ZESZYTY NAUKOWE WYZSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z.3

WŁODZIMIERZ SLĘZAK
Bydgoszcz

SUR LES FONCTIONS SUP-MESURABLES

Désignons par R l'espace des nombres réels et par R^2 l'espace produit $R \times R$

Définition 1. Voir [9]. Une fonction $F:R^2 \to R$ est dite sup-mesurable lorsque, quelle que soit la fonction $f:R \to R$ mesurable au sens de Lebesgue, la fonction $x \mapsto g_f(x) = F(x,f(x))$ est également mesurable.

La mesurabilité de la superpositin $F(x,f(x))$ a été examinée par Carathéodory dans son livre [2]. On sait qu'il existe une fonction $F:R^2 \to R$ mesurable au sens de Lebesgue qui n'est pas sup-mesurable (voir [9], p. 298). Dans [5] Z.Grande a demandé s'il existe une fonction $F:R^2 \to R$ sup-mesurable et non-mesurable. La réponse est affirmative en admettant l'hypothése du continu (voir [6]). Dans le chapitre V de [5] Z.Grande a vérifie si les conditions suffisantes pour la mesurabilité de la fonction $F:R^2 \to R$ sont également suffisantes pour la mesurabilité au sens de Lebesgue de la superposition $F(x,f(x))$, quelle que soit la fonction mesurable $f:R \to R$.

En particuler Z.Grande a démontré que les conditions suivantes sont suffisantes:

- la mesurabilité de la fonction F et la continuité approximative de toutes les sections $F_x = F(x,\cdot)$,
- la semi - équicontinuité supérieure des sections F_x et la mesurabilité de toutes les sections $F^y = F(\cdot,y)$,

- la semi - continuité supérieure de toutes les sections F_x et la semi - continuité approximative inférieure de toutes les sections F^y.

Fixons un ensemble $E \subset R$. La borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme

$$\underline{\lim} \frac{m^*\left(E \cap [x - h_n ; x + h_n]\right)}{2 h_n}.$$

pour toutes les suites (h_n) convergentes vers zéro, s'appelle densité extérieure inférieure de l'ensemble E au point x et dans ce travail elle sera désignée par $D_i^*(E,x)$. On définit de même manière la densité extérieure supérieure $D_s^*(E,x)$, et la densité $D(E,x)$.

Nous allons aussi désigner par $A_a(f)$ et $A^b(f)$ des ensembles associés avec une fonction $f:R \to R$, c'est - à - dire:

$$A_a(f) = \{x: f(x) > a\} = f^{-1}\left((a;\infty)\right)$$

$$A^b(f) = \{x: f(x) < b\} = f^{-1}\left((-\infty;b)\right)$$

Dans le présent article je démontre:

Théorème 1. Soit $F:R^2 \to R$ une fonction mesurable. Si en outre, toutes des sections F_x de cette fonction sont telles, que

$$\bigwedge_y \bigwedge_a \left[y \in A_a(F_x) \Rightarrow D_i^*\left(A_a(F_x), y\right) > \frac{3}{4}\right]$$

$$\bigwedge_y \bigwedge_b \left[y \in A^b(F_x) \Rightarrow D_i^*\left(A^b(F_x), y\right) > \frac{3}{4}\right],$$

alors la fonction F est sup-mesurable.

Ce théorème est une forme élargie de théorème 25 de [5] dû par Grande. Nous avons obtenue le théorème 1 en remplaçant la continuité approximative des sections F_x par l'hypothèse que F_x sont " $\frac{3}{4}$ - prépondérancement semi-continues " supérieurement et inférieurement .

La notion de prépond.- continuité a été introduit dans [3] - [4] , voir aussi [7] et [8].

Dans la démonstration de ce théorème nous profiterons du suivant

Lemme 1 : Soit $A \subset R^2$ un ensemble mesurable, de mesure positive et tel que toutes ses sections $A_x = \{y:(x,y) \in A\}$ soient mesurables. Supposons qu'une fonction $f:R \to R$ soit mesurable. Dans ces hypothèses, si l'ensemble

$$B = \left\{ x \in R:\ D_1\left(A_x, f(x)\right) > \frac{1}{4} \right\}$$

est de mesure extérieure de Lebesgue positive $m^*(B) > 0$, il existe pour tout nombre α, tel que $0 \leq \alpha < \frac{1}{4}$, un ensemble $C \subset R$ mesurable et tel que $B \subset C$ et, quel que soit le point $x \in C$, la densité supérieure de la coupe A_x au point $f(x)$ est $\geq \alpha$.

Démonstration. Désignons par B_n l'ensemble de tous les points $x \in B$, pour lesquels la densité moyenne de la coupe A_x sur tout intervalle ouvert contenant $f(x)$ et contenu dans l'intervalle ouvert $\left(f(x) - \frac{1}{n} ; f(x) + \frac{1}{n}\right)$ est plus garande que α.

La suite d'ensembles B_n est croissante et $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Soit n_o le premier nombre naturel tel que l'ensemble B_{n_o} soit de mesure extérieure de Lebesgue positive,

$$n_o = \min \left\{ n:\ m^*\left(B_n\right) > 0 \right\}.$$

Remarquons qu'il existe pour tout nombre naturel $n \geq n_o$ un ensemble $C_n \subset R$ mesurable et tel que $B_n \subset C_n$ et, quel que soit le point $x \in C_n$, la densité moyenne de la coupe A_x sur l'intervalle ouvert $\left(f(x) - \frac{1}{n} ; f(x) + \frac{1}{n}\right)$ est plus grande que α . En effet, la fonction f étant mesurable , l'ensemble

$$A \cap \left\{ (x,y) \in R^2:\ f(x) - \frac{1}{n} < y < f(x) + \frac{1}{n} \right\}$$

l'est aussi. Comme

$$m\left[A_x \cap \left(f(x) - \frac{1}{n}; f(x) + \frac{1}{n}\right)\right] > \frac{2}{n} \cdot \alpha$$

pour tout $x \in B_k$, l'ensemble $C_n = \left\{ x \in R : m\left[A_x \cap \left(f(x) - \frac{1}{n};\right.\right.\right.$ $\left.\left.\left. f(x) + \frac{1}{n}\right)\right] > \frac{2}{n} \cdot \alpha \right\}$

(étant mesurable d'après le théorème de Fubini) contient l'ensemble B_n.

Posons

$$C = \bigcup_{k=n_0}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} C_n .$$

L'ensemble $C \supset B$, puisque $B_k \subset \bigcap_{n=k}^{\infty} C_n$ pour tout indice $k \geq n_0$. De plus l'ensemble C est mesurable et, quel que soit le point $x \in C$, la densité supérieure de l'ensemble A_x au point $f(x)$ n'est pas plus petite que α, d'où notre lemme.

La démonstration du théorème 1 sera fondée sur un théorème auxiliaire que voici.

Lemme 2. ([5] p. 13) Soit $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ un espace dont la mesure σ- finie est μ. Supposons qu'une fonction $f: X \to R$ soit telle que, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, la classe d'ensembles:

$$\mathbb{D}_\varepsilon = \left\{ D \in \mathfrak{M} : \operatorname*{osc}_D f \leq \varepsilon \right\}$$

satisfasse à la condition suivante:

(E) il existe pour tout ensemble $A \in \mathfrak{M}$ de mesure μ positive un ensemble $D \in \mathbb{D}_\varepsilon$ tel que $D \subset A$ et $\mu(D) > 0$. Alors la fonction f est $\bar{\mu}$ - mesurable, où $\bar{\mu}$ désigne le complété de la mesure μ.

Démonstration du théorème: Fixons une fonction mesurable $f: R \to R$. Afin d'établir que la fonction $x \mapsto g_f(x) = F(x, f(x))$ est mesurable, il suffit de démontrer qu'elle satisfait à la condition (E) de lemme 2.

Soit $A \subset R$ un esemble mesurable, de mesure positive. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre arbitraire. Rangeons tous les intervalles fermés d'extrémités rationnelles, dont la longueur n'est pas plus grande que $\varepsilon/4$, en une suite (J_n). Désignons par A_n l'ensemble $\{x \in A : F(x, f(x)) \in J_n\}$. Comme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ et $m(A) > 0$, il existe donc un indice n_o tel que $m^*(A_{n_o}) > 0$ (m^* désignant la mesure extérieure de Lebesgue dans R). Fixons un point $x_o \in A_{n_o}$ et désignons par B l'ensemble

$$\left\{(x,y) \in R^2 : \left| F(x,y) - F(x_o,y_o)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \;;\; y_o = f(x_o)\right\}.$$

L'ensemble B est mesurable (car F est mesurable) et

$$\left\{(x, f(x)) : x \in A_{n_o}\right\} \subset B.$$

Toutes les sections

$$B_x = \left\{ y : F(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + F(x_o,y_o)\right\} \cap \left\{ y : F(x,y) \geq F(x_o,y_o) - \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

sont mesurables et, quel que soit le point $x_o \in A_{n_o}$ la densité inférieure

$$D_i\left(B_x, f(x)\right) > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Il existe donc, d'après le lemme 1, un ensemble $C \subset R$ mesurable et tel que $A_{n_o} \subset C$ et quel que soit le point $x \in C$, la densité supérieure de la section B_x au point $f(x)$ n'est pas plus petite que 1/4.

Supposons, au contraire, que, quel que soit l'ensemble $D \subset A$ mesurable, de mesure positive, on ait osc $g_f > \varepsilon$. Il existe donc un point $x_1 \in A \cap C$ tel que $\left| F(x_1, f(x_1)) - F(x_o, f(x_o))\right| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons pour raison de symétrie (sans resteindre la généralité), que $F(x_1, f(x_1)) > \frac{\varepsilon}{2} + F(x_o, f(x_o))$,

c'est-à-dire $f(x_1) \in A^{\varepsilon/2 + F(x_o, f(x_o))}(F_x)$.

La densité inférieure de l'ensemble $A^{\varepsilon/2 + g_f(x_o)}(F_x)$ au point

$f(x_1)$ est $> \frac{3}{4}$ d'après l'hypothèse. D'autre part la dénsité supérieure de la section B_{x_1} au point $f(x_1)$ n'est pas plus petite que $\frac{1}{4}$ alors ces deux ensémbles ont un point commun

$$t \in B_{x_1} \cap A^{\varepsilon/2 + g_f(x_0)}(F_{x_1}) \neq \emptyset.$$

Le point $(x_1, t) \in B$

donc $\left| F(x_1, t) - F(x_0, f(x_0)) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part

$t \in A^{\varepsilon/2 + g_f(x_0)}/F_{x_1})$, on a donc

$$\left| F(x_1, t) - F(x_0, f(x_0)) \right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cette contradiction achève la demonstration.

TRAVAUX CITÉS

[1] A.M.Bruckner ; Some observations about Denjoy's preponderant derivative, Bull.Math. de la Soc. Sci Math. de la R.S. de Roumanie, Tome 21 (69) nr 1-2, (1977), p.3-10

[2] C.Carathéodory ; Vorlesungen über reele Funktionen, Leipzig- - Berlin 1927

[3] A.Denjoy ; Sur les fonctions dérivées sommables, Bull. Soc. Math. France 43 (1915), p. 161-248

[4] A.Denjoy ; Sur une propriété des fonctions dérivées, L'Enseignement Math. 18, (1916), p.320-328

[5] Z.Grande ; La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition F(x,f(x)) . Dissertationes Mathematicae CLIX (1978) p.1-50

[6] Z.Grande, J.S.Lipiński ; Un exemple d'une fonction sup-mesurable qui n'est pas mesurable, Colloquiun Mathematicum vol. XXXIX, fasc.1 (1978) p.77-79

[7] J.L.Leonard ; Some conditions implying the monotonicity of

real function, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 5 1927 p.757-780

[8] R.J.O Malley ; Note about preponderantly.continuons functions, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. t. XXI, no 3, (1976) p.335-336

[9] I.W.Szragin ; Usłowia izmierimosci supierpozycii, DAN ZSRR 197/1971/, p,245-298

[10] I.W.Szragin ; Opierator supierpozycji w moduliarnych funkcjonalnych prostranstwach, Studia Mathematica, t. XLIII 1972 p,61-75

О СУП - ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЯХ

Содержание

В работе доказывается условие эквивалентно измеримости суперпозиции $F(x,f(x))$ которое не на только требовательное, чем анологические условие из [5.] .