch auf Methoden des Beweisens mathematischer Aussagen im Unterricht hinweisen.

Wenn wird diese Rolle durch die Mathematikdidaktik erfüllt?

1. dann, wann sie die nötige Gewandtheit beim Beweisen mathematischer Aussagen klar formuliert und hervorhebt und
2. dann, wenn sie dem Beweisen mathematischer Aussagen das Rätselhafte nimmt, also die Beweisschritte motiviert und deutlich erscheinen lässt.

Aus diesem Grunde werden wir einige praktische Hinweise geben. Ihre Anwendung kann es erleichtern, sich die Beweiskunst anzueignen und sie zu beherrschen. Diese Hinweise sind natürlich Binsenweisheiten für jeden Mathematiker. Sie sollen jedoch nicht dem Spezialisten dienen, sondern dem Mathematikstudenten und zukünftigen Mathematiklehrer. Wir werden die Hinweise in zwei Gruppen vorstellen und stellen deshalb zwei Fragen.

2. Praktische Hinweise für den Beweisunterricht

Erste Frage: Welches sind die Voraussetzungen für das Beweisenkönnen?

A. Kenntnis der Grundbegriffe der Mathematik und ihrer Axiomatik. Kenntnis der abgeleiteten Begriffe und früher bewiesenen Sätze. Vergegenwärtigen der eingeführten Definitionen neuer Begriffe.

B. Kenntnis der Beweistheorie, besonders der Beweisformen: direkter Beweis, indirekter Beweis sowie Beweis von Sonderfällen mathematischer Aussagen, Beweis mit Hilfe von Fallunterscheidung.

Dazu das Vergegenwärtigen der Beweisformen der wichtigsten mathematischen Sätze sowie der Beweisformen bei analogen Problemen.

C. Eine gewisse Gewandtheit bei der Formulierung von Ausdrücken und Aussagen in der Umgangssprache sowie die Fähigkeit, mathematischen Aussagen der Aussagenlogik äquivalent zu formulieren. Insbesonders muss man mathematische Aussagen in die implikative Form bringen können; allgemein muss man sie umformulieren können.

D. Kenntnis der mathematischen Symbolik sowie Sicherheit in der Darstellung eines Beweises durch lineare Motierung oder mit Hilfe eines Grafen.

E. Die Fähigkeit, eine geeignete Beweismethode auswählen zu können: direkter oder indirekter Beweis oder Beweis durch Vollständige Induktion.

Jetzt stellen wir die zweite Frage:

Was hilft beim Führen von Beweisen?

I. Begriffe, die in Voraussetzung, Behauptung und im Beweisverlauf auftreten, ersetze man durch ihre Bestimmungen.

II. In dem Falle, dass man es mit einigen äquivalenten Definitionen eines Begriffes zu tun hat, wähle man diejenige aus, welche den Weg der Schlussfolgerungen verkürzt oder weitere Schlussfolgerungen erleichtert.

III. Statt der Definition von Begriffen verwende man ihre Kriterien, z.B. Kongruenzkriterien für Dreiecke oder Ähnlichkeitssätze für Dreiecke.

IV. Führt man den direkten Beweis, verändere und ersetze man die Voraussetzung so, bis der Behauptung erreicht ist.

V. Findet man den Beweisgedanken durch Rückwärtsarbeiten, verändere und ersetze man die Behauptung so, bis man an die Voraussetzung herantritt.

VI. Bei einem apagogischen /indirekten/ Beweis bemühe man sich, so schnell wie möglich zum Widerspruch zu gelangen.

VII. Man verwerte sämtliche Voraussetzungen der mathematischen Aussage. Im anderen Fall muss man die Formulierung der Aussage verändern.

VIII. Man kenne und vermeide Fehlerquellen und -arten, die bei der Beweisführung möglich sind.

Wie wir uns der oben formulierten Hinweise bedienen sollen, wird an angefügten Beweisbeispielen ersichtlich. Weil der Beweisunterricht jedoch nicht leicht /schriftlich zu fixieren/ zu notieren ist, halten wir es nicht für angebracht, bei den einzelnen Beweisschritten hinzuzufügen, welchen Hinweis wir jeweils angewandt haben. Wir nutzen bei jedem Schritt selbstverständlich alle Hinweise A, B, C, D, E.

Das illustrieren folgende Beispiele:

3. Beweisbeispiele

Beispiel 1.

Beweis der Aussage: $3+2=5$

Hilfsbeweis. Wir beweisen zuerst die folgende Aussage:

$$(1 \in N_0) \wedge (2 \in N_0) \wedge (3 \in N_0) \wedge (4 \in N_0) \wedge (5 \in N_0).$$

Diese Aussage folgt sofort nach Definitionen:

Def 1/ $1=\text{seq}0$, Def 2/ $2=\text{seq}1$, Def 3/ $3=\text{seq}2$, Def 4/ $4=\text{seq}3$,

Def 5/ $5=\text{seq}4$ und die Peanoaxiomen: (1) $0 \in N_0$

(2) $\bigwedge_n \left[n \in N_0 \implies \bigvee_{\text{seqn}} (\text{seqn} \in N_0)\right]$

(3) $\bigwedge_n \left[n \in N_0 \implies \text{seqn} \neq 0\right]$

(4) $\bigwedge_n \bigwedge_m \left[(n \in N_0) \wedge (m \in N_0) \wedge (\text{seqn} = \text{seqm}) \implies (n=m)\right]$

(5) $\bigwedge_W \left[W/0/ \wedge \bigwedge_n \left((n \in N_0) \wedge (W/n/ \implies W/\text{seqn}/)\right) \implies \bigwedge_n (n \in N_0 \implies W/n)\right]$

Wir haben also

$$\frac{\begin{array}{ll} 0 \in N_0 & \\ 0 \in N_0 \implies \text{seq}0 \in N_0 & \end{array}}{\text{seqo} \in N_0} \qquad \begin{array}{l} \text{nach } (1) \\ \text{nach } (2) \end{array}$$

Also nach Def 1/ $\text{seq}0 = 1 \in N_0$.

Wenn wir wiederholen noch 4 mal dieses Verfahren, erhalten wir den Beweis unserer Aussage.

Jetzt geben wir noch zwei Definitionen:

Def 6/ $n + 0 = n$ und Def 7/ $n + \text{seqm} = \text{seq}\ (n + m)$

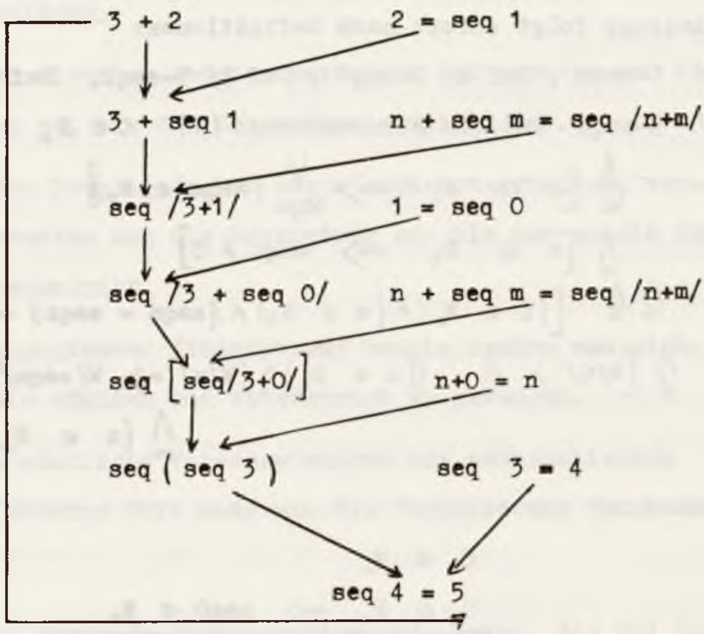
Beweis die Aussage /Linearnotierung /

$$3 + 2 = 3 + \text{seq}1 \Big|_{\text{Def } 2/} = \text{seq}\ /\ 3 + 1\ / \Big|_{\text{Def } 7/} = \text{seg}\ /3 + \text{seq}0/ \Big|_{\text{Def } 2}$$

$= \text{seg seg}/3 + 0/\Big|_{\text{Def } 7/} = \text{seg seg } 3\Big|_{\text{Def } 6/} = \text{seg } 4\Big|_{\text{Def } 4/} =$

$= 5\Big|_{\text{Def } 5/}$ .q.e.d.

Derselbe Beweis /Notirung mit Hilfie einnes Graphen



Beispiel 2.

Es ist zu beweisen: $\bigwedge_{n} \left(n \in N \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$ für $q \neq 1$.

Beweis.

Die Aussageform $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ wurde mit A/n/ bezeichnet.

a) Induktionbeginn:

Es gilt A/1/ , denn $\sum_{k=1}^{1} q^{k-1}$ bedeutet $q^{1-1} = q^0 = 1$, was mit der rechten Seite $\frac{1 - q^1}{1 - q} = 1$ übereinstimmt.

b) Schluss von n auf /n + 1/ :

Annahme: Es gilt A/n/, für beliebige naturliche n.

Folgerung: $\sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1}$ bedeutet $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + q^n$ und das läst sich unter obigen Annahme umformen zu.

Das ist ein klassisches Beispiel für den Beweis mit Hilfe der vollständigen Induktion.

$$\frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n = \frac{1 - q^n + q^n/ 1-q/}{1 - q} = \frac{1 - q^n + q^n - q^{n+1}}{} =$$

$$= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{. Also gilt } \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

d.h. A/n + 1/ .

Aus /a/ und /b/ und deswegen weil am Grunde Peanoaxion /5/ A/n/ $\Longrightarrow$ A/n+1/ läst sich generalisieren zu $\bigwedge_n$ (A/n $\Longrightarrow$ A /n+1/) folgt die Bechauptung. q.e.d.

Beispiel 3. /Vergl. Lit. [4] /

Es ist zu beweisen die folgende Aussage:

Das geometrische Mittel zweier nicht negativer reeller Zahlen a und b ist höchstens gleich deren arithmetischem Mittel.

Wir führen den Beweis zunächst direkt.

Voraussetzung: $a , b \in R , a , b \geqslant 0.$

Behauptung: $\sqrt{ab} = \frac{1}{2} (a + b) .$

Beweis.

$0 \leqslant (a - b)^2$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$4ab \leq (a + b)^2$$

$$2\sqrt{ab} \leq a + b$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b) \quad \text{q.e.d.}$$

Diese Beweismethode ist hier insofern unbefriedigend, als der Beginn unmotiviert erscheint. Warum setzen wir ausgerechnet $0 \leq (a - b)^2$? Das wird sofort klar, wenn wir den Beweis indirekt führen. Also Voraussetzung und Behauptung wie oben.

Beweis.

Wir negieren die Behauptung. Wir nehmen an, es gelte $\sqrt{ab} > \frac{1}{2}(a+b)$.

Dan gilt

$$2\sqrt{ab} > a + b$$

$$4\,ab > a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 > a^2 - 2ab + b^2$$

$$0 > (a - b)^2 .$$

Dieses Ergebnis steht in Widerspruch zu der Tatsache, dass das Quadrat der Differenz zweier Zahlen niemals negativ ist.

Wir wenden die Regel der Kontraposition an:

$$\text{Aus} \quad \underbrace{0 \leq (a - b)^2}_{\substack{\text{Widerspruch}\\ \text{negiert}}} \quad \text{folgt} \quad \underbrace{\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)}_{\substack{\text{Annahme negiert}\\ \text{also Behauptung wahr}}} \quad . \quad \text{q.e.d.}$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $a = b$ ist.

Man könnte auf den Gedanken kommen, den "Beweis" wie folgt direkt zu führen:

Beweis:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$$

$2\sqrt{ab} \leq (a + b)$

$4ab \leq (a + b)^2$

$0 \leq (a - b)^2$. q.e.d.

Wir haben in jedem Falle äquivalente Umformmungen vorgenommen, und $0 \leq (a - b)^2$ ist für je zwei (nicht negative) Zahlen eine wahre Aussage.

Trotzdem ist das ein Scheinbeweis, denn wir sind bei der Beweisführung von der Behauptung ausgegangen. Diese hätte ebensogut falsch sein können. Niemand wurde auf den Gedanken kommen, dass etwa $(-3) = +3$ wäre, obwohl aus der falschen Aussage $(-3) = +3$ durch Quadrieren die wahre Aussage $9 = 9$ folgt. So ein Fehler in Beweis heisst petitio principii.

Beispiel 4.

Es ist zu beweisen: $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2x}$

Voraussetzung: Für alle $x \in R$ gilt $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

Behauptung: Für alle $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ und $n \in N_0$ gilt:

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2x} = \sin 2x.$$

Beweis:

Für alle $x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1)$ gilt:

$$\frac{2\operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}^2x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2x}} \Longleftrightarrow 2\,\frac{\sin x}{\cos x}\,\cos^2x \Longleftrightarrow 2\sin x\cos x \Longleftrightarrow \sin 2x$$

Das ist nach Voraussetzung eine wahre Aussage. Also ist wegen der Umformungen in eine äquivalente Aussage die Behauptung eine wahre Aussage. q.e.d.

Beispiel 5.

Es ist zu beweisen: Eine Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ mit Gliedern beliebigen Vorzeichens konvergiert, wenn die zugehörige Reihe der absoluten Beträge: $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$ konvergiert.

Beweis.

Am Grunde des Cauchysche Konvergenzkriterium wir haben

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}| < \varepsilon \qquad \bigwedge_{\varepsilon > 0} \text{ für alle } m,n > N(\varepsilon)$$

Aber die Ungleichheit gilt:

$$|u_1 + u_2 + \quad u_k| \leq |u_1| + |u_2| + \dots \quad + |u_k| \text{ , k beliebig.}$$

Nach obige Ungleichheit wir erhalten sofort dass Cauchykonvergenz Kriterium gilt d.h.

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \quad + a_{n+m}| < |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+m}| < \varepsilon$$

Also die Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ konvergiert. q.e.d.

4. Schlussbemerkungen

Die angeführten Beispiele von Beweisen lassen erkennen, wie man sich auf die oben formulierten praktischen Hinweise stützen kann. Die Anwendung der Hinweise, besonders während des Beweisunterrichts, erleichtern dem Lernenden die selbständige Führung von Beweisen mathematischer Aussagen in Übungsstunden und Seminaren sowie bei der Anfertigung seiner Diplomarbeit und in Prüfungen. Darin sehen wir eine Begründung des Lehrens von Beweismethoden mit Hilfe praktischer Hinweise.

Trotz Anwendung dieser Hinweise bleibt jedoch beim heutigen Stand der Beweistheorie das Führen von Beweisen mathematischer Aussagen nach wie vor eine Kunst. Darauf verweisen bis jetzt nicht bewiesene mathematische Aussagen wie z.B. die Goldbach typothesis (Goldbachsche Vermutung) : "Jede gerade Zahl grösser als 4 ist eine Summe zweier ungerader Primzahlen" oder die Fermat hypothesis (Formatsche Vermutung):

$$\bigwedge_{x,y,z,n} \left[(n > 2) \Longrightarrow \left(x^n + y^n \neq z^n \right) \right]$$

Die Aufgabe der Mathematikdidaktik erschöpft sich nicht im Beseitigen von Schwierigkeiten im mathematischen Unterricht, also auch nicht bei der Beweisführung, sondern sie besteht auch in der Vermittlung von Methoden, die den Lehrgang erleichtern, also auch solcher zum Führen von Beweisen mathematischer Aussagen. Eine solche Rolle der Erleichterung mögen die praktischen Hinweise im Beweisunterricht spielen, besonders in den ersten Jahren des Mathematiklehrgangs. Darum sind sie oben formuliert.

LITERATUR

[1] H.Lenné, Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1969

[2] Autorenkollektiv, Einführung in die mathematische Logik, Einführung in die Mengenlehre, Aufbau der Zahlenbereiche. Volle und Wissen Volkseigener Verlage Berlin 1972

[3] Autorenkollektiv, Samlung mathematischer Aufgaben mit Lösungen Volle Volk und Wissen Volkeigener Verlag Berlin 1976

[4] H,Starke, W.Türke, Fachtheoretische Grundlegen des Geometrieunterrichts B.2 Volk und Wissen Volkseigener Verlag Berlin 1974

[5] H.Duda i inni, Podstawowe zagadnienia dydaktyki matematyki Warszawa PWN 1982

[6] Z.Krygowska, Zarys dydaktyki matematyki cz. 1,2,3, Warszawa WSiP 1977

[7] S.Neapolitanski, Zarys dydaktyki matematyki, Warszawa PZWS 1958

[8] B.Nowecki, S.Turnau, Jak uczyć dowodzenia twierdzeń, Matematyka nr 2, 125 /1973/

[10] J.Musielak, Wstęp do matematyki, Warszawa PWN 1970

[11] H.Rasiowa, Wstęp do matematyki współczesnej, Warszawa PWN 1968

[12] A.Mostowski, Logika matematyczna. Mon.Matem. Warszawa, Wrocław 1948

[13] W.A.Pogorzelski, J.Słupecki, O dowodzie matematycznym, Warszawa PZWS 1962

[14] W.Wilkosz, Arytmetyka liczb całkowitych, Kraków 1932

[15] N.W.Mietielskij, Dodaktika matiematiki, Mińsk 1975

[16] A.A.Stolar, Pedagogika matiematiki, Mińsk 1974

[17] A.A.Stolar, Logiczeskoje wwiedienie w matiematiku. Izdat. Wyszszejszaja Szkoła Mińsk 1971

O DOWODZENIU TWIERDZEŃ MATEMATYCZNYCH

Streszczenie

W opracowaniu zostały sformułowane truistyczne rady praktyczne, którymi można się kierować przy nauczaniu i uczeniu się dowodzenia twierdzeń matematyki zarówno uniwersyteckiej jak i szkolnej. Rady te zostały zilustrowane klasycznymi przykładami. Podaje się wybraną literaturę, którą autor opracowania studiował przed sformułowaniem tych dziesięciu rad praktycznych.