ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z. 3

WŁODZIMIERZ SLĘZAK
Bydgoszcz

UNE CONDITION ÉQUIVALENTE À LA MESURABILITÉ D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES

Soit R l'espace des nombres réels. Pour une fonction quelconque $f:R \to R$ posons

$$A_a(f) = \{x : a < f(x)\} \text{ et } A^b(f) = \{x : f(x) < b\}.$$

Convenons de dire que la densité extérieure supérieure $D_s^*(x,E)$ de l'ensemble $E \subset R$ au point x, appartenant ou non á l'ensemble E, est égale à d lorsqu'on a

$$\limsup_{0<h,k\to 0} \frac{m^*(E \cap [x-h,x+k])}{h+k} = d ,$$

l'expression au numérateur indiquant la mesure extérieure de la partie de E comprise entre x-h et x+k. On définit de même façon la densité extérieure inférieure et la densité tout court - (voir [16] et [11], p.6.).

Pour une fonction de deux variables $f:R^2 \to R$ posons

$$f_x(t) = f(x,t) \text{ et } f^y(t) = f(t,y) .$$

Ce sont les sections de la fonction f correspondant aux valeurs $x \in R$ /resp. $y \in R$/ fixeés. Dans présent travail, nous allons réfolmuler les résultats de Z.Grande de [10] aux terms des ensembles associés /voir [1]/ en obtenant une nouvelle condition equivalente à la mesurabilité au sens de Lebesgue d'une fonction $f:R^2 \to R$. Dans le travail [10] Z.Grande a introduit la definition suivante.

Définition 1. Une fonction mesurable $f:R \to R$ est dite dégénérée au point $x_0 \in R$ lorsqu'il existe un intervalle ouvert $U = (a;b) \subset R$ tel que $f(x_0) \in U$ et que x_0 est un point de dispersion de l'ensemble $f^{-1}(U) = \{x: a < f(x) < b\} = A_a(f) \cap A^b(f)$ c'est-à-dire $D_s(x_0, f^{-1}(U)) = 0$.

On voit, que ce sont les propriétés des images réciproques d'une base topologique de l'espace R, qui jouient la rôle fondamentale dans cette définition. Dans cet article on expose les conséquences de remplacer dans la définition 1 des images réciproques d'une base par celles d'une demi-base. Dans cet but nous allons accepter la définition plus large.

Définition 2. On dit, que une fonction mesurable $F:R \to R$ est $\downarrow$dégénérée au point $x_0 \in R$ lorsqu'il existe un nombre $b \in R$ tel que: 1/ $f(x_0) < b$, 2/ x_0 est un point de dispersion del'ensemble $A^b(f)$. Une fonction mesurable $g:R \to R$ est dite $\uparrow$-dégénérée au point $x_0 \in R$, lorsque la fonction $f = -g$ est $\downarrow$-dégénérée en ce point x_0.

Proposition 1. Si la fonction mesurable $f:R \to R$ est $\uparrow$—dégénrée au point $x_0 \in R$ ou bien $\downarrow$—dégénérée au point $x_0 \in R$, elle est aussi dégénérée au sens de la définition 1, en ce point x_0.

Démonstration. Soit f une fonction $\uparrow$—dégénérée au point x_0. Il en résulte que x_0 est un point de dispersion de l'ensemble $A_a(f) = f^{-1}((a, \infty))$ pour certain $a \in R$. Soit $b \in R$ un point tel que $b > f(x_0) > a$. Remarquons que $f(x_0) \in (a,b)$ et $f^{-1}((a,b)) = A_a(f) \cap A^b(f) \subset A_a(f)$. En se servant des faits concernant la mesure on vérifie facilement que la densité supérieure de l'ensemble $f^{-1}((a,b))$ au point x_0 ne dépasse pas la densité de l'ensemble $A_a(f)$ en ce point. Elle s'annule donc, comme f est une fonction $\uparrow$- dégénérée au x_0. La fonction f est donc dégénérée au sens do la définition 1.La même méthode peut être appliquée aussi aux fonctions $\downarrow$- dégénérées. $\square$

Voici deux exemples, qui expriment une inéquivalence entre définitions 1 et 2.

Exemple 1. La fonction $R \ni x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

n'est ni $\uparrow$- dégénérée, ni $\downarrow$- dégénérée au point $x_0 = 0$, car pour tous les nombres finis $a < 0$ et $b > 0$ la densité de l'ensemble $A_a(f)$ au point $x_0 = 0$ est égale à $\frac{1}{2}$ et la densité de l'ensemble $A^b(f)$ est lá - bas aussi égale à $\frac{1}{2}$. Cependant $x_0 = 0$ est un point isolé de l'ensemble

$$f^{-1}\big((a,b)\big) = A_a(f) \cap A^b(f) .$$

Le point $x_0 = 0$ est donc un point de dispersion de cet ensemble et f est dégénérée au point $x_0 = 0$ au sens de la définition 1. On sait, que chaque dérivée bornée, n'est ni $\uparrow$- dégénérée, ni $\downarrow$- dégénérée en aucun point. Mais, malgre cela elle peut etre dégénérée par exemple au $x_0 = 0$.
En effet posons

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x & ; 0 < x \leq 1/n^3, \\ 1 & ; 1/n^3 < x \leq 1/2 - 1/n^3, \\ n^3\left(1/2 - x\right) & ; 1/2 - 1/n^3 < x \leq 1/2 + 1/n^3 , \\ -1 & ; 1/2 + 1/n^3 < x \leq 1 - 1/n^3, \\ -n^3\left(1 - x\right) & ; 1 - 1/n^3 < x < 1 , \\ 0 & ; |2x - 1| \geq 1 . \end{cases}$$

Celà étant, formons la fonction:

$$R \ni x \mapsto g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n\left(n^2x + nx - n\right) - \sum_{n=2}^{\infty} f_n\left(-n - nx - n^2x\right) \in R .$$

Remarquons, que la fonction g est bien définie, comme, quel que soit la point $x \in R$, elle ne s'annule au plus sur une des composantes de la série à droite. On voit facilement que $g(0) = 0$ et que $|g(x)| \leq 1$, $g(-x) = -g(x)$ en tout point x. Soit h un nombre positif.

Désignons par n_h l'entier de 1/h. Il est évidente, que

$$\frac{1}{n_h + 1} \leq h \leq \frac{1}{n_h}$$

Il en découle que

$$\left|\int_0^h g\, t\, dt\right| \leqslant \left|\int_{1/n_h+1}^{1/n_h} g\, t\, dt\right| = \int_{1/n_h+1}^{1/n_h} dt = \frac{1}{n_h} - \frac{1}{n_h+1} =$$

$$= \frac{1}{n_h(n_h+1)}$$

d'où il vient $\left|\frac{1}{h} \int_0^h g(t)dt\right| \leqslant (n_h + 1)\frac{1}{n_h(n_h+1)} \to 0,$

où nous avons utilisé du fait, que $\frac{1}{h} < n_h + 1$.

Nous avons déjà montré, que g est une derivée bornée. Il est manifeste que

$$0 \leqslant \frac{m(\{x: |g(x)| < 1\} \cap [-h,h])}{2h} \leqslant \frac{n_h + 1}{2}\, m(\{x: |g(x)| < 1\} \cap [-h,h]) =$$

$$= \frac{n_h + 1}{2}\, 2m(\{x: |g(x)| < 1\} \cap [0,h]).$$

Du fait $[0,h] \subset \bigcup_{i=n_h}^{\infty} \left[\frac{1}{i+1}\,;\,\frac{1}{i}\right]$ il résulte que

$$m(\{x: |g(x)| < 1\} \cap [0,h] \leqslant \sum_{k=n_h}^{\infty} \frac{4}{k^4(k+1)} \leqslant \sum_{k=n_h}^{\infty} \frac{4}{k^4} .$$

Pour vérifier ces inégalités remarquons, que chaque intervalle $\left[\frac{1}{k+1}\,;\,\frac{1}{k}\right]$ est la somme des k^3 petits intervalles congruents. Seulement les 4 de eux appartient à l'image réciproque $g^{-1}((-1;\ 1))$, d'où il vient notre estimation. Il découle de ces raisonnements que

$$0 \leqslant \frac{m(\{x : |g(x)| < 1\} \cap [-h,h])}{2h} \leqslant \sum_{k=n_h}^{\infty} \frac{4}{k^4} \cdot \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

En posant $U = (-1,1)$ nous voyons: g est dégénérée au point $x_o = 0$.

La densité supérieure de l'ensemble $A_a(g)$ au point $x_o = 0$ est égale au moins 1/2, quel que soit le nombre $a < 0$, c'est-à-dire la fonction g n'est pas $\downarrow$- dégénérée au point $x_o = 0$. Puisque la fonction g est impaire, elle n'est $\downarrow$- dégénérée non plus. Donc la fonction g a toutes les propriétés exigées.

Définition 3. ([11], définition 4) On dit qu'une fonction $f:R \to R$ possède la propriété (G) lorsque, quels que soient un ensemble $A \subset R$ mesurable de mesure $m(A)$ positive et la nombre $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert $U \subset R$ tel que $m(A \cap U) > 0$ et osc $f \leqslant \varepsilon$ sur l'ensemble de tous les points de densité de l'ensemble $A \cap U$, c'est-à-dire sur le d-interieur de l'ensemble $A \cap U$ (v.[6]).

Toutes les fonctions $f:R \to R$ de premiére classe de Baire ont la propriété (G). Il existe des fonctions non-borélliennes qui appartient à la classe de toutes les fonctions ayant la propriété (G).

Toute fonction $f:R \to R$ ayant la propriété (G) est mesurable (v. [11]).

Nous usérons dans ce qui suit les résultats suivants.

Lemme 1. ([5], [7], [8]). Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesurable avec la mesure σ-finie μ. Supposons qu'une fonction $f:X \to R$ soit telle que, quel soit le nombre $\varepsilon > 0$, la classe d'ensembles

$$D_\varepsilon = \left\{ D \in \mathcal{M} : \underset{D}{\operatorname{osc}}\, f \leqslant \varepsilon \right\}$$

satisfasse à la condition suivante:

(E) il existe pour tout ensemble $A \in \mathcal{M}$ de mesure μ positive un

ensemble $D \in \mathbb{D}_\varepsilon$ tel que $D \subset A$ et $\mu(D) > 0$.
Dans ces hypothèses la fonction f est $\bar{\mu}$-mesurable, où $\bar{\mu}$ désigne la complété de la mesure μ.

Lemme 2. ([7], lemme 2; [8], p.157). Soit $A \subset R^2$ un ensemble m_2-mesurable. Dans ces hypothèses il existe un ensemble B du type F_σ et tel que $m_2(A \setminus B) = 0$ et $B \subset +B$ c'est-à-dire:
1^0 tout point $(x,y) \in B$ est un point de densité de l'ensemble B,
2^0 quel que soit le point $(x,y) \in B$, x est un point de densité de la section $B^y = \{t \in R: (t,y) \in B\}$ et y est un point de densité de la section $B_x = \{u \in R: (x,u) \in B\}$.

Lemme 3. ([10]). Soit $f: R^2 \to R$ une fonction mesurable. Alors l'ensemble $\{(x,y) \in R^2: f^y$ est dégénérée au point $x\}$ est de mesure nulle. □

Le théorème dont il s'agit dans cet article, s'ènonce de la façon suivante:

Théorème 1. Soit une fonction $f: R^2 \to R$ telle que toutes ses sections f_{x_0}, $x_0 \in R$ possèdent la propriété (G) et toutes ses sections $f^{y_0}(x) = f(x,y_0)$, $y_0 \in R$ soient mesurables. Pour que la fonction f soit mesurable, il faut et il suffit que l'ensemble $A(f) = \{(x,y) \in R^2: f^y$ est $\uparrow$-dégénérée ou bien $\downarrow$-dégénérée au point $x\}$ soit mesurable de mesure zéro.

Démonstration. $\Rightarrow$: L'inclusion $A(f) \subset \{(x,y) \in R^2: f^y$ est dégénérée au point $x\}$ résulte de la proposition 1. Alors $m(A(f)) = 0$ car d'après le lemme 3 l'ensemble $A(f)$ est un sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle.

$\Leftarrow$: La démonstration sera fondée sur le lemme 1. Soit un ensemble mesurable $E \subset R^2$, tel que $m_2(E) > 0$ et fixons un nombre réel $\varepsilon > 0$.

Désignons par Q l'ensemble des points $x \in R$ pour lesquels la coupe E_x est mesurable et $m(E_x) > 0$. Il résulte du théorème de Fubini ([13], p.147) que l'ensemble Q est mesurable et qu'il est de mesure positive. Soient $(\mathcal{I}_n)$ la suite dénombrable de tous les

intervalles ouverts d'extrémités rationnelles et (K_n) la suite de tous les intervalles fermés d'extrémités rationnelles dont la longueur $\delta(K_n)$ est plus petite que ε. Désignons par Q_{rs} l'ensemble de tous les points $x \in Q$ pour lesquels $m(\mathcal{J}_r \cap E_x) > 0$ et $f(x,y) \in K_s$ pour tout point y qui est un point de densité de l'ensemble $E_x \cap \mathcal{J}_r$.
Évidemment $\bigcup\limits_r \bigcup\limits_s Q_{rs} \subset Q$.

Toute coupe f_x possède la propriété (G) et par conséquent on a $Q = \bigcup\limits_r \bigcup\limits_s Q_{rs}$. Il existe donc un couple d'indices naturels (r_0, s_0) tel que la mesure extérieure $m^*(Q_{r_0 s_0})$ est positive. Désignons par P l'ensemble de tous les points $x \in R$ dans lesquels la densité extérieure de l'ensemble $Q_{r_0 s_0}$ est égale à 1. L'ensemble P est /d'apres le théorème connue de Lebesgue, v. [16],p.147/ mesurable et $m(P)$ est positive.

Posons $G = E \cap (P \times \mathcal{J}_{r_0}) \setminus A(f)$. L'ensemble G est aussi mesurable et $m_2(G) > 0$, puisque pour chaque $x \in Q_{r_0 s_0}$, on a $m(G_x) > 0$. D'après le lemme 2 il existe l'ensemble $Z \subset G$, du type F_σ et tel que $m_2(G \setminus Z) = 0$ et $Z \subset + \cdot Z$.
Remarquons, que $Z \subset E$ et Z est mesurable, de mesure positive. Pour finir la démonstration il suffit de montrer que $f(x,y) \in K_{s_0}$ pour toutes les points $(x,y) \in Z$.

Fixons $(x_0,y_0) \in Z$. Supposons, au contraire, que $f(x_0,y_0) \notin K_{s_0} = [k,l]$. Alors ou bien $f(x_0,y_0) > l$ ou bien $f(x_0,y_0) < k$. Par raison de dualité nous pourrons sans restreindre la généralité supposer, que $f(x_0,y_0) > l > k$.

Posons

$$a = \frac{1}{2}\left(l + f(x_0,y_0)\right).$$

Mais une section f^y n'est ni $\uparrow$-ni $\downarrow$-dégénérée, alors $x_0 \in \{t \in R : f(t,y_0) > a\}$ et le densité supérieure de cet ensemble au point x_0

est positive.

Désignons cette densité par α:

$$\alpha = D_s\left(x_0, \left\{t \in \mathbb{R} : f(t,y_0) > a\right\}\right).$$

D'autre part le point x_0 est un point de densité extérieure de l'ensemble $Q_{r_0 s_0}$ et $y_0 \in \mathcal{J}_{r_0}$. Ainsi il existe l'intervalle ouvert $\mathcal{J}$ contenant x_0 et tel, que la densité moyenne de l'ensemble $\left\{t: f(t,y_0) > a\right\}$ sur $\mathcal{J}$ est plus grande que $\alpha/2$ et la densité moyenne de l'ensemble $\left\{t: f(t,y_0) \in K_{s_0}\right\}$ sur $\mathcal{J}$ est plus grande que $1 - \alpha/4$.

Par conséquent ces deux ensembles ont un point commune, que nous désignons par t_0. Remarquons que $f(t_0,y_0) > a$, ce qui est contraire avec le fait que $f(t_0,y_0) \in K_{s_0}$ et la démonstration est achevée.

Remarque 1. Dans le théorème 1 on ne peut pas se borner à l'hypothèse que presque toutes les sections f^y sont seulement $\uparrow$— nondégénérées on bien seulement $\downarrow$— nondégénérées. En effet, soit $S \subset R^2$ l'ensemble nonmesurable, qui a au plus un point commun avec chaque droite horizontale et avec chaque droite verticale. La construction de tel ensemble a été donnée par W.Sierpiński dans [17]. L'indicatrice χ_S de cet ensemble est une fonction nonmesurable dont toutes les sections $(\chi_S)_x$ ont la propriété (G), et toutes les coupes $(\chi_S)^y$ sont $\uparrow$— dégénérées tandis que elles ne sont pas $\downarrow$— dégénérées.

Remarque 2. En comparant le théorème 1 avec la théorème donnée par Z.Grande dans son article [10] on voit facilement, que pour les fonctions mesurables de deux variables les conditions ci - dessous sont équivalentes:

(1) $m_2\left(\left\{(x,y) : f^y \text{ est } \uparrow\text{— dégénérée ou bien } \downarrow\text{— dégénérée au point } x\right\}\right) = 0$;

(2) $m_2\left(\{(x,y): f^y \text{ est dégénérée au point } x\}\right) = 0.$

Définition 4. ([18], p.3) : L'ensemble E du type F_σ n'étant pas vide est dit qu'il remplit la condition M_4 s'il existe une suite des ensembles fermés (F_n) et une suite de nombres (η_n), $0<\eta_n<1$ tels que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ et que pour chaque $x \in F_n$ et tout $c>0$ il existe un nombre $\varepsilon = \varepsilon(x,c) > 0$ jouissant de la propriété suivante: pour tous les h et h_1 tels que $hh_1>0$, $h/h_1<c$, $|h + h_1| < \varepsilon(x,c)$ on a

$$\frac{m\left(E \cap [x+h, x+h+h_1]\right)}{|h_1|} > \eta_n > 0.$$

En outre on dit, qu'un ensemble vide remplit aussi cette condition M_4. La fonction $f:R \to R$ appartient /par définition/ à la classe $M_4^\bullet$, si pour tout $a \in R$ l'ensemble $A_a(f)$ appartient à M_4; f appartient à la dasse ${}^\bullet M_4$ si $-f$ appartient à $M_4^\bullet$. Enfin on définit

$$M_4 = M_4^\bullet \cap {}^\bullet M_4.$$

Il est connu, que les dérivées bornées appertiennent à la classe M_4 /voir [18]/.

Théorème 2. Soit $f:R^2 \to R$ une fonction de deux variables dont toutes les sections f_x ont la propriété (G) et toutes les sections f^y appartiennent à la dasse M_4 de Zahorski, la fonction f est mesurable.

Démonstration: En utilisant le théorème 1, il faut démontrer que toute fonction de la classe M_4 n'est ni $\uparrow$- ni $\downarrow$-dégénérée. Dans ce but il suffit de démontrer:

Lemme 4. Supposons que l'ensemble E remplit la condition M_4. Alors dans E il n'y a pas aucun point de dispersion.

Démonstration. Étant fixé un point $x \in E$ supposons au contraire que $D(x,E) = 0$.

Ecrivons E sous la forme $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, $Cl(F_n) = F_n$, où $Cl(F_n)$ désigne comme d'habitude la fermeture de l'ensemble F_n. Il existe le nombre n_x, tel que $x \in F_{n_x}$. D'après la définition 4 choisissons $\eta_{n_x} > 0$ et $\varepsilon = \varepsilon(x, c=2) > 0$ tels que pour toutes nombres h, h_1 pour lesquels

(a) $hh_1 > 0$, (b) $h/h_1 < c=2$, (c) $|h_1 + h| < \varepsilon$

on a $$\frac{m(E \cap [x+h, x+h+h_1])}{|h_1|} > \eta_{n_x} > 0.$$

Posons $h = h_1 > 0$ /grace c=2 nous pourons le faire/. Pour $h < \varepsilon/2$ il est manifeste que (1) $m(E \cap [x-2h, x-h]) > \eta_{n_x} h$ et

(2) $m(E \cap [x+h, x+2h]) > \eta_{n_x} h$.

Il n'y a qu'à décomposer l'ensemble $E \cap [x-2h, x+2h]$ sous la forme $(E \cap [x-2h, x-h]) \cup (E \cap [x-h, x+h]) \cup (E \cap [x+h, x+2h])$. Des (1) et (2) on obtient la relation

(3) $m(E \cap [x-h, x+h]) =$
$$= m(E \cap [x-2h, x+2h]) - m(E \cap [x+h, x+2h]) - m(E \cap [x-2h, x-h]) <$$
$$< m(E \cap [x-2h, x+2h]) - 2\eta_{n_x} h ;$$

considérons le rapport

$$\frac{m(E \cap [x-2h, x+2h])}{4h} \xrightarrow[h \to 0]{} D = D(x, E)$$

En divisant l'inégalite (3) par $4h > 0$ et en passant avec h vers 0 nous obtenons

$$\frac{1}{2} D \leq D - \frac{1}{2} \eta_{n_x}$$

Il découle immédiatement de notre calcul que $D \geq \eta_{n_x} > 0$, ce qui contrédit l'hypothèse que x est un point de dispersion de l'ensemble E. Cette contradiction finit la démonstration.

Corollaire 1. Si toutes les sections d'une fonction $f: R^2 \to R$

ont la propriété (G) et si toutes ses sections f^y sont les dérivées bornées /ou les derivées approximatives bornées - voir [3]/, la fonctions f est mesurable.

Cet résultat a été exposée au [9], mais la méthode est tout différent. Dans [9] les considérations de Z.Grande sont fondées sur la propriété (7)de [15]. Pour des dérivées nonbornées subsiste le même résultat /voir [14]/.

OUVRAGES CITES

[1] A.M.Bruckner ; On Characterising classe of functions in terms of associated sets, Canad.Math. Bull., vol. 10, no 2 /1967/, p. 227-231

[2] A.M.Bruckner; Differentation of real functions, Lecture Notes in Math. 659 /1978/, p.246

[3] A.M.Bruckner; Current trends in differentiation theory, Real Analysis Exchange, vol. 5/1979/80/, p.9-60

[4] A.M.Bruckner; Recent developments in approximate differentiation, ibid., p.113-118

[5] R.O.Davies; Separate approximate continuity implies measurability, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 73 /1973/, p.461-465

[6] C.Goffman,C.J.Neugebauer,T.Nishiura; Density topology and approximate continuity, Duke Math. J., 12 /1961/,p.497-505

[7] Z.Grande: Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables , Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math.,Astr., Phys., vol. XXI, N° 9/1973/, p.813-816

[8] Z.Grande; Les fonctions, qui ont la propriété /K/ et la mesurabilité des fonctions de deux variables, Fund. Math. XCIII /1976/,p.155-160

[9] Z.Grande; Sur les fonctions de deux variables dont les coupes sont des dérivées, Proc. Amer. Math. Soc., 57 /1976/,p. 69-74

[10] Z.Grande; On the mesurability of functions of two variables, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77/1975/,p.335-336

[11] Z.Grande; la mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x,(f(x))$, Dissertationes Mathematicae, CLIX/1978/,p.1-45

[12] Z.Grande; Deux exemples de fonctions non mesurables, Colloquium Math., XL, 2/79/,p.305-309

[13] P.R.Halmos, Measure Theory, D. Van Nostrand Comp., Princeton /1950/

[14] M.Laczkovich; On the mesurability of functions whose sections are derivatives /submited to Periodica Mathematica Hungarica/

[15] J.S.Lipiński; On mesurability of functions of two variables, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 20 /1972/,p.131-135

[16] S.Łajasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN, W-wa /1973/

[17] W.Sierpiński; Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement, Fund. Math. 1/1920/,p.112-115

[18] Z.Zahorski; Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc., 69/1950/,p.1-54

ОДНО УСЛОВИЕ ЭКВИВАЛЕНТНО ИЗМЕРИМОСТИ ФУНКЦИИ 2 ПЕРЕМЕННЫХ.

Содержание

В работе доказывается условие эквивалентно измеримости функции 2 переменных такой, что секции f_x обладают свойством (G), а f^y - измеримы.

Отсюда вытекает измеримость функции, у которой f^x обладают свойством (G) а f^y являются ограниченными производными.