ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z.4

Grigorij Bugajenko
Czerkasy

Walter Wegner
Bydgoszcz

ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА УПРАВЛЯЮТ ДВИЖЕНИЕМ ПЛАНЕТ

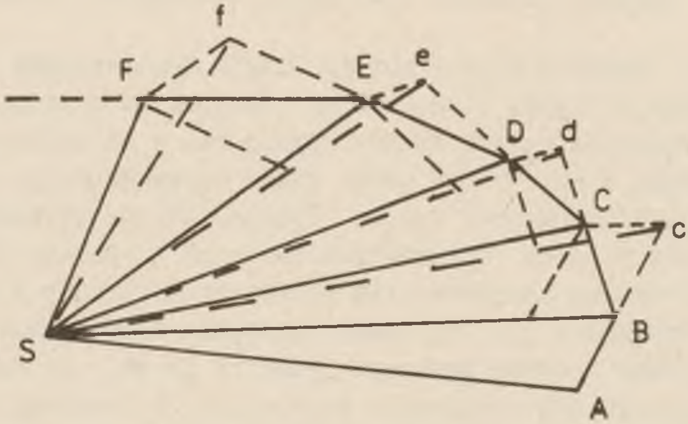
Законы движения планет вокруг Солнца были открыты Иоганном Кеплером в период 1609-1619 гг. История их открытия является примером удивительного трудолюбия и настойчивости в продвижении к намеченной цели: найти математическую схему, лежащую в основе системы планет. Располагая исключительно точными по тому времени наблюдениями датского астронома Тихо Браге о положении планет за два десятилетия, Кеплер в течение долгих шестнадцати лет неустанно продолжал свои бесчисленные и утомительные пробные расчеты, несмотря на то, что они годами не приносили ему ожидаемого результата. В конечном счете титанический труд Кеплера увенчался полным успехом. Это первый в истории механики случай, когда точные законы движения тел были открыты путем математической обработки данных наблюдений за положением этих тел.

Законы Кеплера сыграли выдающуюся роль в истории науки, они способствовали окончательной победе учения Николая Коперника о гелиоцентрической системе мира и послужили И.Ньютону основой для открытия закона всемирного тяготения. В свою очередь законы Кеплера Ньютону удалось вывести теоретически, пользуясь созданной им динамикой.

ЗАКОН ПЛОЩАДЕЙ

Планета движется в неподвижной /относительно звезд/ плоскости так, что площадь, описываемая радиусом, проведенным от планеты к Солнцу, возрастает пропорционально времени /второй закон Кеплера/.

Доказательство. Разделим время на равные промежутки Δt, и пусть в течение первого из них тело по инерции описывает прямую АВ /рис.I/. Если бы оно не подвергалось никакому действию, то, продолжая идти по прямой, оно пришло бы к c /по закону инерции/, пройдя путь Bc, равный АВ, и тогда описанные радиусами AS, BS, cS, проведенными к центру сил S, площади ASB и BSc равны.



Этот абзац и рис.I взяты из работы И.Ньютона, известной под названием: "Начала"[I]. Представляет интерес проследить за дальнейшим ходом мысли гениального ученого.

В действительности же, когда тело пришло в В, то пусть на него подействовала центростремительная сила одним, но зато большим натиском, вследствие которого тело отклонится от прямой Ас и будет продолжать свой путь по прямой ВС. Проведем прямую сС параллельно BS до встречи в точке С с ВС, тогда к концу второго промежутка времени тело придет в точку С, лежащую в одной плоскости с треугольником ASB. Проведи SC; по

I."Начала" - сокращенное название фундаментального труда по механике английского ученого И.Ньютона: "Математические начала натуральной философии".

параллельности SB и Cc площади треугольников SBC и SBc будут равны между собой, а следовательно они равны и площади треугольника SAB [2].

И.Ньютон заканчивает свое доказательство так. Рассуждая подобным же образом, увидим, что если центростремительная сила действует последовательно в точках С, Д, Е и т.д. и заставляет тело описывать прямые СД, ДЕ, Е и т.д., то все эти прямые будут лежать в одной плоскости, и площади треугольников SCD и SBC, SDE и SCD, SEF и SDE будут между собою равны. Следовательно, в равные времена описываются равные площади, расположенные в неподвижной плоскости. Слагая получим, что какие угодно суммы этих площадей, как $SADS$ и $SAFS$ будут относиться, как времена их описания. Увеличивая затем число треугольников и уменьшая их высоту бесконечно, получим, что в пределе периметр $АДF$ будет кривою линией и центростремительная сила, которою тело отклоняется все время от касательной к этой кривой, действует непрестанно, площади же $SADS$ и $SAFS$ описываемые радиусом, оставаясь постоянно пропорциональными временам их описания, будут в пределе этим временам пропорциональны.

Приведенное здесь решение хорошо иллюстрирует метод Ньютона - чисто геометрический, вообще требующий тонкой интуиции, глубокой проницательности, богатого воображения.

Обратим внимание на то, что в своем доказательстве второго закона Кеплера И.Ньютон нигде не пользуется тем, что сила притяжения к центру S обратно пропорциональна квадрату расстояния. Вывод Ньютона основан только на том, что сила направлена по линии, соединяющей тело с центром сил S. Поэтому второй закон Кеплера справедлив не только для сил тяготения, но и вообще для любых центральных сил.

Прежде чем переходить к доказательству первого закона Кеплера, представим в аналитической форме закон площадей. За время Δt планета перемещается из точки M в M', а ее радиус-вектор SM описывает площадь SMM', которую вычислим как площадь

---

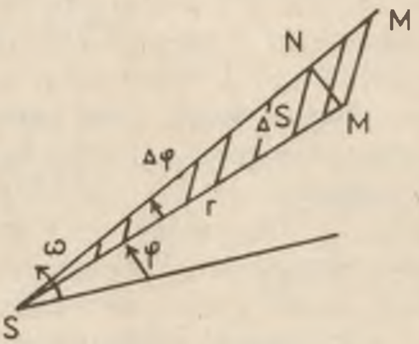
2. Основание SB общее, а высоты треугольников SBC и SBc равны, т.к. $Cc \parallel SB$. Следовательно, площади равны.

кругового сектора [3] SMN/MN - дуга окружности радиуса r с центром в точке S ; /рис.2/:

$$\text{пл.}\ SMM' \approx \text{пл.}\ SMN = \frac{1}{2} r \cdot r \Delta\varphi$$

т.е. $\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$

/I/



Если время разделено на одинаковые малые промежутки Δt , то соответствующие им площади ΔS согласно закону площадей равны, так что равными будут и количества $r^2 \Delta\varphi$, а значит и $r^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. При уменьшении Δt до нуля в пределе $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ будет угловой скоростью ω вращения планеты. Следовательно, в любой момент движения планеты величина $r^2\omega$ одна и та же:

$$r^2\omega = const \qquad /2/$$

Это равенство и выражает закон площадей.

Умножая /2/ на массу тела m , получим другую форму того же закона

$$mr^2\omega = L \qquad /3/$$

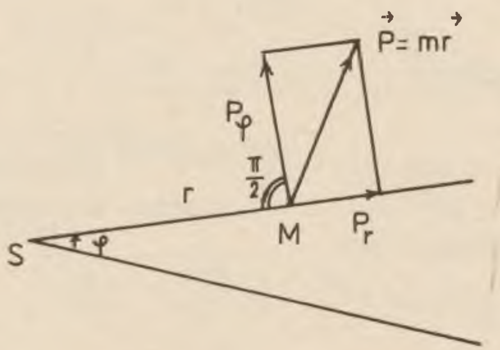
где L - постоянная. В форме /3/ закон известен под названием закона сохранения момента импульса. Происхождение названия мож-

---

3. Слагаемое, которое соответствует не учитываемой площади $\Delta MNM'$, обращается в нуль в окончательной формуле /2/, когда $\Delta t \to 0$

но понять, рассматривая рис.3. Импульсом называется произведение массы на скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$. Импульс, как и скорость, раскладывается на две составляющие: P_r – вдоль радиуса SM и P_φ – перпендикулярную к MS . Моментом импульса называется сумма произведений составляющих импульса на их "плечи" /т.е. на расстояние от S до линий, на которых размещены составляющие/:

$$P_\varphi \cdot r + P_r \cdot 0 = P_\varphi \cdot r = mv_\varphi \cdot r = m\omega r \cdot r = m\omega r^2$$



ПЛАНЕТЫ ДВИЖУТСЯ ПО ЭЛЛИПСАМ

Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце /первый закон Кеплера/.

Для доказательства, рассмотрим закон сохранения механической энергии, согласно которому сумма кинетической и потенциальной энергии планеты постоянна

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = E \qquad /4/$$

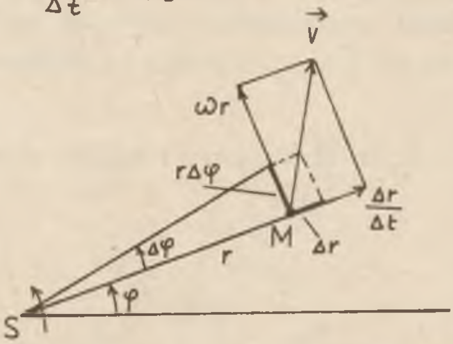
где E – полное значение механической энергии. Если $E < 0$ то тело будет "привязано" к центру сил, оно не сможет уйти на бесконечность, т.к. при $r = \infty$ потенциальная энергия [4] $V = -G\frac{mM}{r}$ достигает своего максимального значения, равного нулю и, следовательно, там $E = \frac{1}{2}mv^2$ не может оказаться отрицательным.

За время Δt точка M /планета/ смещается вдоль радиуса SM

---

4. Обоснование формулы потенциальной энергии дано в конце статьи.

на Δr и соответствующая скорость в направлении радиуса поэтому равна $\frac{\Delta r}{\Delta t}$; в то же время M смещается вместе с радиусом SM в перпендикулярном к нему направлении на $r \cdot \Delta\varphi$; соответствующая скорость $r\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega$ /рис.4/.



По закону сложения скоростей $V^2 = \left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2 + \omega^2 r^2$ / $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ понимается как предел отношения при $\Delta t \to 0$ /. Поэтому закон сохранения энергии /4/ приобретает следующий вид:

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)^2 + \omega^2 r^2\right] - \frac{\alpha}{r} = E \qquad /5/$$

/здесь обозначено $GmM = \alpha$ /. Вместо r введем теперь величину $u = \frac{1}{r}$, обратную расстоянию. Когда расстояние r получает приращение Δr , u получает приращение Δu , где $u + \Delta u = \frac{1}{r + \Delta r}$. Имеем [5]

$$u + \Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r}} \approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)$$

отсюда $\Delta u = -\frac{1}{r^2}\Delta r$, $\Delta r = -r^2 \Delta u = -\frac{\Delta u}{u^2}$,

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta\varphi} \cdot \omega = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta\varphi}\,\omega$$

Используя закон сохранения момента импульса /3/, найдем

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = -\frac{L}{m} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta\varphi} \qquad /6/$$

Подставляя это значение в /5/ и заменяя r на $\frac{1}{u}$, получим

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2\alpha m}{L^2}u = \frac{2m}{L^2}E \qquad /7/$$

---

5. Прямым делением находим $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \ldots$ и при малых ε приближенно $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$; здесь $\varepsilon = \frac{\Delta r}{r}$.

Это уравнение позволяет построить траекторию планеты шаг за шагом по точкам. Действительно, из /7/ можно найти Δu /а значит и Δr /, задавая малые $\Delta\varphi$. Если в качестве исходной взять какую-нибудь точку на расстоянии r от центра сил, то получим ряд точек траектории, проходящей через взятую точку.

Замечательно, что из уравнения /7/ можно найти и точное уравнение траектории, если только $\frac{\Delta u}{\Delta\varphi}$ понимать как предел отношения при $\Delta\varphi \to 0$. С этой целью сделаем еще одну последнюю замену:

$$u - \frac{m\alpha}{L^2} = x \qquad /8/$$

Так как $\Delta u = \Delta x$, то /7/ приобретает окончательный вид

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\right)^2 + x^2 = R^2, \qquad /9/$$

где обозначено

$$R = \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2 + \frac{2m}{L^2}E} \qquad /10/$$

Вывод заканчивается тем, что величину x, входящую в /9/, легко найти геометрически. В самом деле, если по оси абсцисс откладывать x, а по оси ординат $y = -\frac{\Delta x}{\Delta\varphi}$ [6], то уравнение /9/ будет $y^2 + x^2 = R^2$, а значит x и y оказываются координатами точек окружности радиуса R /рис.5/. Непосредственно из рисунка теперь находим

$$x = R\cos\varphi \qquad /11/$$

Задача таким образом решена. Нам остается только возвратиться к исходной переменной r. Подставляя /11/ в /8/, получим

$$u = \frac{m\alpha}{L^2} + R\cos\varphi$$

и, поскольку $r = 1/u$, то

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad /12/$$

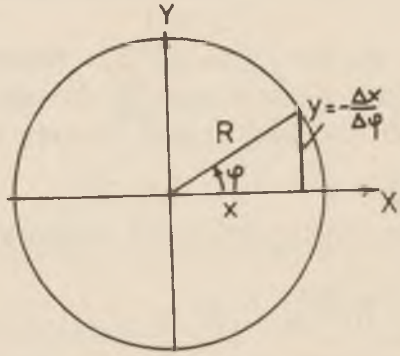
---

6. Пишем знак минус, т.к. положительному $\Delta\varphi$ отвечает отрицательное Δx.

где введены обозначения

$$p = L^2/m\alpha \quad ; \quad e = \frac{L^2}{m\alpha}R = \sqrt{1+\frac{2L^2}{m\alpha^2}E} \qquad /13/$$

/очевидно $e<1$, т.к. $E<0$ /.



Мы нашли уравнение орбиты планеты /I2/. Это уравнение позволяет для каждого произвольно задаваемого значения φ вычислить соответствующее r – расстояние от планеты до Солнца.

Докажем теперь, что уравнение /I2/ определяет именно эллипс. Пусть SP – та идущая от Солнца прямая, от которой измеряется угол φ /так называемая полярная ось/. Согласно /I2/ при $\varphi=0$ расстояние r минимально. Следовательно, угол φ отсчитывается от прямой SP , направленной от Солнца на ближайшую к нему точку P орбиты, для которой $r=r_{min}$:

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} \qquad /14/$$

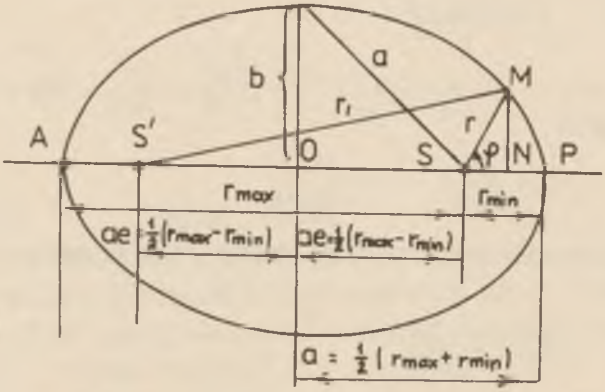
При $\varphi=\pi$ точка орбиты А максимально удалена от центра сил S на расстояние

$$r_{max} = \frac{p}{1-e} \qquad /15/$$

Легко видеть, что траектория симметрична относительно прямой AP. Действительно, согласно /I2/ расстояние r для угла φ такое же, как и для $-\varphi$. Это означает, что траектория имеет форму какого-то симметричного относительно AP овала.

Чтобы убедиться, что этот овал – эллипс, осуществим дополнительное построение. Отметим точку O овала, которая находится на расстоянии $\frac{1}{2}(r_{min}+r_{max})$ слева от точки P, и еще одну точку S' – симметричную для центра сил S относительно центра овала O /рис.6/.

$$S'O = OS = \frac{1}{2}(r_{max}-r_{min}) = \frac{pe}{1-e^2}$$



Мы докажем, что траектория эллипс, если убедимся в соответствии с его определением, что сумма расстояний точки M до двух неподвижных точек S и S' постоянна, т.е.

$$r_1 + r = 2a\,,$$

где a – некоторая постоянная. Сначала вычислим r_1

$$r_1 = \sqrt{(S'N)^2+(NM)^2} = \sqrt{(S'S+SN)^2+(NM)^2}$$

или согласно найденным выше значениям

$$r_1 = \sqrt{\left(2\frac{pe}{1-e^2}+r\cos\varphi\right)^2 + r^2\sin^2\varphi}$$

Заменяя r по формуле /I2/, найдем

$$r_1 = p\sqrt{\frac{4e^2}{(1-e^2)^2}+\frac{4e}{1-e^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}+\frac{1}{(1+e\cos\varphi)^2}} =$$

$$= p\sqrt{\frac{4(e^2-1+1)}{(1-e^2)^2}+\frac{4e}{1-e^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}+\frac{1}{(1+e\cos\varphi)^2}} =$$

$$= P\sqrt{\frac{4}{(1-e^2)^2} - \frac{4}{1-e^2} + \frac{4e}{1-e^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{1+e\cos\varphi} + \frac{1}{(1+e\cos\varphi)^2}} =$$

$$= P\sqrt{\frac{4}{(1-e^2)^2} - \frac{4}{(1-e^2)(1+e\cos\varphi)} + \frac{1}{(1+e\cos\varphi)^2}} =$$

$$= P\sqrt{\left(\frac{2}{1-e^2} - \frac{1}{1+e\cos\varphi}\right)^2}$$

Окончательно

$$r_1 = \frac{2P}{1-e^2} - \frac{P}{1+e\cos\varphi}$$

Т.к. второе слагаемое правой части этой формулы согласно /I2/ равно r , то получаем

$$r_1 + r = \frac{2P}{1-e^2}$$

или

$$r_1 + r = 2a\ , \qquad /I6/$$

что и требовалось доказать. Здесь обозначено

$$a = \frac{P}{1-e^2} = \frac{1}{2}\left(r_{min} + r_{max}\right) \qquad /I7/$$

Постоянная e называется эксцентриситетом эллипса, $e = \frac{OS}{OP}$; P - параметром; a - большой полуосью; показанный на рис.6 отрезок b - малой полуосью; $b^2 = a^2 - OS^2 = a^2(1-e^2)$.

ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА

Отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит постоянно и для всех планет одинаково.

Для доказательства этого закона, выразим размеры эллипса через постоянную энергии E и постоянную момента импульса L /см.I3/

$$a=\frac{p}{1-e^2}=\frac{L^2/m\alpha}{2L^2|E|/m\alpha^2}=\frac{\alpha}{2|E|} \qquad /I8/$$

$$b=a\sqrt{1-e^2}=\frac{\alpha}{2|E|}\sqrt{\frac{2L^2}{m\alpha^2}|E|}=\frac{L}{\sqrt{2|E|m}} \qquad /I9/$$

/пишем $|E|$, т.к. $E<0$ /.

Вычислим еще период обращения планеты T, т.е. время ее обращения по эллиптической орбите.

За время Δt радиус-вектор планеты описывает площадь $\Delta S=\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$ /см. формулу /I/ /. Отсюда

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{1}{2}r^2\omega$$

и на основании /3/

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{L}{m}$$

или

$$\Delta S=\frac{1}{2}\frac{L}{m}\Delta t \qquad /20/$$

Пусть период T разделен на одинаковые малые промежутки Δt . Для каждого Δt справедливо равенство /20/. Складывая все эти равенства, получим

$$S=\frac{1}{2}\frac{L}{m}T, \qquad /2I/$$

где S – площадь эллипса. Поскольку эллипс можно рассматривать как проекцию окружности, его площадь равна

$$S=S_{окр}\cdot\cos\alpha=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab \qquad /22/$$

/при проектировании продольные размеры окружности не меняются, тогда как поперечные уменьшаются в отношении $1:\cos\alpha=1:\frac{b}{a}$ /.

Подставляя /22/ в /2I/, найдем

$$T=\frac{2m}{L}\pi ab$$

и на основании /I8/ и /I9/

$$T=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \qquad /23/$$

Исключая из найденных формул /23/ и /I8/ постоянную энергии, находим окончательно:

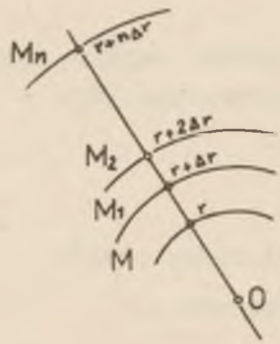
$$\frac{T^2}{a^3}=4\pi^2\frac{m}{\alpha} \quad (\alpha=GmM) \qquad /24/$$

Это равенство и выражает третий закон Кеплера.

Большая полуось эллипса и период обращения планеты зависят согласно /I8/ и /23/ от величины энергии планеты, но не от момента импульса, тогда как малая полуось зависит от того и другого. В равной степени это относится и к спутникам. Поэтому большая полуось эллиптической орбиты a и период обращения спутника T не зависят от направления его скорости в момент выхода на орбиту. Большая полуось орбиты спутника равна радиусу круговой орбиты /когда спутник запускают "горизонтально"/, а период его обращения по орбите, большая полуось которой a, равна периоду обращения по кругу радиуса a. При неизменной большой полуоси a, малая полуось b эллиптической орбиты может оказаться большей или меньшей, и причиной тому являются различные направления скорости спутника в момент его выхода на орбиту.

В заключение выведем формулу потенциальной энергии тела в поле всемирного тяготения. Работа силы тяготения на малом перемещении MM_I равна /рис.7/

$$A_1=-G\frac{mM}{r^2}\Delta r\approx -GmM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+\Delta r}\right)$$



Аналогично на перемещениях $M_1M_2, \dots M_{n-1}M_n$

$$A_2 = -GmM\left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r+2\Delta r}\right)$$

. . . .

$$A_n = -GmM\left(\frac{1}{r+(n-1)\Delta r} - \frac{1}{r+n\Delta r}\right)$$

Складывая все эти формулы, получим работу на перемещении MM_n:

$$A_{1n} = -GmM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+n\Delta r}\right)$$

Потенциальная энергия тела в поле тяготения измеряется работой силы тяготения по перемещению тела из данной точки на бесконечность. Полагая $n \to \infty$, получим искомую формулу

$$V = -G\frac{mM}{r}$$

Потенциальная энергия тела в поле тяготения отрицательная, т.к. её максимальное значение /которое достигается при $r = \infty$ / условно принято равным нулю.

Литература

/I/ Дж. Орир; Популярная физика, перевод второго американского издания, Издательство "Мир" - Москва 1969

PRAWA KEPLERA KIERUJĄ RUCHEM PLANET

Streszczenie

J.Orear w swojej "Popularnej fizyce" wskazuje na brak w literaturze naukowej prostych dowodów pierwszego prawa Keplera bez wykorzystania aparatu wyższej matematyki. W pracy przedstawiono elementarny dowód powyższego prawa fizyki wykorzystując jedynie intuicyjne pojęcie granicy. Dla wyczerpania zagadnienia zamieszczono również ogólnie znane dowody drugiego i trzeciego prawa Keplera.