ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z.4

Zbigniew Grande
WSP Bydgoszcz

SUR LA CONTINUITÉ APPROXIMATIVE FAIBLE

Soit l_2 l'espace de toutes les suites réelles $x = (x_n)$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$ avec la norme définie par la formule

$$||x|| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}.$$

L'ensemble E_o de toutes les fonctionnelles linéaires de la forme $\xi_n(x) = x_n$ est un ensemble fondamental de fonctionnelles linéaires dans l_2 (comparer [1]), c'est - à - dire, elle satisfait à la condition suivante:

pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, il existe une combinaison linéaire $\xi = a_1 \xi_1 + \ldots + a_n \xi_n$ d'éléments $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ de l'ensemble E_o telle que

(1) $||\xi|| \le 1$ et $\xi(x) > ||x|| - \varepsilon$.

Un ensemble $A \subset [0,1]$ est dit d-ouvert (r-ouvert) [a.e.-ouvert] voir [7] lorsqu'il est vide ou bien tout son point est un point de densité de l'ensemble A (il est une somme d'ensembles d-ouverts et à la fois du type F_σ et G_δ) [il est d-ouvert et $m(A) = m(\mathrm{Int}\, A)$, où Int A désigne l'intérieur de l'ensemble A et m désigne la mesure de Lebesgue dans l'espace R des nombres réels].

La famille des ensembles r-ouverts (a.e.-ouverts) est une topologie qui détermine la famille des fonctions r-continues (a.e.-continues) (voir [7]). Une fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ est dite faiblement approximativement continue (faiblement r-continue) [faiblement a.e.-continue] {de classe faible α de Baire} {{avec la propriété faible de Baire}} {{{faiblement mesurable}}} par rapport a E_o lorsque, quelle que soit la fonctionnelle $\xi_n \in E_o$, la fonction réelle $\xi_n \circ f$ est approximativement continue (r-continue) [a.e.-continue] {de classe α de Baire} {{a la propriété de Baire}} {{{est mesurable}}}. Une fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$

est dite quasi - continue au point t lorsque, quel que soit l'entourage ouvert U du point $f(t)$ et l'entourage ouvert V du point t, on a $\operatorname{Int} f^{-1}(U) \cap V \neq 0$ (voir 5).

Il résulte du théorème 2 du travail [1] que toute fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ faiblement approximativement continue est de deuxième classe de Baire. Remarquons qu'elle ne doît pas être de première classe de Baire.

THÉORÈME 1. Il existe une fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ faiblement a.e.-continue qui n'est pas de première classe de Baire.

DÉMONSTRATION. Soient $C \subset [0,1]$ l'ensemble de Cantor et $((\alpha_n, \beta_n))_{n=1}^{\infty}$ une suite de toutes les composantes du complémentaire $[0,1] - C$. Il existe pour tout point $\alpha_n (n = 1,2,\dots)$ une suite d'intervalles fermés J_{kn} $(k=1,2,\dots)$ contenus dans $[0,1] - C - \bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{kj}$ disjoints deux à deux et tels que la densité de l'ensemble $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{kn}$ au point α_n est égale à 1 et la fermeture $Cl\,(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{kn})$ de la somme $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{kn}$ est égale $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{kn} \cup \{\alpha_n\}$.

Il existe également pour tout intervalle J_{kn} $(k,n=1,2,\dots)$ un intervalle fermé I_{kn} contenu dans l'intérieur $\operatorname{Int} J_{kn}$ tel que la densité de la somme $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{kn}$ au point α_n est encore égale à 1, quel que soit $n=1,2,\dots$. Posons

$$e_1 = (1,0,0,\dots 0,\dots),$$
$$e_2 = (0,1,0,\dots,0,\dots),$$
$$e_3 = (0,0,1,0,\dots,0,\dots),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et

$$f(t) = \begin{cases} e_n \text{ lorsque } t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{kn} \cup \{\alpha_n\}, \ n=1,2,\dots \\ 0 \text{ lorsque } t \in [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} J_{kn} \cup \{\alpha_n\} \right] \\ \text{linéaire dans toute composante de l'ensemble } J_{kn} - I_{kn}, \\ k,n = 1,2,\dots \end{cases}$$

On a, pour tout n=1,2,... ,

$$\xi_n \circ f(t) = \begin{cases} 1 \text{ lorsque } t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{kn} \cup \{\alpha_n\} \\ 0 \text{ lorsque } t \in [0,1] - \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{kn} - \{\alpha_n\} \\ \text{linéaire dans toute composante } J_{kn} - I_{kn},\ k = 1,2,\dots . \end{cases}$$

On voit facilement que la fonction $\xi_n \circ f$ est continue en tout point $t \neq \alpha_n$ et approximativement continue au point α_n, ce qui termine la démonstration.

Démontrons encore que toute fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ faiblement r-continue par rapport à E_o est ponctuellement discontinue. Dans ce but démontrons d'abord le théorème suivant:

THÉORÈME 2. Toute fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ faiblement r-continue par rapport à E_o est la limite d'une suite de fonctions r-continues.

DÉMONSTRATION. Si la fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ est faiblement r-continue par rapport a E_o, toutes les fonctions

$$\varphi_1(t) = (\xi_1 \circ f(t),\ 0,0,\dots,0,\dots),$$
$$\varphi_2(t) = (\ 0,\ \xi_2 \circ f(t),\ 0,0,\dots),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

sont r-continues et par conséquent toutes les fonctions

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t)$$

sont les mêmes.

Comme, de plus,

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t) \text{ pour tout } t \in [0,1] ,$$

notre théorème est donc démontré.

De la même façon on obtient encore les suivants:

THÉORÈME 3. Si la fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ est faiblement a.e.-continue par rapport à E_o, elle est la limite d'une suite de fonctions a.e.-continues.

THÉORÈME 4. Si la fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ a la propriété faible de Baire par rapport à E_o, elle a la propriété de Baire, comme la limite d'une suite de fonctions ayant la propriété de Baire.

THÉORÈME 5. Si les fonctions $f_n: [0,1] \longrightarrow l_2$ $(n=1,2,\dots)$ sont quasi - continues et si $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ pour tout point $t \in [0,1]$, la fonction f est ponctuellement discontinue.

DÉMONSTRATION. Supposons, au contraire, que la fonction f ne soit pas ponctuellement discontinue. Il existe donc un ensemble $A \subset [0,1]$ de deuxième catégorie et une sphère fermée $S \in l_2$ tels que $f(t) \in \operatorname{Int} S$ (l'intérieur de la sphère S) pour tout $t \in A$ et quel que soit l'intervalle ouvert J coupant A, il existe un point $t \in J$ tel que $f(t) \notin S$. Mais
$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ pour tout $t \in A$, il existe donc
pour tout point $t \in A$ un indice naturel $n(t)$ tel que $f_n(t) \in \operatorname{Int} S$ pour tout $n \geqslant n(t)$. L'ensemble A étant de deuxieme catégorie et l'ensemble des nombres naturels étant dénombrable, il existe un indice naturel n_o tel que l'ensemble

$$B = \{ t \in A;\ n(t) = n_o \}$$

est de deuxième catégorie. Il existe un intervalle ouvert $J \subset [0,1]$ dans lequel l'ensemble B est dense. Soient $t_o \in J$ un point tel que $f(t_o) \notin S$ et n un indice naturel plus grand que n_o tel que $f_n(t_o) \notin S$. On a $f_n(t) \in \operatorname{Int} S$ pour tout $t \in B$ et $f_n(t_o) \notin S$, en contradiction avec la quasi - continuité de la fonction f_n et la démonstration est achevée.

THÉORÈME 6. Si la fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ est faiblement r - continue par rapport à E_o, elle est ponctuellement discontinue.

DÉMONSTRATION. Toute fonction r-continue étant quasi - continue (voir [7]) et la limite d'une suite de fonctions quasi -

continues étant ponctuellement discontinue (Th. 5), notre théorème est donc démontré.

THÉORÈME 7. Il existe une fonction $f: [0,1] \to l_2$ faiblement approximativement continue par rapport à E_0, qui n'est continue en aucun point $x \in [0,1]$.

DÉMONSTRATION. Rangeons tous les nombres rationnels de l'intervalle $[0,1]$ en une suite

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots \qquad , \qquad w_i \neq w_j \text{ lorsque } i \neq j .$$

Il existe pour tout w_n $(n=1,2,\dots)$ un ensemble fermé, non - dense A_n contenu dans l'ensemble $I \cup \{w_n\} - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, où I désigne l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle $[0,1]$ et tel que sa densité au point w_n est égale à 1.

Soit $B_n \subset A_n$ $(n = 1,2,\dots)$ un ensemble du type F_σ contenant w_n et tel que chaque son point est un point de densité de l'ensemble B_n. D'après le lemme 11 du travail [9] il existe un fonction approximativement continue $\bar{f}_n: [0,1] \longrightarrow R$ telle que $\bar{f}_n(t) = 0$ lorsque $t \notin B_n$ et $0 < \bar{f}_n(t) \leq 1$ lorsque $t \in B_n$. Posons

$$f_n(t) = \frac{\bar{f}_n(t)}{\bar{f}_n(w_n)} \qquad \text{pour } t \in [0,1] .$$

La fonction f_n est également approximativement continue.
Soit

$$f(t) = \begin{cases} f_n(t) \, e_n & \text{lorsque } t \in B_n, \ n = 1,2,\dots \\ 0 & \text{lorsque } t \in [0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n . \end{cases}$$

Puisque $\xi_n \circ f(t) = f_n(t)$ pour toute fonctionnelle $\xi_n \in E_0$, la fonction f est donc faiblement approximativement continue par rapport à E_0. D'autre part, $\|f(t)\| = 1$ pour tout nombre rationnel t et $\|f(t)\| = 0$ pour tout nombre t appartenant à l'ensemble $[0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ étant dense, la fonction f n'est non plus continue en aucun point $t \in [0,1]$. Cela termine la démonstration.

THÉORÈME 8. Une fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ est de deuxième classe de Baire si et seulement s'il existe une suite de fonctions $f_n: [0,1] \longrightarrow l_2$ ($n = 1,2,\ldots$) faiblement approximativement continues par rapport à E_o et convergente vers la fonction f.

DÉMONSTRATION. S'il existe un suite de fonctions f_n faiblement approximativement continues par rapport à E_o, la fonction f est de deuxième classe de Baire, d'après le théorème 3 de l'article [1], puisque toute fonction faiblement approximativement continue est de classe faible 1 par rapport à E_o.
D'autre part, toute fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ de deuxième classe de Baire est la limite d'une suite de fonctions $f_n: [0,1] \longrightarrow l_2$ approximativement continues (voir [4]) et toute fonction approximativement continue est aussi faiblement approximativement continue par rapport à E_o, notre démonstration est donc finie.

En finalement, notons encore les suivants:

THÉORÈME 9. Toute fonction $f: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow l_2$ ($f: [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \longrightarrow l_2$) faiblement approximativement continue par rapport à E_o relativement à chaque variable séparement est de troisième (de quatrième) classe de Baire.

DÉMONSTRATION. Étant fixé la fonctionnelle $\xi_n \in E_o$, la fonction $\xi_n \circ f$ est de deuxième (de troisième) classe de Baire (voir [2] et respectivement [3]) et par conséquent, d'après le théoreme 3 du travail [1], la fonction f est de troisième (de quatrième) classe de Baire.

THÉORÈME 10. Si la fonction $f: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow l_2$ est faiblement approximativement continue par rapport à E_o relativement à l'une variable et de première classe faible de Baire relativement à l'autre, elle est de troisième classe de Baire.

DÉMONSTRATION. Étant fixé $\xi_n \in E_o$, la fonction $\xi_n \circ f$ est de deuxième classe de Baire (voir [6]) et par conséquent la fonction f est de troisième classe de Baire.

THÉOREME 11. Si la fonction $f: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow l_2$ est faiblement a.e.-continue (faiblement r-continue) par rapport à E_o relativement à l'une variable et est mesurable (a la propriété de Baire) relativement à l'autre, elle est mesurable (a la propriété de Baire).

DÉMONSTRATION. La fonction $\mathfrak{z}_n \circ f$ est mesurable (a la propriété de Baire), quelle que soit la fonctionnelle $\mathfrak{z}_n \in E_o$ (voir [8]), elle est donc mesurable (a la propriété de Baire) (voir [1], th. 5 et respectivement le théorème 4 de cet article).

PROBLÈME. Une fonction $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ faiblement approximativement continue par rapport à E_o est - elle connexe; c'est - à - dire, $f(I)$ est - il un ensemble connexe pour tout intervalle $I \subset [0,1]$?

OUVRAGES CITÉS

[1] A.Alexiewicz, W.Orlicz, Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites, Fund. Math. 35 (1943), p. 105-126.

[2] R.O.Davies, Separate approximate continuity implies measurability, Proc. Comb. Phil. Soc. 73 (1973), p. 461-465.

[3] Z.Grande, Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Math. Slovaca 28 (1978), p. 113-118.

[4] Z.Grande, M.Topolewska, Sur les fonctions vectorielles approximativement continues (sous presse).

[5] S.Kempisty, Sur les fonctions quasi - continues, Fund. Math. 19 (1932), p. 184-197.

[6] M.Laczkovich, On the Baire class of functions of two variables, Fund. Math. (sous presse).

[7] R.O'Malley, Approximately differentiables functions. The r topology, Pac. Math. J. 72 (1977), p. 207-222.

[8] E.Marczewski, Cz. Ryll - Nardzewski, Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Annal. Soc. Polon. Math. 25 (1953), p. 145-154.

[9] Z.Zahorski Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), p. 1-54.

O SŁABEJ CIĄGŁOŚCI APROKSYMATYWNEJ

Streszczenie

W tym artykule bada się klasę funkcji $f: [0,1] \longrightarrow l_2$ słabo aproksymatywnie ciągłych (słabo r-ciągłych) [słabo a.e.-ciągłych] (definicje patrz [1] i [7]).