ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z.4

Włodzimierz Ślęzak
WSP Bydgoszcz

LA PROPRIÉTÉ DE BAIRE DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Parmi les nombreuses définitions équivalentes des espaces de Baire, retenons celle-ci:
un espace topologique $/E,T/$ est dit espace de Baire si, C_1 désignant l'ensemble des parties de E de première catégorie /maigres/, on a $T \cap C_1 = \{\emptyset\}$.
On dit, qu'une partie B de E a la propriété de Baire si elle s'écrit $B = U \Delta N = /U-N/ \cup /N-U/$ ou $U \in T$ et $N \in C_1$. L'ensemble $\mathcal{B}$ de ces parties est une tribu / σ - algèbre/ et C_1 est un idéal propre de $\mathcal{B}$.
Une application f: $E \to F$ valuée sur l'espace topologique séparable F est dit qu'elle possède la propriété de Baire si pour tout l'ensemble ouvert G dans F, l'ensemble $f^{-1}/G/$ appartient a $\mathcal{B}$. Les autres definitions se trouvent dans [3] - [5] . Dans son article [1] Z.Grande introduit la notion suivante:

DÉFINITION 1. La fonction g: $E \to F$ est dit B - dégénérée au point y $y \in E$, s'il existe l'ensemble ouvert G dans F tel que /i/ $g/y/ \in G$
/ii/ $g^{-1}/G/$ est de première catégorie au point y, c'est-à-dire il existe une voisinage ouvert V de y telle que

$$g^{-1}/G/ \cap V \in C_1$$

Soit $E = R \times R$ et $F = R$, ou R désigne l'espace des nombres réels.
Considérons une fonction f: $E \to F$ telle que toutes ses sections

$$y \mapsto f_x/y/ = f/x,y/, \quad x \in R$$
$$x \mapsto f^y/x/ = f/x,y/, \quad y \in R$$

ont la propriété de Baire. Dans [1] Z.Grande montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f: $R^2 \to R$ telle que toutes ses sections f_x et f^y ont la propriété de Baire, possèdait la propriété de Baire est que l'ensemble $D_o/f/ = \{ /y,x/ : f_x$ est /B/- - dégénérée dans le point $y \}$ soit maigre. Dans ce qui suit, on étudie les consequences de remplacer la définition 1 par la :

DÉFINITION 2. Une fonction $g: R \to R$ est dit /B/ $-\downarrow-$ dégénérée au point y, s'il existe une nombre reéle b telle que:

/i/ $y \in A^b/g/ = \{ x: \quad g/x/ < b \}$

/ii/ $A^b/g/$ est de première catégorie au point y.

Une fonction $f: R \to R$ est dit /B/ $-\uparrow-$ dégénérée au point y si la fonction $g = -f$ est /B/ $-\downarrow-$ dégénérée en ce point. /conf. [6] /

REMARQUE 1. Toute application /B/ $-\uparrow-$ dégénérée ou bien /B/ $-\downarrow-$ dénénérée est aussi /B/ - dégénérée, car /$\mathcal{B}$, C_1/ est un couple de relèvement complet /$M \in C_1 \wedge A \subset M \Rightarrow A \in C_1$/. Il exsiste une fonction /B/-dégénérée, qui n'est ni /B/ $-\downarrow-$ dégénérée ni /B/ $-\uparrow-$ dégénérée. On vérifiera aisément que

$$R \ni x \mapsto f/x/ = \begin{cases} x^{-1} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

satisfait /au point x = 0/ aux conditions exigées.

DÉFINITION 3. /voir [2] / Soit S un sous-ensemble de E qui est dense et dénombrable.

Ayant une fonction $g: E \to R$ on désigne par D_g l'ensemble de points de discontinuité de la fonction g et par g_s, g^s respectivements des fonctions:

$$E \ni t \mapsto g_s /t/ = \liminf_{S \ni x \to t} /g \mid S/ \; /x/ \in R$$

$$E \ni t \mapsto g^s /t/ = \limsup_{S \ni x \to t} /g \mid S/ \; /x/ \in R$$

Disons qu'une fonction g vérifie la propriété:

/P/ lorsque l'ensemble D_g appartient à C_1,

/S/ lorsque pour tout $t \in E$ on a $g_s /t/ \leq g/t/ \leq g^s /t/$ quel que soit l'ensemble dense et dénombrable S.

LEMME 1. /conf. [2], th. 3/ Soit $f: R^2 \to R$ une fonction telle que toutes ses sections f^y possèdent la propriété de Baire et toutes ses sections f_x ont les propriétés /S/ et /P/ de la définition 3. Alors f possède aussi la propriété de Baire.

LEMME 2. /conf. [1] , lemme 1/. Soit $g: R \to R$ une fonction avec la propriété de Baire. On designe par $D/g/$ l'ensemble $D/g/ = \{ y \in R :$ g est /B/ -↑- ou bien /B/ -↓- dégénérée au point $y \}$.

La fonction $y \mapsto h/y/ = \begin{cases} g/y/ & ; y \in R - D/g/ \\ \liminf\limits_{t \to y} (g \mid R - D/g/)/t/ & ; y \in D/g/ \end{cases}$

vérifie les conditions /P/ et /S/.

DÉMONSTRATION. Fixons un ensemble ouvert, non-vide $U \subset R$ et soit y_1 appartient a $V - D/g/$. Comme la fonction g n'est en ce point y_1 ni /B/ -↓- ni /B/ -↑- dégénérée et elle possède la propriété de Baire, alors il existe un ensemble ouverte, non-vide $U_1 \subset U$ tel, que l'ensemble

$$g^{-1} (g/y_1/ - \tfrac{1}{2} \; ; g/y_1/ + \tfrac{1}{2}) = A_{g/y_1/ - \frac{1}{2}} /g/ \; A^{g/y_2/ + \frac{1}{2}} /g/$$

est résiduel dans U_1.

Supposons, qu'il existe un point $y_1' \in U_1$ tel que

$$| h /y_1'/ - g/y_1/ | > 1/2$$

On distingue trois cases:

/1/ $y_1' \in R - D/g/$.

/2/ la fonction g est /B/ -↑- dégénérée au point y_1'.

/3/ la fonction g est /B/ -↓- dégénérée en ce point.

Dans chaque de ces possibilités il existe un ensemble ouvert, non-vide, $U_1' \subset U_1$, dans lequel l'ensemble

$$\{ y \in U_1 : | g/y/ - g/y_1/ | > \tfrac{1}{2} \}$$

est résiduel, en contradiction avec deux faits:

/4/ U_1 contient U_1'

/5/ l'ensemble $\{ y \in U_1 : | g/y/ - g/y_1/ | \leq \frac{1}{2} \}$ est résiduel dans U_1. Des résultats ci-dessus, il vient l' inclusion

$$h /U_1/ \subset [g/y_1/ - 1/2 \; ; g/y_1/ + 1/2]$$

On peut recommencer la même opération avec U_1, puis avec U_2, U_3, etc., finalement on construit une suite $/U_n/$ d'ensembles ouvertes, non-vides, tells, que /6/ $\mathrm{Cl} /U_{n+1}/ \subset U_n$, ou $\mathrm{Cl}/U_{n+1}/$ est, comme d'habitude, la fermeture topologique d'un ensemble U_{n+1}, /7/ Le diametre $\delta /U_n/$ ne depasse pas le nombre $\frac{1}{n}$ /8/ $\delta /h /U_n/ / \leq 2^{1-n}$ pour $n = 1,2, \ldots$

L'espace R étant complet, l'intersection $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ n'est pas vide.

Désignons par y_o le point commun de tous les ensembles U_n. La fonction h est continue en ce point y_o. Il reste à prouver que la fonction h vérifie la propriété /S/. Soit S un ensemble dense et dénombrable.Admettons,au contaire, que la fonction h ne vérifie pas la propriete /S/. Il existe alors un point y_o tel que $h_s/y_o/ > h/y_o/$ ou bien $h^s\ /y_o/ < h/y_o/$. Sans restraindre la généralité on peut supposer, que $h_s/y_o/ > h/y_o/$.

Nous avons trois possibilités:

/1'/ $y_o \in R \setminus D/g/$

/2'/ la fonction g est /B/ -↑- dégénérée au point y_o

/3'/ la fonction g est /B/ -↓- dégénérée en ce point.

Soit V une voisinage ouvert de point y_o telle que $h/y/ > h_s/y/ - {}^a/4$, pour toutes $y \in S \cap V$, ou a est la difference $h_s/y_o/ - h/y/$. Dans chaque de ces cases il existe un ensemble ouvert, non-vide U contenu dans V et tel, que l'ensemble $\{ y \in R:\ h/y/ < h/y_o/ + {}^a/4 \}$ est résiduel dans U. Fixons un point $y_1 \in U \cap S$. On voit facilement que $h/y_1/ > h_s/y_o/ - {}^a/4$. Dans chaque de 3 cases /1''/, /2''/, 3''/, concernant y_1, il exsist un ensemble ouvert, non-vide Z contenu dans U, et teli que l'ensemble $\{ y:\ h/y/ > h_s/y_o/ - {}^a/4 \}$ est résiduel dans Z, ce qui est contraire au fait que $Z \subset U$ et l'ensemble $\{ y:\ h/y/ < h/y_o/ + {}^a/4 \}$ est résiduel dans U. Cette contradiction achève la demonstration.

DÉFINITION 4. Soient E l'espace de Baire et $A \subset E$ un ensemble. On dit qu'un ensemble $B \subset E$ est un /B/-couverture de l'ensemble A lorsque trois conditions suivantes soient satisfaites:

/a/ A est un sous - ensemble de B,

/b/ l'ensemble B possède la propriété de Baire,

/c/ l'intersection $A \cap C$ est non-vide pour tout ensemble $C \subset B$ qui possède la propriété de Baire et est de II catégorie.

THÉORÈME. Soit $f: R^2 \to R$ une fonction telle que toutes ses sections f_x et f^y ont la propriété de Baire. La condition nécessaire et suffisante pour que telle fonction f avait la propriété de Baire est que l'ensemble $D/f/ = \{ /x,y/:\ f_x$ est /B/ -↑- ou /B/ -↓- dégénérée au point $y \}$ soit maigre $/\in C_1/$.

DÉMONSTRATION. /conf. [1] /. $\Rightarrow$: Désignons par E l'ensemble

$E = \{x: \{y: /x,y/ \in D/f/\}$ est de II catégorie$\}$ et par F l'ensemble

$F = \{y: \{x: /x,y/ \in D/f/\}$ est de II categorie$\}$.

Il est évident que $E \in C_1$ et $F \in C_1$. Posons, pour toutes les points y et pour $x \in R \setminus E$

$$h_x/y/ = \begin{cases} f_x/y/ \; ; \; y \in R \setminus [D/f/]_x \\ \liminf_{t \to y} /f_x \mid R \setminus [D/f/]_x / \, /t/ \; ; \; y \in [D/f/]_x \end{cases}$$

ou $[D/f/]_x = \{ y: /x,y/ \in D/f/ \}$.

Posons aussi $\tilde{f}/x,y/ = h_x/y/$ pour $/x,y/ \in /R-E/ \times /R-F/$. D'après le lemme 2 toutes les fonctions h_x /pour $x \in R - E$/ ont les propriétés /P/ et /S/. Car $F \in C_1$ et toutes les sections $\tilde{f}^y$ /pour $y \in R - F$/ ont la propriété de Baire, alors la fonction $\tilde{f}: /R-E/ \times /R-F/ \to R$ possède, d'après le lemme 1, la propriété de Baire. Par conséquent notre fonction possède cette propriété aussi. $\Leftarrow$: Admettons, au contraire, que l'ensemble D/f/ est de II catégorie. Supposons maintenant que l'on fasse correspondre à tout point $/x,y/ \in D/f/$ un intervalle ouvert d'extrémités rationelles U/x,y/ et un ensemble ouvert V/x,y/ d'une base dénombrable dans R telles que

/9/ f/x,y/ appartient à U/x,y/,

/10/ y appartient à V/x,y/,

/11/ l'image réciproque $/f^y/^{-1} \left(U/x,y/ \cap V/x,y/ \right)$ est maigre. Car l'ensemble D/f/ est de II catégorie, il existe donc un intervalle U d'extrémités rationelles et un ensemble ouvert $V \subset R$ tels que l'ensemble $A = \{ /x,y/ \in D/f/ : V/x,y/ = V$ et $U/x,y/ = U \}$ est de II catégorie. Soit $B \supset A$ une /B/-couverture de l'ensemble A. Car f possède la propriété de Baire, il vient que l'ensemble

$D = f^{-1} /U/ \cap B \cap /R \times V/$ aussi possède cette propriété. Il est de II catégorie, puisque il contient l'ensemble A. D'autre part toutes les sections D_x de l'ensemble D sont maigres, d'ou la contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

1 Z. Grande, Sur la propriété de Baire des fonctions de deux variables, Bull.Acad. Polon. de sci. Sér. Sci. Math., Astr., Phys. vol XXV, no 4 /1977/, p. 349-354.

2 E.Marczewski, Cz.Ryll-Nardzewski, Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Ann.Soc. Polon. Math. 25/1952/, p. 145-154.
3 J.C. Oxtoby, Mesure and category, A Survey of the Analogies between Topological an Mesure Spaces, New York 1971.
4 J.C.Oxtoby, Cartesian products of Baire spaces,Fund.Math.49/1961/, p. 157 - 166.
5 R.Sikorski, Funkcje rzeczywiste, tom I, PWN 1958.
6 W.A.Ślęzak, Une condition équivalente a la mesurabilité d'une fonction de deux variables, Problemy Matematyczne, vol. 3

LA PROPRIÉTÉ DE BAIRE DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

Résumé

Dans cet article on introduit la notion plus géneral que la /B/-dégénération utilisé dans [1] . En usant de cette notion on formule une condition équivalente à la propriété de Baire d'une fonction de deux variables dont les sections ont la propriété de Baire.

WŁASNOŚĆ BAIRE'A FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH

Streszczenie

W.Ślęzak; Własność Baire'a funkcji dwóch zmiennych. W tym artykule wprowadza się pojęcie bardziej ogólne niż /B/ - degeneracja zastosowana w [1] . Wykorzystując to pojęcie formułuje się warunek równoważny własności Baire'a funkcji dwóch zmiennych, których cięcia mają własność Baire'a.