ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z.4

Eulalia Grande
WSP Bydgoszcz

SUR UN THÉORÈME DE MARCINKIEWICZ

Dans cet article je généralise le théorème de Marcinkiewicz sur l'antidérivée (v.[2]) au cas des fonctions dont les valeurs appartiennent a un espace normé, complet et séparable, en appliquant la méthode de Marcinkiewicz.

Soit Y un espace normé complet et séparable avec la norme $\|\cdot\|$.

THÉOREME 1. Étant donnée une suite arbitraire de nombres $(h_n = 0)$ tendant vers zéro, il existe une fonction continue $\Phi : [0,1] \longrightarrow Y$ satisfaisant à la condition suivante:

(P) à toute fonction mesurable (au sens de Lebesgue) $f : [0,1] \longrightarrow Y$ il correspond une suite partielle (h_{n_k}) telle que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Phi(x+h_{n_k}) - \Phi(x)}{h_{n_k}} = f(x)$$

presque partout.

Le théorème de Markinkiewicz concerne les fonctions réelles definies sur l'intervalle $[0,1]$.

Dans la démonstration de ce théorème nous appliquerons le lemme suivant (comparer [2]):

LEMME 1. Étant donne un nombre $\varepsilon > 0$ et deux fonctions continues $F_1 : [0,1] \longrightarrow Y$ et $F_2 : [0,1] \longrightarrow Y$ dont F_2 est presque partout derivable dans $[0,1]$, il existe toujours une fonction continue et presque partout derivable $G: [0,1] \to Y$ telle que $G'(x) = F_2'(x)$ presque partout et que $\| F_1(x) - G(x) \| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$.

DÉMONSTRATION. Divisons l'intervalle $[0,1]$ en une dénombrabilité ou bien un nombre fini d'intervalles n'empiétant pas et tels que l'oscillation de la fonction $F_1 - F_2$ soit moindre que ε dans chacun d'eux. Soit $H: [0,1] \to Y$ la fonction continue, identique à $F_1(x) - F_2(x)$ aux extrémités des ces intervalles et dans chacun de ces intervalles de la forme $[\alpha, \beta]$ définie par la formule:

$$H(x) = F_1(\alpha) - F_2(\alpha) + C\left(\frac{x-\alpha}{\beta - \alpha} \right) \left[F_1(\beta) - F_2(\beta) - F_1(\alpha) + F_2(\alpha) \right] ,$$

où $C: [0,1] \to [0,1]$ est la fonction de Cantor.
Puisque la fonction C est continue, croissante et $C'(x) = 0$ presque partout, on a donc

$$H'(x) = 0 \quad \text{(le zéro de l'espace } Y\text{)}$$

presque partout et $\| F_1(x) - F_2(x) - H(x) \| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$.
La fonction $G(x) = F_2(x) + H(x)$ jouit évidemment de la propriété démandé.

DÉMONSTRATION DU THÉOREME 1. Considérons d'abord, l'espace de toutes les fonctions continues $f: [0,1] \to Y$ avec la norme de Tchebycheff (c'est - a - dire, $\| f \|_C = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \| f(x) \|$).
C'est l'espace normé et séparable (puisque Y est séparable, v.[4], p. 160). Il existe donc une suite dénombrable de fonctions continues $P_i: [0,1] \to Y$ $(i = 1,2,\dots)$ dense dans cet espace de fonctions. Il est aisé alors a détérminer une suite de fonctions continues, presque partout dérivables, $(\Phi_k: [0,1] \to Y)_{k=1}^{\infty}$ et une suite partielle $(t_k = h_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ extraite de la suite donnée $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ de maniere qu'on ait:

$$(1) \quad \| \Phi_k(x) - \Phi_{k-1}(x) \| \leqslant \frac{|t_{k-1}|}{k-1} ;$$

et

$$(2) \qquad \left\| \frac{\Phi_k(x + t_k) - \Phi_k(x)}{t_k} - P_k(x) \right\| < \frac{1}{k},$$

excepté au plus sur un ensemble E_k de mesure $\leq \dfrac{1}{2^k}$;

et

$$(3) \qquad |t_k| < \frac{|t_{k-1}|}{2}.$$

En effet, en admettant que Φ_1: $[0,1] \longrightarrow Y$ soit une fonction primitive de la fonction P_1 (elle existe d'apres le théoreme 2 du livre [1], p. 178) et en supposant le k-1 premiers termes des suites (Φ_j:$[0,1] \longrightarrow Y$) et (t_j) détérminés on definit aisément par l'application du lemme 1 (rapporté à la fonction continue Φ_{k-1}: $[0,1] \longrightarrow Y$ et à la fonction primitive de la fonction P_k: $[0,1] \longrightarrow Y$), une fonction continue Φ_k: $[0,1] \longrightarrow Y$ conformément à la condition (1) et de manière que l'on ait presque partout $\Phi_k'(x) = P_k(x)$. Cette dernière relation permet de définir un nombre t_k de façon que les conditions (2) et (3) soient remplies à leur tour.

En vertu de (1) et (3), la suite de fonctions Φ_n: $[0,1] \longrightarrow Y$ converge uniformément vers une limite $\Phi(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \Phi_n(x)$, continue et satisfaisant pour tout k et pour tout $x \in [0,1]$ à l'inégalité

$$\| \Phi(x) - \Phi_k(x) \| = \| \Phi_k(x) + \sum_{i=k}^{\infty} (\Phi_{i+1}(x) -$$

$$- \Phi_i(x)) - \Phi_k(x) \| = \| \sum_{i=k}^{\infty} (\Phi_{i+1}(x) - \Phi_i(x)) \|$$

$$\leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|t_i|}{i} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|t_k|}{k2^{i-k}} = \frac{|t_k|}{k}$$

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^{i-k}} = \frac{|t_k|}{k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{2|t_k|}{k}.$$

Par conséquent, en tenant encore compte de (2), on a

$$(4) \qquad \left\| \frac{\Phi(x + t_k) - \Phi(x)}{t_k} - P_k(x) \right\| =$$

$$\Big\| \frac{\Phi(x+t_k) - \Phi_k(x+t_k) + \Phi_k(x+t_k) - \Phi_k(x)}{t_k}$$

$$+ \frac{\Phi_k(x) - \Phi(x)}{t_k} - P_k(x) \Big\| \leq$$

$$\Big\| \frac{\Phi(x+t_k) - \Phi_k(x+t_k)}{t_k} \Big\| + \Big\| \frac{\Phi_k(x+t_k) - \Phi_k(x)}{t_k}$$

$$- P_k(x) \Big\| + \Big\| \frac{\Phi_k(x) - \Phi(x)}{t_k} \Big\| \leq$$

$$\frac{2\,|t_k|}{k\,|t_k|} + \frac{1}{k} + \frac{2\,|t_k|}{k\,|t_k|} = \frac{5}{k}$$

pour tout $x \in [0,1] - E_k$.
Soit maintenant $f: [0,1] \to Y$ une fonction mesurable [1] quelconque. D'après le théorème de Lusin (étant vrai aussi pour les fonctions aux valeurs dans Y,: comparer [3], la démonstration du théorème 8.2) il existe pour tout nombre naturel n un ensemble fermé $H_n \subset [0,1]$ tel que la mesure de Lebesgue $m(H_n) > 1 - \frac{1}{n}$ $(H_n \supset H_{n-1})$ et la fonction partielle f/H_n est continue. Il existe donc pour tout n un prolongement continu $g_n: [0,1] \to Y$ de la fonction f/H_n et par conséquent une fonction P_{k_n} telle que

$$\| g_n(x) - P_{k_n}(x) \| < \frac{1}{n}$$

pour tout $x \in [0,1]$. La sous - suite (P_{k_n}) est convergente presque partout vers la fonction f.
On peut admettre évidemment que pour toul m on a

$$\| P_{k_n}(x) - f(x) \| < \frac{1}{m}$$

---

[1] C'est - à - dire $f^{-1}(U)$ est un e semble mesurable (au sens de Lebesque), quel que soit l'ensemble ouvert $U \subset Y$.

à l'exception, au plus, d'un ensemble H_m de mesure moindre que $\frac{1}{2^m}$. Donc, en vertu de (4)

$$\left\| \frac{\Phi(x + t_{k_m}) - \Phi(x)}{t_{k_m}} - f(x) \right\| =$$

$$\left\| \frac{\Phi(x + t_{k_m}) - \Phi(x)}{t_{k_m}} - P_{k_m}(x) + P_{k_m}(x) - f(x) \right\| \leq$$

$$\left\| \frac{\Phi(x + t_{k_m}) - \Phi(x)}{t_{k_m}} - P_{k_m}(x) \right\| + \left\| P_{k_m}(x) - f(x) \right\|$$

$$\leq \frac{5}{k_m} + \frac{1}{m}$$

pour tout $x \in [0,1] - [E_{k_m} \cup H_m]$.

Il en résulte qu'on a presque partout

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\Phi(x + t_{k_m}) - \Phi(x)}{t_{k_m}} = f(x)$$

(puisque $m(E_{km} \cup H_m) < \frac{2}{2^m}$ et $\sum_{m=1}^{\infty} m(E_{km} \cup H_m) < \infty$)

et la démonstration est achevée.

Une modification du raisonnement précédent permet d'énoncer le résultat précédent en termes des catégorie de Baire dans l'espace des fonctions continues $f: [0,1] \longrightarrow Y$ avec la norme $\|f\|_C = \sup_{0 \leq x \leq 1} \|f(x)\|$.

Cet espace sera signifie, comme d'habitude, par $C([0,1], Y)$.

THÉORÈME 2. Étant donnée une suite $(h_n \neq 0)_{n=1}^{\infty}$ tendant vers O, toute fonction $\Phi \in C([0,1], Y)$, excepté un ensemble de fonctions de première catégorie dans $C([0\,1], Y)$ jouit de la propriété (P).

DÉMONSTRATION. En conservant toutes les désignations de la démonstration du théorème 1, on démontre de la même façon, que dans la démonstration du théorème 2 de l'article [2] que la propriété (P) est équivaut à la suivante:

(P') pour tout couple n, k de nombres naturels il existe un indice $p > n$ tel que

$$(5) \qquad \left\| \frac{\Phi(x + h_p) - \Phi(x)}{h_p} - P_k(x) \right\| < \frac{1}{n}$$

pour tout x, excepté au plus dans un ensemble de mesure moindre que $\frac{1}{n}$.

Ceci étant, soit $A \subset C([0,1], Y)$ l'ensemble de toutes les fonctions qui ne possedent pas la propriété (P'). On a alors $A = \bigcup_{n,k} A_{nk}$, où A_{nk} désigne l'ensemble de toutes les fonctions continues $\psi : [0,1] \to Y$ telles que pour tout $p > n$ on a

$$\left\| \frac{\psi(x + h_p) - \psi(x)}{h_p} - P_k(x) \right\| \geqslant \frac{1}{n}$$

sur un ensemble de mesure non moindre que $\frac{1}{n}$.

On voit sans peine que tout ensemble A_{kn} est fermé dans l'espace $C([0,1], Y)$ et qu'aucune fonction $\Phi : [0,1] \to Y$ admetant $P_k(x)$ presque partout pour sa dérivée, n'appartient à A_{kn}.

Or, en vertu du lemme 1, il existe pour chaque $\varepsilon > 0$, $k > 0$ et pour toute fonction $\psi : [0,1] \to Y$ une fonction continue $\Phi : [0,1] \to Y$ telle que presque partout $\Phi'(x) = P_k(x)$ et que $\| \Phi(x) - \psi(x) \| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0,1]$.

Il s'ensuit que tout ensemble A_{kn} est non - dense et, par conséquent, l'ensemble A est de première catégorie.

REMARQUE. Remarquons que l'hypothese de la séparabilité de l'espace Y est essentielle.

En effet, supposons que l'espace Y ne soit pas séparable et que $\Phi : [0,1] \longrightarrow Y$ soit une fonction continue. L'ensemble $\Phi([0,1])$ étant un espace séparable, le sous - espace normé Y_1 généré par $\Phi([0,1])$ est aussi séparable. Il existe donc un point $y_o \in Y - Y_1$. Soit $f: [0,1] \longrightarrow Y$ une fonction continue et telle que $f(x) = x\, y_o$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. On voit sans peine que les fonctions Φ et f ne satisfont pas à la condition (P).

OUVRAGES CITÉS:

[1] W. Kołodziej, Analiza matematyczna, Warszawa 1978.
[2] J. Marcinkiewicz, Sur les nombres dérivées, Fund. Math. 24(1935), p. 305-308.
[3] J. Oxtoby, Measure and category, New York - Berlin - Heidelberg 1971.
[4] R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste I, Warszawa 1958.

PEWNA UWAGA O TWIERDZENIU MARCINKIEWICZA

STRESZCZENIE

W tym artykule uogólnia się znane twierdzenie Marcinkiewicza o antypochodnej (patrz [2]) na przypadek funkcji o wartościach w przestrzeni ośrodkowej Banacha.