ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z.4

Zbigniew Grande
WSP Bydgoszcz

SUR LA SEMI - CONTINUITÉ QUALITATIVE

Dans la première part de cette note je généralise un théorème de Sierpiński concernant la semi - continuité (voir [1]), dans la deuxième - je démontre que toute fonction qualitativement semi - continue supérieurement sur l'espace métrique, compact admet le maximum qualitatif et dans la troisième - j'examine les ensembles des points de discontinuité d'un genre spécial. En finalement, dans la quatrième part je démontre un théorème sur la propriété de Baire des fonctions de deux variables ayant ses sections qualitativement semi - continues supérieurement par rapport à l'une variable et qualitativement semi - continues inférieurement par rapport à l'autre variable.

I. Dans l'article [1] Sierpiński a démontré une généralisation suivante du théorème bien connu, d'apres lequel toute fonction continue dans un intervalle fermé et borné est uniformement continue:

THÉORÈME 1 (Sierpiński [1], Corollaire). $\varphi : [a,b] \longrightarrow R$ (R désigne l'ensemble des nombres réels) étant une fonction semi - continue supérieurement et $\psi : [a,b] \longrightarrow R$ étant une fonction semi - continue inférieurement telles que

$$\varphi(x) \leqslant \psi(x) \quad \text{pour tout } x \in [a,b],$$

il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre positif δ tel que pour tous les nombres x et x' de $[a,b]$ l'inégalité

$$|x - x'| < \delta$$

entraîne l'inégalité

$$\varphi(x) < \psi(x') + \varepsilon.$$

Soit (X, ϱ) un espace métrique, compact. Une fonction $f:X \longrightarrow R$ est dite qualitativement semi - continue supérieurement (inférieurement) au point $x_o \in X$ lorsqu'il existe un ensemble $A(x_o)$ contenant x_o, résiduel dans certain entourage ouvert du point x_o et tel que la fonction partielle $f/Y\ (x_o)$ est semi - continue supérieurement (inférieurement) au point x_o.

THÉORÈME 2. Si une fonction $\varphi:X \longrightarrow R$ est qualitativement semi - continue supérieurement en tout point et une fonction $\psi:X \longrightarrow R$ est qualitativement semi - continue inférieurement en tout point et si

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \qquad \text{pour tout } x \in X,$$

il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que pour tous les éléments x et x' l'inégalité

$$\varrho(x,x') < \delta$$

entraîne l'inégalité

$$\varphi(x) < \psi(x') + \varepsilon \ .$$

DÉMONSTRATION. Démontrons d'abord qu'il existe une fonction $f:X \longrightarrow R$ semi - continue supérieurement et une fonction $g:X \longrightarrow R$ semi - continue inférieurement telles que

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x) \leq \psi(x) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

En effet, les fonctions φ et ψ ayant la propriété de Baire , il existe deux ensembles résiduels A, B du type G_δ et tels que les fonctions partielles φ/A et ψ/B sont continues. Posons

$$C = A \cap B.$$

L'ensemble C est résiduel et du type G_δ . Fixons un point $x_o \in C$ et posons

$$\psi_1(x_o) = \liminf_{\substack{x \to x_o \\ x \in C}} \psi(x)$$

et

$$\varphi_s(x_o) = \limsup_{\substack{x \to x_o \\ x \in C^o}} \varphi(x) .$$

Puisque $\psi(x) \geq \varphi(x)$ pour tout $x \in X$ et les fonctions ψ et φ sont qualitativement semi - continues inférieurement et supérieurement respectivement, on a donc

$$\psi(x_o) \geq \psi_i(x_o) \geq \varphi_s(x_o) \geq \varphi(x_o) .$$

Posons

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{lorsque } x \in C \\ \varphi_s(x) & \text{lorsque } x \notin C \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{lorsque } x \in C \\ \psi_i(x) & \text{lorsque } x \notin C \end{cases}$$

On voit facilement que la fonction f est semi - continue supérieurement, la fonction g est semi - continue inférieurement et que

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x) \leq \psi(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

Fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et posons

$$h(x) = g(x) + \varepsilon \text{ pour tout } x \in X.$$

La fonction h est semi - continue inférieurement et on a

$$(1) \quad f(x) < h(x) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

S'il n'existait pas un nombre δ satisfaisant aux conditions de notre théorème, il existerait pour tout n naturel des éléments x_n et x_n' de l'espace X tels que

$$(2) \quad \varrho(x_n', x_n) < \frac{1}{n} \quad , n = 1,2,...$$

et

$$(3) \quad f(x_n) \geq h(x_n') - \frac{1}{n} .$$

L'espace X étant compact, il existe une sous - suite infinie (x_{n_k})

convergente vers un point $x_o \in X$.
D'apres (2) on a

$$(4) \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = x_o.$$

Or, soit η un nombre positif donné quelconque. La fonction f étant semi - continue supérieurement au point x_o et la fonction g - inférieurement, il résulte de (4) que $f(x_0) + \eta > f(x_{n_k})$ et $h(x'_{n_k}) > h(x_o) - \eta$ pour $k > n_o$,
ce qui donne, d'apres (3):

$$f(x_o) + \eta > f(x_{n_k}) \geq h(x'_{n_k}) - \frac{1}{n_k} > h(x_o) - \eta - \frac{1}{n_k}, \text{ pour } k > n_o,$$

donc, en limite pour $k \to \infty$:

$$(5) \quad f(x_o) + \eta \geq h(x_o) - \eta.$$

Le nombre positif η étant arbitraire, l'inégalité (5) prouve que $f(x_o) \geq h(x_o)$, contrairement à (1).
Il existe donc un nombre $\delta > 0$ tel que l'inégalité

$$\varrho(x, x') < \delta$$

entraîne l'inégalité

$$f(x) < h(x') - \delta = g(x') + \varepsilon - \delta < g(x') + \varepsilon ,$$

ce qui termine la démonstration.

REMORQUE 1. Pour obtenir le théorème sur la continuité uniforme d'une fonction continue dans X, il suffit de prendre dans le théorème 2 pour ψ une fonction continue et de poser $\psi(x) = \varphi(x)$.

II. Dans cette part je démontre que toute fonction $f:X \to R$ qualitativement semi - continue supérieurement admet le maximum qualitatif en certain point $x_o \in X$.
On dit qu'une fonction $f:X \to R$ admet le maximum qualitatif au point x_o lorsqu'il existe un ensemble A contenant x_o, résiduel en certain entourage ouvert du point x_o et tel que

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ pour tout point } x \in A.$$

THÉORÈME 3. Toute fonction $f:X \longrightarrow R$ qualitativement semi - continue supérieurement admet le maximum qualitatif en certain point $x_0 \in X$.

DÉMONSTRATION. La fonction f ayant la propriete de Baire, il existe un ensemble A résiduel dans X, du type G_δ et tel que la fonction partielle f/A est continue. Posons

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } x \in A \\ \limsup\limits_{\substack{t \to x \\ t \in A}} f(t) & \text{lorsque } x \notin A \end{cases}$$

La fonction g est semi - continue supérieurement et $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in X$. Il existe donc un point $x_0 \in X$ tel que

$$g(x) \leq g(x_0) \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Mais $f(x_0) \geq g(x_0)$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, la fonction f admet donc le maximum qualitatif au point x_0.

REMARQUE 2. Il existe une fonction $f: [0,1] \longrightarrow R$ qualitativement semi - continue supérieurement n'admettant pas le maximum absolu. En effet, telle est, par exemple, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ lorsque } x \text{ est un nombre rationnel de l'intervalle } [0,1) \\ 0 \text{ lorsque } x \text{ est un nombre irrationnel de l'intervalle } [0,1] \text{ ou bien } x = 1. \end{cases}$$

III. Soit $f:R \longrightarrow R$ une fonction. On sait que les ensembles

$$\{x \in R: \lim_{t \to x^-} f(t) \text{ existe et est } \neq f(x)\},$$

$$\{x \in R: \lim_{t \to x^+} f(t) \text{ existe et est } \neq f(x)\},$$

$\{x \in R$: f est continue à gauche au point x et n'est pas continue à droite au point $x\}$

et

$\{x \in R$: f est continue à droite au point x et n'est pas continue à gauche au point $x\}$

sont dénombrables. ([4])

Soient $(U, \mathcal{T})$ un espace topologique de Hausdorff à base dénombrable et $f: R \longrightarrow U$ une fonction. Posons

$C^-(f) = \{x \in R$: il existe un ensemble ouvert $V \subset (-\infty, x]$ ayant la densité supérieure positive au point x et tel qu'il existe la limite $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \in V}} f(t)$ et que $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \in V}} f(t) \neq f(x)\}$

$D^-(f) = \{x \in R$: il existe un ensemble ouvert $V \subset (-\infty, x]$ de deuxième catégorie au point x et tel qu'il existe la limite $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \in V}} f(t) \neq f(x)\}$;

$E^-(f) = \{x \in R$: il existe un ensemble ouvert $V \subset (-\infty, x]$ ayant la densité supérieure positive au point x et tel que la fonction partielle $f/V \cup \{x\}$ est continue au point x et la fonction f n'est pas continue à droite au point $x\}$

et

$F^-(f) = \{x \in R$: il existe un ensemble ouvert $V \subset (-\infty, x]$ de deuxième catégorie au point x et tel que la fonction partielle $f/V \cup \{x\}$ est continue au point x et quel que soit l'ensemble ouvert $Z \subset [x, \infty)$ de deuxième catégorie au point x, la fonction partielle $f/Z \cup \{x\}$ n'est pas continue à droite au point $x\}$

On voit facilement que $C^-(f) \subset D^-(f)$.

THÉORÈME 4. L'ensemble $C^{-}(f)$ est de mesure zéro, quelle que soit la fonction $f:R \longrightarrow U$.

DÉMONSTRATION. Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f:R \longrightarrow U$ telle que l'ensemble $C^{-}(f)$ n'est pas de mesure zéro. Il existe donc un ensemble $A \subset C^{-}(f)$ de mesure extérieure positive et un ensemble ouvert V de l'espace U tels que, quel que soit $x \in A$, il existe un ensemble ouvert $G(x) \subset U$ contenant $f(x)$ et un ensemble ouvert $B(x) \subset (-\infty, x]$ ayant sa densité supérieure au point x positive tels que $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t \in B(x)}} f(t) \in V$ et $V \cap G(x) = \emptyset$.

Soit $x_0 \in A$ un point de densité extérieure de l'ensemble A. L'ensemble $A \subset f^{-1}(U - V)$ et la densité extérieure de l'ensemble A au point x_0 est égale à 1, en contradiction avec le fait que la densité supérieure de l'ensemble $B(x_0)$ au point x_0 est positive et

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t \in B(x_0)}} f(t) \in V$$

et la démonstration est achevée.

THÉORÈME 5. L'ensemble $D^{-}(f)$ est de première catégorie, quelle que soit la fonction $f:R \longrightarrow U$.

DÉMONSTRATION. Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f:R \longrightarrow U$ telle que l'ensemble $D^{-}(f)$ soit de deuxième catégorie. Il existe donc un ensemble $A \subset D^{-}(f)$ de deuxième catégorie et un ensemble ouvert V de l'espace U tels que, quel que soit $x \in A$, on a $f(x) \notin V$ et il existe un ensemble ouvert $B(x) \subset (-\infty, x]$ de deuxième catégorie au point x et tel que

$$\lim_{\substack{t \to x \\ t \in B(x)}} f(t) \in V.$$

Soit J un intervalle ouvert tel que tout sous - ensemble de l'intervalle J de deuxième catégorie et ayant la propriété de Baire coupe l'ensemble A. Fixons un point $x_o \in J \cap A$. L'ensemble $B(x_o)$ est ouvert, il a donc la propriété de Baire et est de deuxième catégorie au point x_o et

$$\lim_{\substack{t \to x_o \\ t \in B(x_o)}} f(t) \in V,$$

on a $f^{-1}(V) \cap A \neq 0$, en contradiction avec le fait que $f(x) \notin V$ pour tout $x \in A$.

THÉORÈME 6. Si $A \subset R$ est un ensemble de première catégorie (de première catégorie et de mesure zero), il existe un fonction $f:R \longrightarrow R$ telle que $D^-(f) = A$ $(C^-(f) = A)$.

DÉMONSTRATION. Il existe une suite (peut - être finie) d'ensembles non - denses A_n, disjoints deux à deux et tels que

$$A = \bigcup_n A_n \qquad \text{(voir [3])}$$

En posant

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{lorsque } x \in A_n,\ n = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{lorsque } x \in R - A, \end{cases}$$

on obtient la fonction f qui satisfait à toutes les conditions exigées.

THÉORÈME 7. L'ensemble $F^-(f)$ est dénombrable, quelle que soit la fonction $f:R \longrightarrow U$.

DÉMONSTRATION. Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f:R \longrightarrow U$ telle que l'ensemble $F^-(f)$ n'est pas dénombrable. Il existe un ensemble indénombrable $A \subset R$ et un ensemble ouvert V tels que $f(x) \in V$ pour tout $x \in A$ et l'ensemble $f^{-1}(U - V)$ est dense dans certain intervalle $[x, x + \delta(x)]$ $(\delta(x) > 0)$, quel que soit le point $x \in A$. Désignons par A_n l'ensemble de tous les points $x \in A$ tels que $\delta(x) > \dfrac{1}{n}$. On a

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

L'ensemble A étant indénombrable, il existe un indice n_o tel que l'ensemble A_{n_o} est aussi indénombrable. Soit $x_o \in A_{n_o}$ un point de condensation bilatérale de l'ensemble A_{n_o}. Il existe un point $x_1 \in A_{n_o} \cap (x_o, x_o + \frac{1}{n_o})$. D'une part, l'ensemble $f^{-1}(U - V)$ est dense dans l'intervalle $(x_o, x_1) \cap (x_o, x_o + \delta(x_o))$ et d'autre part, $f(x_1) \in V$ et il existe un ensemble ouvert $B(x_1) \subset (-\infty, x_1]$ de deuxième catégorie au point x_1 et tel que la fonction partielle $f/B(x_1) \cup \{x_1\}$ est continue au point x_1. Il en résulte une contradiction qui termine la démonstration.

THÉORÈME 8. Si $A \subset R$ est un ensemble dénombrable, il existe une fonction $f:R \longrightarrow R$ telle que l'ensemble $F^-(f) = A$.

DÉMONSTRATION. Rangeons tous les points de l'ensemble A en une suite

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \quad , \quad x_i \neq x_j \text{ lorsque } i \neq j$$

et posons, pour $n = 1,2,\ldots$,

$$g(x_n) = \frac{1}{n^2}$$

et

$$f(x) = \sum_{x_n < x} g(x_n).$$

La fonction f satisfait à toutes les conditions exigées.

REMARQUE 3. Il existe une fonction $f:R \longrightarrow R$ telle que l'ensemble $E^-(f)$ est indénombrable. Telle est, par exemple, la fonction indicatrice de l'ensemble qui se compose de tous les centres des composantes du complémentaire de l'ensemble de Cantor à l'intervalle $[0,1]$.

IV. En finalement, démontrons encore le théorème suivant:

THÉORÈME 9. Soient (Y, ρ_1) et (Z, ρ_2) des espaces métriques, complets et $f: Y \times Z \longrightarrow R$ une fonction. Supposons encore sur l'espace Z que, quels que soient la sphère ouverte $S(z_o, \alpha)$ de centre z_o et de rayon α, le point z_1 de la sphère $S(z_o, \alpha)$ et β la distance du point z_1 à la frontière de la sphère $S(z_o, \alpha)$, on a

$$z_1 \in S(z, \alpha) \quad \text{pour tout } z \in S(z_o, \beta).$$

Si toutes le sections $f_y(z) = f(y, z)$ $(y \in Y$ et $z \in Z)$ sont semi-continues supérieurement et si toutes ses sections $f^z(y) = f(y, z)$ $(z \in Z$ et $y \in Y)$ sont qualitativement semi - continues inférieurement, la fonction f a la propriété de Baire.

DÉMONSTRATION. Sans restreindre la généralité on peut supposer que la fonction f soit bornée, sinon on peut considerer la fonction arc tg f.
Étant fixé un point $(y_o, z_o) \in Y \times Z$, désignons par $M_k(y_o, z_o)$ la borne supérieure de la section f_y sur la sphère ouverte $S(z_o, \frac{1}{k})$ de centre z_o et de rayon $\frac{1}{k}$. Toutes les sections f_y étant semi - continues supérieurement, on a

$$f(y, z) = \lim_{k \longrightarrow \infty} M_k(y, z)$$

pour tout point $(y, z) \in Y \times Z$. Il suffit donc de démontrer que toutes les fonctions M_k ont la propriété de Baire. Dans ce but nous démontrerons qu'elles sont qualitativement semi - continues inférieurement.
Fixons un indice k et un point $(y_o, z_o) \in Y \times Z$ et un nombre a tels que $M_k(y_o, z_o) > a$. Soit $\varepsilon = M_k(y_o, z_o) - a$. Il résulte de la definition de $M_k(y_o, z_o)$ qu'il existe un point $z_1 \in S(z_o, \frac{1}{k})$ tel que

$$(6) \quad f(y_o, z_1) > M_k(y_o, z_o) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

La fonction f^{z_1} étant qualitaivement semi - continue inférieruement au point y_o, il existe un ensemble $E \subset Y$ résiduel dans certain entourage ouvert du point y_o et tel que pour tout point $y \in E$ on a

$$(7) \qquad f(y, z_1) > f(y_o, z_1) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Désignons par β la distance du point z_1 à la frontière de la sphère $S(z_o, \frac{1}{k})$. Comme $z_1 \in S(z, \frac{1}{k})$ pour tout point $z \in S(z_o, \beta)$, on a

$$(8) \qquad M_k(y, z) \geq f(y, z_1) \quad \text{pour tout point } z \in S(z_o, \beta).$$

De (6), (7) et (8) il vient

$$M_k(y, z) > M_k(y_o, z_o) - \varepsilon = a$$

pour tout point $(y, z) \in E \times S(y_o, \beta) = A.$

Mais l'ensemble A est résiduel dans certain entourage ouvert du point (y_o, z_o), la démonstration est donc achevée.

REMORQUE 4. L'hypothese du continu implique l'existence d'une fonction $f: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow R$ n'ayant pas la propriété de Baire, dont toutes les sections f_y sont qualitativement semi - continues supérieurement et toutes les sections f^y sont qualitativement semi - continues inférieurement. Telle est, par exemple, la fonction indicatrice d'un ensemble $A \subset [0,1] \times [0,1]$ dont toutes les sections $A^z = \{y \in [0,1] : (y,z) \in A\}$ sont dénombrables et les complémentaires de tous les ensembles $A_y = \{z \in [0,1] : (y, z) \in A\}$ sont dénombrables (voir [2]).

OUVRAGES CITÉS:

[1] W. Sierpiński; Sur une propriété des fonctions semi - continues Fund. Math. 9(1927), p. 1-2.

[2] W. Sierpiński; L'hypothèse du continu, Warszawa - Lwów 1934.

[3] W. Sierpiński; Sur une propriété des ensembles F_σ linéaires, Fund. Math. 14(1929), p. 216-220.

[4] W. Sierpiński; Funkcje przedstawialne analitycznie, Warszawa - Lwów - Kraków 1925.

O PÓŁCIĄGŁOŚCI JAKOŚCIOWEJ

STRESZCZENIE

W pierwszej części tego artykułu uogólnia się pewne twierdzenie Sierpińskiego [1] dotyczące półciągłości i ciągłości jednostajnej, w drugiej - dowodzi się, że każda funkcja jakościowo półciągła z góry na przestrzeni metrycznej, zwartej przyjmuje maksimum jakościowe, w trzeciej - bada się zbiory punktów nieciągłości specjalnego rodzaju i w czwartej - dowodzi się pewnego twierdzenia o własności Baire'a funkcji dwóch zmiennych.