ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNE W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z. 3

ZBIGNIEW GRANDE
Bydgoszcz

LES PROBLEMES CONCERNANT LES FONCTIONS RÉELLES

Dans cet article je formule quelques problèmes ouverts concernant les fonctions réelles.

Problème 1. L'hypothèse du continu implique:

(a) l'existence d'une fonction réelle de deux variables $f:R^2 \longrightarrow R$ non-mesurable (au sens de Lebesgue) telle que toutes ses sections $f_x(t) = f(x,t)$ sont mesurables (au sens de Lebesgue) et toutes ses sections $f^y(t) = f(t,y)$ sont approximativement continues (v. [1] et [2]).

(b) l'existence d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ non-mesurable et telle que toutes ses sections f_x sont approximativement semicontinues supérieurement et toutes ses sections f^y sont approximativement semicontinues inférieurement [2] .

(c) l'existence d'une fonction non-mesurable $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x et f^y continues presque partout, de première classe de Baire et avec la propriété de Darboux [3] .

(d) l'existence d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire et telle que toutes ses sections f_x ont la propriété de Baire et toutes ses sections f^y sont approximativement continues (la construction de cette fonction f est semblable à la construction de la fonction f de (a)).

(e) l'existence d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire et telle que toutes ses sectins f_x sont qualitativement semicontinues supérieurement et toutes ses sections f^y sont qualitativement semicontinues inférieurement (la construction de cette fonction f est la même que la construction de la fonction f de (b).)

(f) l'existence d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ nonborélienne et telle que toutes ses sections f_x ont la propriété (K) et sont de deuxième classe de Baire et toutes ses sections f^y sont approximativement continues [4] (Une fonction $g:R \longrightarrow R$ a la propriété (K) lorsqu'elle est ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé F ayant la propriété de Denjoy ; c'est-à- dire tel que $m(U \cap F) > 0$ pour tout ensemble ouvert U tel que $U \cap F \neq \emptyset$; m désignant la mesure de Lebesgue dans R).

(g) l'existence d'une fonction non-mesurable $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x approximativement semiéquicontinues supérieurement et toutes ses sections f^y mesurables [5] .

(h) l'existence d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire et telle que toutes ses sections f_x sont qualitativement semiéquicontinues supérieurement et toutes ses sections f^y ont la propriété de Baire [6] .

(i) l'existence d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ non-mesurable et ayant toutes ses sections f_x et f^y mesurables et non dégénérées en tout point $x \in R$ [7] (On dit qu'une fonction mesurable $g:R \longrightarrow R$ est non dégénérée au point $x_0 \in R$ lorsque la densité supérieure de l'ensemble $f^{-1}(U)$ au point x_0 est positive, quel que soit l'ensemble ouvert U contenant $f(x_0)$.

(j) l'existence d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'étant pas sup-mesurable et telle que toutes ses sections f_x sont approximativement continues et toutes ses sections f^y sont mesurables ([8], Th.29)(Une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ est dite sup-mesurable lorsque, quelle que soit la fonction mesurable $g:R \longrightarrow R$, la superposition $x \longrightarrow f(x, g(x))$ est également mesurable).

(k) l'existance d'une fonction sup-mesurable $f:R^2 \longrightarrow R$ qui n'est pas mesurable [9] .

Qui des conditions (a) - (k) impliquent - elles l'hypothèse du continu ?

Probléme 2.

(a) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ qui n'est pas de première classe de Baire, dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont approximativement continues ?([8] , Problème 6)

(b) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont approximativement continues à droite et qui n'est pas dé première classe de Baire ?

(c) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues à droite et toutes les sections f^y sont approximativement continues et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(d) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont des dérivées et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(e) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ bornée dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont des dérivées et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(f) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues à droite et toutes les sections f^y sont des dérivées et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(g) Existe - t - il une fonction bornée $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues à droite et toutes les sections f^y sont des dérivées et qui n'est pas de première classe de Baire ?

Remarque 1. On sait que toute fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues à droite et toutes les sections f^y sont de première classe de Baire est de deuxième classe de Baire [25] et qu'il existe une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ qui n'est pas de première classe de Baire, dont toutes les sections f_x et f^y sont approximativement continues et continues presque partout [11] et qu'il existe une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont de première classe de Baire et ont la propriété de Darboux et qui n'est pas de première classe de Baire [4].

Problème 3.

(a) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont croissantes et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(b) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues à droite et toutes les sections f^y sont croissantes et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(c) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ qui n'est pas de première classe de Baire, dont toutes les sections f_x sont approximativement continues et toutes les sections f^y sont croissantes ?

(d) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont approximativement continues à droite et toutes les sections f^y sont croissantes et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(e) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont des dérivées et toutes les sections f^y sont croissantes et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(f) Existe - t - il une fonction bornée $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont des dérivées et toutes les sections f^y sont croissantes et qui n'est pas de première classe de Baire ?

(g) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont continues et toutes les sections f^y sont monotones (croissantes ou décroissantes) et qui n'est pas de première classe de Baire ?

Remarque 2. On sait que toute fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x sont approximativement continues et toutes les sections f^y sont de première classe de Baire est de deuxième classe de Baire [22] et qu'il existe une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ non-borélienne et telle que toutes ses sections f_x et f^y sont croissantes [25].

Problème 4.

(a) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire, dont toutes les sections f_x sont approximativement continues et toutes les sections f^y sont ponctuellement discontinues ?

(b) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire, dont toutes les sections f_x sont approximativement continues et toutes les sections f^y ont la propriété (K) ?

(c) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire, dont toutes les sections f_x sont des dérivées et toutes les sections f^y sont ponctuellement discontinues ?

(d) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire, dont toutes les sections f_x sont des dérivées et toutes les sections f^y ont la propriété (K) ?

(e) Existe - t - il une fonction bornée $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire, dont toutes les sections f_x sont des dérivées et toutes les sections f^y sont ponctuellement discontinues ?

(f) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ bornée, n'ayant pas de la propriété de Baire, dont toutes les sections f_x sont des dérivées et toutes les sections f^y ont la propriété (K) ?

(g) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire, dont toutes les sections f_x sont approximativement continues à droite et toutes les sections f^y sont ponctuellement discontinues ?

(h) Existe - t - il une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'ayant pas de la propriété de Baire, dont toutes les sections f_x sont approximativement continues à droite et toutes les sections f^y ont la propriété (K) ?

Remarque 3. On sait que toute fonction bornée $f:R^2 \longrightarrow R$, dont toutes les sections f_x sont des dérivées et toutes les sections f^y sont continues presque partout, a la propriété de Baire [10].

Problème 5. (voir aussi [5]) On sait que toute fonction $f:R^2 \longrightarrow R$, dont toutes les sections f_x sont approximativement continues et continues presque partout et toutes les sections f^y sont mesurables, est mesurable [25].

D'autre part l'hypothèse du continu implique qu'il existe une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ non-mesurable et telle que toutes ses sections f_x sont approximativement continues et toutes les sections f^y sont mesurables [1]. La classe de toutes les fonctions approximativement continues et continues presque partout est égale à la classe de toutes les fonctions continues par rapport à la topologie a. e. introduite par O'Malley dans [24] ; c'est - à - dire la topologie qui se compose de tous les ensembles d-ouverts U tels que $m(U) = m\big(\mathrm{Int}\ U\big)$ (m désigne la mesure de Lebesgue dans R, Int U désigne l'intérieur de l'ensemble U et l'ensemble U est dit d-ouvert lorsque tout point $x \in U$ est un point de densité de l'ensemble U (v. aussi [11])). La classe de toutes les fonctions approximativement continues est égale à la classe de toutes les fonctions continues par rapport à la topologie de densité, c'est - à - dire la topologie qui se compose de tous les ensembles d-ouvets.

(a) Caractérisez la plus faible topologie T d'ensembles de nombres réels telle qu'il existe une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ non-mesurable dont toutes les sections f_x sont continues par rapport à la topologie T et toutes les sections f^y sont mesurables. (dans l'hypothèse du continu et sans l'hypothèse du continu)

(b) Dans le travail [24] O'Malley a introduit la r-topologie, c'est - à - dire la topologie dont une base se compose de tous les ensembles d-ouverts et du type G_δ et F_σ à la fois. Existe - - t - il (dans l'hypothèse du continu) une fonction non-mesurable $f:R^2 \longrightarrow R$, dont toutes les sections f_x sont r-continues (continues relativement à la r-topologie) et toutes les sections f^y sont mesurables ?

Problème 6.

(a_1) Soit $f:R^2 \longrightarrow R$ une fonction de deuxième classe de Baire. La fonction f est - elle la limite d'une suite de fonctions $f_n:R^2 \longrightarrow R$ approximativement continues par rapport à la base ordinaire [28] et telles que toutes ses sections $(f_n)_x$ et $(f_n)^y$ sont approximativement continues ?

(a_2) Soit $f:R^2 \longrightarrow R$ une fonction de deuxième classe de Baire. Existe - t - il une suite de fonctions f_n continues par rapport à la topologie $d \times d$ (d désigne la topologie de densité) convergente en tout point vers la fonction f?

(a_3) Soit $f:R^2 \longrightarrow R$ une fonction approximativement continue par rapport à chacune de deux variables. Existe - t - il une suite de fonctions continues par rapport à la topologie produite $d \times d$ convergente en tout point vers f ?

(b) ([11], P 1023) Dans l'article [11] j'ai démontré le théorème suivant:

Théorème 1. Si une fonction $f:R \longrightarrow R$ est la limite d'une suite de fonctions approximativement continues et continues presque partout, alors elle satisfait à la condition suivante:

(b) étant donnés deux nombres réels a et b tels que $a > b$, si les ensembles non-vides

$$U \subset \{x \in R : f(x) > a\} \quad \text{et} \quad V \subset \{x \in R : f(x) < b\}$$

sont tels que la densité supérieure de la fermeture $Cl(U)$ de l'ensemble U soit positive en chaque point $x \in U$ et la densité supérieure de la fermeture $Cl(V)$ de l'ensemble V soit positive en chaque point $x \in V$, alors $U \not\subset Cl(V)$ ou $V \not\subset Cl(U)$.

La condition (b) du théorème 1 est - elle suffisante pour que f soit la limite d'une suite de fonctions approximativement continues et continues presque partout ?

(c) ([18], Problème) La fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x et f^y continues presque partout et approximativement continues est - elle toujours la limite d'une suite de fonctions continues presque partout ?

Remarque 3. Il existe une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x et f^y approximativement continues qui n'est continue en aucun point et qui n'est la limite d'aucune suite de fonctions continues presque partout [18].

Problème7. Dans l'article [26] Mauldin a caractérisé le système de Baire généré par la famille des fonctions réelles continues presque partout relativement à une mesure μ dans un espace métrique, mesuré. Dans l'article [27] Preiss a démontre que toute fonction réelle d'une variable réelle de deuxième classe de Baire est la limite d'une suite de fonctions approximativement continues, ce qui caractérise déjà le système de Baire généré par la famille des fonctions approximativement continues. Le résultat de Preiss a été généralisé par moi dans [12] au cas où la fonction de deuxième classe de Baire est définie sur un espace métrique et mésuré satisfaisant certaines conditions supplémentaires.

(a) Caractérisez le système de Baire généré par la famille de toutes les fonctions $f:R^n \longrightarrow R$ approximativement continues et continues presque partout.

(b) Caractérisez le système de Baire généré par la famille de toutes les fonctions $f:R \rightarrow R$ continues presque partout et étant des dérivées.

(c) Caractérisez le système de Baire généré par la famille des fonctions r-continues sur R.

(d) Caractérisez le système de Baire généré par la famille de toutes les fonctions $f:R \rightarrow R$ continues presque partout et surpassement continues. Une fonction $g:R \longrightarrow R$ est dite surpassement continue au point x_o lorsqu'il existe un ensemble mesurable E et un nombre $\delta > 0$ tels que $x_o \in E$, $m(I \cap E)/m(I) > 1/2$ pour tout intervalle I contenant x_o et de longueur positive, plus petite que δ et la fonction réduite g/E est continue au point x_o.

(e) Caractérisez le système de Baire généré par la famille de toutes les fonctions $f:R \longrightarrow R$ ayant la propriété (G) introduite par moi dans [8] .(Une fonction $f:R \longrightarrow R$ a la propriété (G), lorsque, quels que soient l'ensemble mesurable A de mesure positive et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert J tel que $m(A \cap J) > 0$ et osc $f \leq \varepsilon$ sur l'ensemble de tous les points de densité l'ensemble $J \cap A$).

Remarque 4. Dans les travaux [13] et [14] j'ai caractérisé le système de Baire généré par la famille de toutes les fonctions ayant la propriété (K).

Remarque 5. Comparez les systèmes dans (a) -(e) avec le système de Baire généré par la famille des fonctions continues.

Problème 8. On sait que la mesurabilité d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ et la continuité approximative de toutes les sections f_x de cette fonction ou bien le fait que toutes les sections f_x sont des dérivées impliquent la sup-mesurabilité de la fonction f ([8] et [15]).

(a) La mesurabilité d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ et le fait que toutes ses sections f_x sont surpassement continues impliquent - ils la sup - mesurabilité de la fonction f ?

(b) La mesurabilité d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ et la propriété M_4 de Zahorski de toutes les sections f_x impliquent - elles la sup-mesurabilité de la fonction f ? (La propriété M_4 de Zahorski est définie dans le travail [31]).

Problème 9. Dans le travail [29] Ślęzak a démontré que la propriété (G) de toutes les sections f_x d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ et la propriété M_4 de Zahorski [31] de toutes ses sections f^y impliquent la mesurabilité de la fonction f. La propriété (G) de toutes les sections f_x et la propriété M_3 de Zahorski [31] de toutes les sections f^y impliquent - elles la mesurabilité de la fonction f ?

Problème 10. Dans l'article [16] j'ai démontré que toute fonction $f:R^3 \longrightarrow R$ approximativement continue par rapport à chacune de trois variables est de classe 3 de Baire. Dans le travail [30] Ślęzak a démontré le même théorème pour la fonction bornée $f:R^3 \longrightarrow R$ qui est une dérivée par rapport à chacune de trois variables.

(a) La fonction $f:R^3 \longrightarrow R$ qui est une dérivée par rapport à chacune de trois variables doit - elle être de classe 3 de Baire?

(b) Existe - t - il une fonction $f:R^3 \longrightarrow R$ ($f:R^n \longrightarrow R$, $n > 3$) approximativement continue par rapport à chacune de trois variables (de n variables) qui n'est pas de deuxième classe de Baire (de classe n-1 de Baire) ?

(c) Existe - t - il une fonction $f:R^3 \longrightarrow R$ ($f:R^n \longrightarrow R$, $n>3$) continue presque partout et approximativement continue par rapport à chacune de trois variables (de n variables) qui n'est pas de deuxième classe de Baire (de classe n-1 de Baire) ?

Problème 11. Dans l'article [17] j'ai introduit la définition suivante:

Définition. Soient R l'espace des nombres réels et T un ensemble d'indices. On dit que la famille de fonctions $f_t:R\longrightarrow R$ ($t\in T$) a la propriété (A_2) lorsqu'il existe pour tout ensemble fermé, non-vide $A\subset R$ un point $x_0\in A$ tel que les fonctions partielles f_t/A ($t\in T$) sont équicontinues au point x_0.;

et j'ai là démontré que la propriété (A_2) de toutes les sections f_x d'une fonction $f:R^2\longrightarrow R$ et l'appartenance de toutes les sections f^y de cette fonction à la classe ξ ($\xi>0$) de Baire impliquent l'appartenance de cette fonction f à la classe ξ de Baire. En outre, j'ai là démontré que la famille de fonctions $f_t:R\longrightarrow R$ ($t\in R$) semi - équicontinues supérieurement en chaque point x et bornées par une constante commune M a la propriété (A_2), d'où il vient que l'appartenance de toutes les sections f^y d'une fonction $f:R^2\longrightarrow R$ à la classe ξ ($\xi>0$) de Baire et la semi - équicontinuité supérieure de toutes ses sections f_x impliquent l'appartenance de cette fonction f à la classe ξ de Baire.

(a) Une famille de fonctions $f_t:R\longrightarrow R$ ($t\in T$) semi - équicontinues supérieurement en chaque point $x\in R$ a - t - elle la propriété (A_2) ?

(b) Une famille de fonctions $f_t:R\longrightarrow R$ ($t\in T$) approximativement équicontinues en chaque point $x\in R$ a - t - elle la propriété (A_2) ? [17] (On dit que les fonctins $f_t:R\longrightarrow R$ ($t\in T$) sont approximativement équicontinues au point $x \in R$ lorsqu'il existe un ensemble E tel que $x \in E$, x est un point de densité de l'ensemble E et les fonctions partelles f_t/E sont équicontinues au point x).

(c) Une famille de fonctions $f_t:R \longrightarrow R$ $(t \in T)$ surpassement équicontinues en chaque point $x \in R$ a - t - elle la propriété (A_2) ? (On dit que les fonctions $f_t:R \longrightarrow R$ $(t \in T)$ sont surpassement équicontinues au point $x \in R$ lorsqu'il existe un ensemble E et un nombre $\delta > 0$ tels que $x \in E$, $m(I \cap E)/m(I) > 1/2$ pour tout intervalle I contenant x, de longueur positive, plus petite que δ et les fonctions partielles f_t/E sont équicontinues au point x).

(d) Une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$, dont toutes les sections f_x sont approximativement équicontineus en chaque point $x \in R$ et toutes les sections f^y appartiennent à la classe ξ $(\xi > 0)$ de Baire appartient - elle à la classe ξ de Baire ?

(e) Une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$, dont toutes les sections f_x sont surpassement équicontinues en chaque point $x \in R$ et toutes les sections f^y appartient à la classe ξ $(\xi > 0)$ de Baire appartient - elle également à la classe ξ de Baire ?

Remarque 6. Remarquons que la réponse affirmative au problème (b) et (c) respectivement donne tout de suite la réponse affirmative aux problèmes (d) et (e).

Problème 12. Soit $f:R^2 \longrightarrow R$ une fonction approximativement continue par rapport à la base ordinaire [28]. Désignons par $A(f)$ l'ensemble

$$\{(x,y): f_x \text{ n'est pas approximativement continue au point } y \text{ ou bien } f^y \text{ n'est pas approximativement continue au point } x\}.$$

On sait que l'ensemble $A(f)$ peut être dénombrable infini.

(a) L'ensemble $A(f)$ peut - il être indénombrable?

(b) Caractérisez les ensembles $A(f)$.

Problème 13. Dans l'article [19] j'ai démontré le théorème suivant:

Théorème. Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble. Pour qu'il existe pour toute fonction de première classe de Baire $g:[0,1] \to R$ une fonction $f:[0,1] \to R$ continue presque partout, approximativement continue et telle que $\{x \in [0,1]: f(x) = g(x)\} \supset A$, il faut et il suffit que la fermeture $Cl(A)$ de l'ensemble A soit de mesure zéro.

Ce théorème a été généralisé dans l'article [20] pour le cas des fonctions définies sur $[0,1]$ avec une mesure μ plus générale que la mesure m de Lebesgue et aux valeurs dans un espace de Banach Y.

(a) Le théorème précédent rèste - t - il vrai dans le cas des fonctions $f,g:R^2 \to R$, si la continuité presque partout sera rapportée à la mesure m_2 de Lebesgue et la continuité approximative de la fonction f sera rapportée à la base ordinaire?

(b) Le théorème précédent rèste - t - il vrai dans le cas des fonctions $f,g:R^2 \to R$ et de la mesure m_2, si la continuité approximative de la fonction f sera remplacée par la continuité de cette fonction f par rapport à la topologie $d \times d$?

(c) Le théorème suivant est - il vrai ?

Théorème. Soit $A \subset R^2$ un ensemble. Pour qu'il existe pour toute fonction $g:R^2 \to R$ de première classe de Baire une fonction $f:R^2 \to R$ continue presque partout par rapport à la mesure m_2 approximativement continue relativement à la base forte [28] et telle que $\{(x,y) \in R^2 : f(x,y) = g(x,y)\} \supset A$, il faut et il suffit que toutes les sections $(Cl(A))_x = \{y \in R : (x,y) \in Cl(A)\}$ et $(Cl(A))^y = \{x \in R : (x,y) \in Cl(A)\}$ de la fermeture $Cl(A)$ de l'ensemble A soient de mesure zéro.

Problème 14. (comparer [21]). Le théorème suivant est - il vrai ?

Théorème. Soient C l'espace des nombres complexes et Y l'espace complexe, séparable de Banach (ou même de Hilbert) de dimension infinie. Soit $g:R\longrightarrow Y$ une fonction bornée. Pour que le produit f g de toute dérivée bornée $f:R\rightarrow C$ avec la fonction g soit une dérivée, il faut et il suffit que la fonction g soit approximativement continue. (Une fonction $g:R\longrightarrow Y$ est dite approximativement continue au point x lorsque g est mesurable et x est un point de densité de l'ensemble $g^{-1}(U)$, quel que soit l'ensemble ouvert $U\subset Y$ contenant g(x) .

Remarque 7. Dans le cas où Y est de dimension finie ce théorème résulte du plus général théorème 12 de [21].

TRAVAUX CITÉS:

[1] R.O.Davies, J.Dravecky ; On the measurability of functions of two variables, Matematicky Casopis 23 (1973), p.285-289

[2] Z.Grande ; La mesurabilité des fonctions de deux variables, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974), p.657-661

[3] Z.Grande ; Un exemple de fonction non mesurable, Revue Roum. Math. Pures et Appl. 24 (1979), p.101-102

[4] Z.Grande ; Quelques remarques sur les classes de Baire des fonctions de deux variables, Math. Slovaca 26 (1976), p.241-246

[5] Z.Grande ; La semiéquicontinuité approximative et la mesurabilité, Colloq. Math. (sous presse).

[6] Z.Grande ; Une remarque sur la propriété de Baire, Demonstratio Mathematica (sous presse)

[7] Z.Grande ; Deux exemples de fonctions non mesurables, Col-

loquium Math. 40(1979), p.305-309

[8] Z.Grande ; La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition F(x,f(x)), Dissert. Math. 159(1978), p.1-50

[9] Z.Grande, J.S.Lipiński ; Un exemple d'une fonction sup-mesurable qui n'est pas mesurable, Colloq. Math. 39(1978), p.77-79

[10] Z.Grande ; Sur la propriété de Baire d'une fonction de deux variables ponctuellement discontinue par rapport à une variable, Bull. Acad. Polon. Sci.,Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 25(1977),p.533-537

[11] Z.Grande ; Sur la r-continuité des fonctions de deux variables, Demonstratio Math. 11(1978), p.937-945

[12] Z.Grande ; Granice ciągów funkcji aproksymatywnie ciągłych, Zeszyty Naukowe Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwesytetu Gdańskiego, Matematyka Nr 3(1979),p.5-9

[13] Z.Grande ; Le rang de Baire de la famille de toutes les fonctions ayant la propriété(K) , Fund. Math. 96 (1977), p.9-15

[14] Z.Grande ; Sur le rang de Baire de certaine famille de fonctions, Demonstratio Math. 10 (1977), p.385-393

[15] Z.Grande ; Quelques remarques sur un théorème de Kamke et les fonctions sup-mesurables, Real Analysis Exchange 4 Nr 2 (1978-79), p.167-177

[16] Z.Grande ; Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Math. Slovaca 28(1978), p. 113-118

[17] Z.Grande ; Sur la classe de Baire des fonctions de deux variables, Fund. Math. (sous presse)

[18] Z.Grande ; Sur les fonctions dont les sections sont approximativement continues, Problemy Matematyczne Nr 2 (1980) (sous presse)

[19] Z.Grande ; Sur le prolongement des fonctions, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 34(1979), p.43-45

[20] Z.Grande, M.Topolewska ; Sur les fonctions vectorielles approximativement continues (en préparation)

[21] Z.Grande, D.Rzepka ; Sur le produit de deux dérivées vectorielles.Real Analysis Exchange (sous presse)

[22] M.Lackovich ; On the Baire class of functions of two variables, Fund. Math. (sous presse)

[23] R.J.O'Malley ; Note about preponderantly continuous functions, Revue Roum. Math. Pures et Appl. 21(1976), p.335-336

[24] R.J.O'Malley ; Approximately differentiable functions : The r topology, Pacific Journ. Math. 72(1977), p.207-222

[25] E.Marczewski, Cz.Ryll-Nardzewski ; Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Annal. Soc. Polon. Math. 25 (1953), p.145-154

[26] R.D.Mauldin ; σ- ideals and related Baire functions, Fund. Math. 71(1974), p.171-177

[27] D.Preiss ; Limits of approximately continuous functions. Czech. Math. Journ. 96(1971), p.371-379

[28] S.Saks;Theory of the integral, Warszawa 1937

[29] W.Ślęzak ; Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables aux termes des ensembles associés,Problemy matematyczne (sous presse)

[30] W.Ślęzak ; Sur les conditions équivalentes à la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Problemy Matematyczne (sous presse)

[31] Z.Zahorski ; Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc. 69(1950), p.1-54

/

LES PROBLÈMES CONCERNANT LES FONCTIONS RÉELLES

Résumé

Dans cet article on formule les certains problèmes ouverts concernant les fonctions réelles d'une et de deux variables.