ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z. 3

EULALIA GRANDE
ZBIGNIEW GRANDE
Bydgoszcz

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES a. e. SEMI - - EQUICONTINUES SUPÉRIEUREMENT PAR RAPPORT À UNE VARIABLE

Soit $f:R^2 \longrightarrow R$ une fonction réelle de deux variables réelles. Étant fixés $x_o \in R$ et $y_o \in R$, les fonctions d'une variable $f_x(y) = f(x_o,y)$ et $f^{y_o}(x) = f(x,y_o)$ s'appellent sections de la fonction f correspondant respectivement à x_o et y_o.

On sait que la semi - équicontinuité supérieure de la famille de toutes les sections f_x et la mesurabilité (au sens de Lebesgue) de toutes les sections f^y impliquent déjà la mesurabilité (également au sens de Lebesgue) de la fonction f (v.[2]). D'autre part l'hypothèse du continu implique l'existence d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ non - mesurable et ayant toutes ses sections f_x approximativement semi - équicontinues supérieurement [(1)] et toutes ses sections f^y mesurables (v.[3]).

[(1)] On dit que les fonctions $g_s:R \longrightarrow R$ ($s \in S$ et S désignant un ensemble d'indices) sont semi - équicontinues supérieurement par rapport á certaine topologie T lorsqu'il existe pour tout $x \in R$ et pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un ensemble $A(x,\varepsilon) \in T$ tel que $x \in A(x,\varepsilon)$ et $g_s(t) - g_s(x) < \varepsilon$ pour tout $t \in A(x,\varepsilon)$, quel que soit $s \in S$.

Remarquons que la semi - équicontinuité supérieure approximative est la semi - équicontinuité supérieure relativement à la topologie de densité. Dans l'article [7] O'Malley a introduit la topologie a. e. qui se compose de tous les ensembles $A \subset R$ d - denses en soi (c'est - à - dire, tout point $x \in A$ est un point de densité de l'ensemble A) tels que $m(A) = m(\mathrm{Int}\ A)$ (m désigne comme d'habitude la mesure de Lebesgue dans R et $\mathrm{Int}\ A$ désigne l'intérieur de l'ensemble A) et dans l'article [6] il a démontré que la classe des fonctions continues par rapport à la topologie a. e. est égale à la classe de toutes les fonctions approximativement continues et continues presque partout.

Dans cet article nous démontrons que la semi - équicontinuité supérieure par rapport à la topologie a. e. de la famille de toutes les sections f_x d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ et la mesurabilité de toutes les sections f^y impliquent la mesurabilité de la fonction f.

Dans la démonstration de ce théorème nous profiterons du suivant:

Lemme 1. ([1] et [4]). Soit (X, M, μ) un espace dont la mesure σ - finie est μ . Supposons qu'une fonction $f:X \longrightarrow R$ soit telle que , quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, la classe d'ensembles

$$D_\varepsilon = \{ D \in M : \operatorname*{osc}_D f \leq \varepsilon \}$$

satisfasse à la condition suivante:

(E) il existe pour tout ensemble $A \in M$ de mesure μ positive un ensemble $D \in D_\varepsilon$ tel que $D \subset A$ et $\mu(D) > 0$.

Alors la fonction f est $\bar{\mu}$ - mesurable, où $\bar{\mu}$ designe le complété de la mesure μ.

Théorème. Si toutes les sections f_x d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ sont semi - équicontinues supérieurement par rapport à la topologie a. e. et toutes les sections f^y sont mesurables, la fonction f est mesurable.

Démonstration. Afin d'établir ce théorème il suffit de démontrer que la fonction f satisfait à la condition (E) du lemme 1. Soit $A \subset R^2$ un ensemble mesurable de mesure positive. Fixons un nombre $\varepsilon > 0$. Sans restreindre la géneralité, on peut supposer que la fonction f est bornée, car dans le cas contraire il suffit considérer la fonction arctg f , qui satisfait également aux hypothèses de notre théorème.

Désignons par a l'infimum essentiel $\inf\limits_{(x,y)\in A} \text{ess } f(x,y)$, par B l'ensemble $A - \{(x,y) \in A : f(x,y) < a\}$ et par C l'ensemble $\{(x,y) \in B : f(x,y) < a + \varepsilon/4\}$. Remarquons que $m_2^*(C) > 0$, où m_2^* désigne la mesure extérieure de Lebesgue dans R^2. Soit $D \subset R^2$ une couverture mesurable de l'ensemble C, c'est - à - dire, D est un ensemble mesurable tel que $D \supset C$ et $m_{2*}(D - C) = 0$ (m_{2*} désigne la mesure intérieure de Lebesgue dans R^2). D'après le lemme 3 du travail [5] il existe pour l'ensemble D un ensemble $F \subset D$ du type F_σ et tel que $m_2(D - F) = 0$ (m_2 désigne la mesure de Lebesgue dans R^2) et $F \subset + F$, c'est - à - dire, quel que soit le point $(x,y) \in F$, (x,y) est un point de densité de l'ensemble F, x est point de densité de l'ensemble $F^y = \{t \in R : (t,y) \in F\}$ et y est un point de densité de l'ensemble $F_x = \{t \in R : (x,t) \in F\}$. On vérifie facilement que $m_2(F \cap C) > 0$. Les sections f_x étant semi - continues supérieurement relativement à la topologie a. e., on peut faire correspondre à chaque point $(x,y) \in F \cap C$ un intervalle ouvert $I(x,y)$ d'extrémités rationnelles tel que $m(I(x,y) \cap F_x) > 0$ et $f(x,t) < a + \varepsilon/4$ pour tout $t \in I(x,y)$. La famille de tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles étant dénombrable et $m_2(F \cap C) > 0$, il existe un intervalle de cette famille, que nous désignons par I, tel que $m_2^*(\{(x,y) \in F \cap C$: au point (x,y) correspond l'intervalle $I\}) > 0$.

Désignons par G l'ensemble $\{x \in R$: il existe y tel que $(x,y) \in F \cap O$ et l'intervalle I correspond au point $(x,y)\}$ et par H l'ensemble $(R \times I) \cap F$. Comme $m(H_x) > 0$ pour tout $x \in G$ et $m^*(G) > 0$ (m^* désigne la mesure extérieure de Lebesgue dans R), on a donc $m_2^*(H) > 0$. De nouveau d'après le lemme 3 du travail [5] il existe pour l'ensemble H un ensemble K du type F_σ tel que $K \subset H$, $m_2(H - K) = 0$ et $K \subset\cdot+ K$. Soit $(x_0,y_0) \in K$ un point tel que $x_0 \in G$ et la section f^{y_0} soit approximativement continue au point x_0. Comme $x_0 \in G$ et $y_0 \in I$, on a $f(x_0,y_0) < a + \varepsilon/4$. La section f^{y_0} étant approximativement continue au point x_0, il existe un ensemble mesurable $L \subset R$ tel que x_0 est un point de densité de l'ensemble L et $f(x,y_0) < a + \varepsilon/4$ pour tout $x \in L$. Mais $K \subset\cdot+ K$, x_0 est donc un point de densité de l'ensemble K^{y_0} et par conséquent $m(L \cap K^{y_0}) > 0$. Les sections f_x étant semi - équicontinues supérieurement par rapport à la topologie a. e., il existe un ensemble ouvert $U \subset R$ tel que y_0 est un point de densité de l'ensemble U et quel que soit $x \in R$ on a $f(x,y) - f(x,y_0) < \varepsilon/4$ pour tout $y \in U$. L'ensemble U étant la somme de ses composantes J_n $(n=1,2,\dots)$ et quel que soit $x \in K^{y_0}$, y_0 étant un point de densité de l'ensemble $U \cap K_x$, il existe un indice n_0 et ensemble $M \subset K^{y_0} \cap L$ de mesure extérieure positive tels que, quel que soit $x \in M$, on a $m(K_x \cap J_{n_0}) > 0$. Posons $N = (L \times J_{n_0}) \cap K$. L'ensemble N est mesurable et $m_2(N) > 0$, puisque $m(N_x) = m(K_x \cap J_{n_0}) > 0$ pour tout $x \in M$ et $m(M) > 0$. Mais $m_2(N - A) = m_2(N - D) = m_2(N - F) = m_2(N - K) = 0$, l'ensemble $P = N \cap B$ est mesurable et de mesure positive. Soit (x_1,y_1) un point de l'ensemble P. Comme $x_1 \in L$ et $y_1 \in U$, on a $f(x_1,y_0) < a + \varepsilon/4$ et $f(x_1,y_1) < f(x_1,y_0) + \varepsilon/4$ et par conséquent $f(x_1,y_1) < a + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = a + \varepsilon/2$. D'autre part $(x_1,y_1) \in B$, on a donc $f(x_1,y_1) \geq a$. Il en résulte que $\operatorname{osc}_P f \leq \varepsilon$ et $P \subset A$ et $m_2(P) > 0$, ce qui termine la démonstration.

Problème. Caractérisez (dans l'hypothèse du continu et sans l'hypothèse du continu) la plus faible topologie T d'ensembles de l'espace R telle qu'il existe une fonction non - mesurable $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x semi - équicontinues supérieurement par rapport à la topologie T et toutes ses sections f^y mesurables. Existe - t - il (dans l'hypothèse du continu et sans l'hypothèse du continu) une fonction non - mesurable $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f^y mesurables et toutes ses sections f_x semi - équicontinues supérieurement par rapport à la r-topologie introduite par O'Malley dans son article [7] ?

TRAVAUX CITES

[1] R.O.Davies; Separate approximate continuity implies measurability, Proc. Camb. Phil. Soc. 73(1973), pp.285 - 289

[2] Z.Grande; L'équicontinuité approximative et la mesurabilité, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 23(1975), pp. 1059 - 1064

[3] Z.Grande; La semiéquicontinuité approximative et la mesurabilité, Colloq. Math. (sous presse)

[4] Z.Grande; Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables. Bull. Acad. Polon. Sci. , Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 21(1973), pp. 813 - 816

[5] Z.Grande; La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition F(x,f(x)) , Diss. Math. 159(1978), pp. 1 - 50

[6] R.O'Malley; Insertion of Baire* 1, Darboux functions, Revue Roum. Math. Pures et Appl. 24(1979), pp. 1445 - 1448

[7] R.O'Malley; Approximately differentiable functions: The r topology, Pacific Math. J. 72(1977), pp. 207 - 222

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES A. E. SEMI - - ÉQUICONTINUES SUPÉRIEUREMENT PAR RAPPORT À UNE VARIABLE

Résumé

Dans cet article on démontre que la semi - équicontinuité supérieure par rapport à la topologie a. e. introduite par O'Malley dans ses articles [6] et [7] de toutes les sections f_x d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ et la mesurabilité de toutes les sections f^y impliquent la mesurabilité de la fonction f.