ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z.4

Eulalia Grande
WSP Bydgoszcz

SUR UNE TOPOLOGIE D'O'MALLEY

Soit (X, T) un espace topologique avec une mesure μ finie, positive et complète, définie sur un σ - corps M contenant T. Il existe ([2], Th. 22.4) une application $\varphi : M \longrightarrow M$ telle que

(1) $\varphi(A) \sim A$, c'est - a - dire,

$$\mu\big((A - \varphi(A)) \quad (\varphi(A) - A)\big) = 0 ;$$

(2) si $A \sim B$, on a $\varphi(A) = \varphi(B)$;
(3) $\varphi(\emptyset) = \emptyset$, $\varphi(X) = X$;
(4) $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$;
(5) si $A \subset B$, on a $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.

et la famille

$$T_1 = \{\varphi(A) - N;\ A \in M \text{ et } \mu(N) = 0\}$$

est une topologie ([2] , Th. 22.5).

THÉORÈME 1. La famille $T_2 = \{A \in T_1;\ \mu(A) = \mu(\mathrm{Int}_T A)\}$, où $\mathrm{Int}_T A$ désigne, comme d'habitude, l'intérieur (relativement à la topologie T) de l'ensemble A, est une topologie.

DÉMONSTRATION. On vérifie facilement que

$$\emptyset \in T_2 \text{ et } X \in T_2.$$

Si $A_1, A_2 \in T_2$, on a

$$\mathrm{Int}_T(A_1 \cap A_2) = \mathrm{Int}_T A_1 \cap \mathrm{Int}_T A_2$$

et par conséquent

$$\mu((A_1 \cap A_2) - \mathrm{Int}_T(A_1 \cap A_2)) =$$
$$\mu((A_1 \cap A_2) - (\mathrm{Int}_T A_1 \cap \mathrm{Int}_T A_2)) \leq$$
$$\mu(A_1 - \mathrm{Int}_T A_1) + \mu(A_2 - \mathrm{Int}_T A_2) = 0.$$

Soit maintenant $\{A_s\}_{s \in S}$ (S désignant un ensemble d'indices) une famille d'ensembles de la topologie T_2. Puisque tous les ensembles non vides de la topologie T_2 sont de mesure μ positive, il existe donc une suite dénombrable $\{A_{s_n}\} \subset \{A_s\}_{s \in S}$ telle que

$$\mu(\bigcup_{s \in S} A_s - \bigcup_n A_{s_n}) = 0.$$

Soit

$$N = \bigcup_{s \in S} A_s - \bigcup_n A_{s_n}.$$

On a

$$\mu(\bigcup_{s \in S} A_s - \mathrm{Int}_T(\bigcup_{s \in S} A_s)) =$$
$$\mu(N \cup [\bigcup_n A_{s_n} - \mathrm{Int}_T(\bigcup_{s \in S} A_s)) \leq$$
$$\mu(N) + \mu(\bigcup_n A_{s_n} - \mathrm{Int}_T(\bigcup_n A_{s_n})) \leq$$
$$\mu(\bigcup_n A_{s_n} - \bigcup_n \mathrm{Int}_T A_{s_n}) \leq$$
$$\sum_n (A_{s_n} - \mathrm{Int}_T A_{s_n}) = 0$$

ce qui signifie que $\bigcup_{s \in S} A_s \in T_2$ et la démonstration est achevée.

THÉORÈME 2. La fonction réelle $f:X \longrightarrow R$ est continue par rapport à la topologie T_2 si et seulement s'elle est continue par rapport à la topologie T_1 et l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f par rapport à la topologie T est de mesure μ zéro.

DÉMONSTRATION. Si une fonction $f:X \longrightarrow R$ est continue par rapport à la topologie T_1 et son ensemble des points de discontinuité relativement à la topologie T est de mesure μ zéro, l'ensemble

$$E_a^b = \{x \in X;\ a < f(x) < b\}$$

appartient à la topologie T_1 et

$$\mu(E_a^b) = \mu(\mathrm{Int}_T\, E_a^b).$$

quels que soient les nombres réels a et b tels que $a < b$.

D'autre part, supposons qu'une fonction $f: X \longrightarrow R$ soit continue par rapport à la topologie T_2. Elle est donc continue aussi par rapport à la topologie T_1. Puisque la mesure est finie, l'ensemble

$$B = \{ y \in R;\ f^{-1}(y) \text{ est de mesure positive} \}$$

est dénombrable. Soit $(y_{kn})_{k=-\infty}^{k=\infty}$ $(n=1,2,\ldots)$ une suite de nombres de l'ensemble R-B telle que

$$| y_{k+1,n} - y_{kn} | < 1/n \quad \text{pour } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

et

$$\lim_{k \to -\infty} y_{kn} = -\infty \text{ et } \lim_{k \to \infty} y_k = \infty .$$

Posons

$$X_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{Int}_T\, f^{-1}\left((y_{k,n}\ \ y_{k+1,n})\right)$$

et remarquons que

$$\mu(X - X_1) = 0$$

et que la fonction f est continue en chaque point $x \in X_1$ relativement à la topologie T. Celà termine la démonstration.

REMARQUE. Dans le cas, où $X = R$, μ est la mesure de Lebesgue dans R, T est la topologie euclidienne et T_1 est la topologie de densité, alors T_2 est la topologie a. e. introduite et examinée par O'Malley dans son article [1] et les théorèmes 1 et 2 sont déjà démontrés dans [1] .

OUVRAGES CITÉS:

[1] R. O'Malley: Approximately differentiables functions. The r topology, Pacific Math. J. 72(1977), p. 207-222.

[2] J. Oxtoby: Measure and category, Sringer - Verlag, New York - Heidelberg - Berlin 1971.

O PEWNEJ TOPOLOGII O'MALLEY'A

STRESZCZENIE

W tym artykule uogólnia się metodę konstrukcji topologii a. e. wprowadzonej przez O'Malley'a w [1] .