ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z. 3

WŁODZIMIERZ ŚLĘZAK
Bydgoszcz

# НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ИЗМЕРИМОСТИ ФУНКЦИИ 2 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В настоящей работе доказывается результаты аналогические теоремам из главы 1 работы /3/ методом таким-же как в /7/. Основным является обобщение понятия положительно здегенерованой функции /см.опр.I/ в терминах ассоцированных множеств.

О п р е д е л е н и е I. Говорим, что измеримая действительная функция $h: R \to R$ является положительно нездегенерованой /см. /3/, стр.10/ в точке $x_0 \in R$, если какие бы не были числа a, b такие что $a<h(x_0)<b$ имеем

$$D_i(x_0, A_a(h)\cap A^b(h))>0$$

Множество $A_a(h)\cap A^b(h)$ это по определению множество $\{x: a<h(x)<b\}$. $D_i(x_0, A_a(h)\cap A^b(h))$ обозначает нижний предел чисел типа

$$\frac{m([x_0-k_1, x_0+k_2]\cap A_a(h)\cap A^b(h))}{k_1+k_2}$$

где $k_1$ и $k_2$ стремится к нулю, а $m$ обозначает Лебеговую меру. Мы немножко усильним это понятие тем-же путём, каким мы в /7/ ослабили понятие дегенерации:

О п р е д е л е н и е 2. Измеримая, вещественная функция $f$ называется $\downarrow$- положительно нездегенерованой в точке $x_0 \in R$ , если для всякого $b \in R$ такого, что $f(x_0) < b$ /это значит $x_0 \in A^b(f)$/ нижняя плотность множества $A^b(f)$ в точке $x_0$ является положительной:

$$D_i(x_0, A^b(f)) \equiv \liminf_{\substack{0 \le k_1 \to 0 \\ 0 \le k_2 \to 0}} \frac{m(A^b(f) \cap [x_0 - k_1, x_0 + k_2])}{k_2 + k_1} > 0$$

Функция $g: R \to R$ называется $\uparrow$- положительно нездегенерованой, если $-g$ есть $\downarrow$- положительно нездегенерованой функцией.

З а м е ч а н и е I. Если какая-нибудь функция является положительно нездегенерованой, то она одновременно $\uparrow$- положительно нездегенерованая и $\downarrow$- положительно нездегенерованая. Это просто вытекает из включения

$$A_a(f) \cap A^b(f) \subset A_a(f), \quad A_a(f) \cap A^b(f) \subset A^b(f).$$

Вот теоремы, которые устанавливают связь жмежду нашим новым понятием а так - называемым свойством $(G)$. (см. /3/).

Т е о р е м а I. Пусть $f: R \to R$ будет измеримой функцией которая является одновременно вверх $\uparrow$ и вниз $\downarrow$ положительно нездегенерованой в каждой точке и кроме того исполняет в каждой точке следующее условие.

$(P)$ Для каждого измеримого множества $F$ положительной меры и для каждого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует открытый отрезок $J$ и множество $Z$, измеримое, меры нуль, такие что $m(J\cap F)>0$ и осциляция $\operatorname{osc} f \le \varepsilon$ на множестве $(J\cap F)\setminus Z$. При этих условиях функция $f$ обладает свойством $(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f$ не обладает свойством $(G)$. Тогда существует измеримое множество $F$ положительной меры и существует число $\varepsilon>0$ такое, что для каждого открытого отрезка $J$ для которого $m(J\cap F)>0$ имеем $\operatorname{osc} f>\varepsilon$ на множестве точек плотности множества $J\cap F$. С другой стороны $f$ исполняет условие $(P)$. Поэтому существуют множества $J_1 Z$, такие, что $m(Z)=0$, $m(J\cap F)>0$ и $\operatorname{osc} f\le\varepsilon$ на множестве $(J\cap F)\setminus Z$.

Обозначим
$$\inf\{f(x);\ x\in J\cap F\setminus Z\}\equiv a,$$
$$\sup\{f(x);\ x\in J\cap F\setminus Z\}\equiv b$$
($f$ можно считать ограниченой)

и положим $c=\frac{1}{2}(a+b)$. Заметим, что существует точка $x_0\in J\cap F$ которая является точкой плотности этого множества, в этой точке имеем $|f(x_0)-c|>\frac{\varepsilon}{2}$.

Это обозначает, что $f(x_0)<c-\frac{\varepsilon}{2}$ или $f(x_0)>c+\frac{\varepsilon}{2}$. Для определённости мы предположим, что имеет место первая из этих возможности если бы это было не так, мы рассматривали бы этот случай аналогично, на базисе $\uparrow$- положительного нездегенерования/. Наша функция является $\downarrow$- положительно нездегенерованой, значит $D_i(x_0;\{x: f(x)<c-\frac{\varepsilon}{2}\})>0$. Кроме того $x_0$ является точкой плотности и поэтому $D(x_0, \mathfrak{J}\cap F\setminus Z)=1$ .

Отсюда вытекает, что

$$[(\mathfrak{J}\cap F)\setminus Z]\cap\{x\in R: |f(x)-c|>\frac{\varepsilon}{2}\}\neq\phi,$$

но это противоречие, так как

$$\operatorname*{osc}_{(\mathfrak{J}\cap F)\setminus Z} f\leq\varepsilon$$

Т Е О Р Е М А 2. Предположим, что функция $f: R\to R$ является измеримой и $\uparrow$- положительно нездегенерованой и $\downarrow$- положительно нездегенерованой в каждой точке. Тогда функция $f$ овладает свойством $(G)$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f$ лищена свойст $(G)$ . Из теоремы I вытекает, что она не исполняет условия $(F)$. Тогда существует измеримое множество $F$ положительной меры и число $\varepsilon>0$ такое, что для какого-нибудь открытого отрезка $\mathfrak{J}$ , для которого мера пересечения $\mathfrak{J}\cap F$ положительная имеет место неравенство $\operatorname*{osc}_{(\mathfrak{J}\cap F)\setminus Z} f>\varepsilon$ при произвольном множестве $Z$ меры нуль.

Пусть $x_1$ будет точкой плотности множества $F$ , в котором функция $f$ является аппроксимативно непрерывной /значит непрерывной в смысле так называемой топологии плотности/. Существование такой точки вытекает из того, что измеримая функция является аппроксимативно непрерывной почти всюду (/6/). Пусть $\mathfrak{J}_1$ будет отрезком таким, что $x_1\in\mathfrak{J}_1$ и кроме того средняя плотность множества $\{x\in F: |f(x)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{8}\}$ на $\mathfrak{J}_1$ перевышает $1-(\frac{1}{2})^1$;

значит

$$\frac{m(\mathcal{J}_1 \cap \{x: |f(x)-f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{8}\})}{m(\mathcal{J}_1)} > 1-\left(\frac{1}{2}\right)^1 .$$

Существует измеримое подмножество положительной меры множества $\mathcal{J}_1 \cap F$ на котором выполняется неравенство $|f(x)-f(x_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $x_2$ будет точкой того подмножества такой, что плотность того подмножества в точке $x_2$ существует и равняется $1$, и кроме того $f$ является аппроксимативно непрерывна в этой точке $x_2$. Заметим, что $|f(x_2)-f(x_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\mathcal{J}_2$ будет, в свою очередь, таким интервалом, что $x_2 \in \mathcal{J}_2$, замыкание $Cl(\mathcal{J}_2) \subset \mathcal{J}_1$ и что средняя плотность множества $\{x \in F: |f(x)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{8}\}$ на $\mathcal{J}_2$ перевышает $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Продолжая эту конструкцию мы достаём в $n$ - том шагу точку $x_n$ и интервал $\mathcal{J}_n \ni x_n$ такой, что:

а/ $x_n$ является точкой плотности измеримого подмножества множества $\mathcal{J}_{n-1} \cap F$, это подмножество имеет положительную меру и на ним исполняется неравенство $|f(x)-f(x_{n-1})| \geq \frac{\varepsilon}{2}$,

б/Функция $f$ является аппроксимативно непрерывной в точке $x_n$

в/ $x_n \in \mathcal{J}_n$; $Cl(\mathcal{J}_n) \subset \mathcal{J}_{n-1}$

г/ средняя плотность множества $\{x \in F: |f(x)-f(x_n)| < \frac{\varepsilon}{8}\}$, на $\mathcal{J}_n$ перевышает $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

д/ последовательность диаметров $\delta(\mathcal{J}_n)$ стремится к нулю, когда $n$ стремится к бесконечности.

Можно проверить, что $|f(x_n)-f(x_{n-1})|\geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Из полноты пространства действительных чисел имеем $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$. Пусть $\{x_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$. Поскольку функция $f$ является $\uparrow$- и $\downarrow$- положительно нездегенерованой, мы можем отметить, что нижнее плотности множеств $\{x: f(x)>f(x_0)-\frac{\varepsilon}{8}\}$ и $\{x: f(x)<f(x_0)+\frac{\varepsilon}{8}\}$ суть положительными. Обозначим их соответственно через $\alpha_1, \alpha_2$.

Существует $N$ такое, что для $n>N$ имеем

(1) $$\frac{m(J_n\cap\{x: f(x)>f(x_0)-\frac{\varepsilon}{8}\})}{m(J_n)} > \frac{\alpha}{2},$$

(2) $$\frac{m(J_n\cap\{x: f(x)<f(x_0)+\frac{\varepsilon}{8}\})}{m(J_n)} > \frac{\alpha}{2},$$

где $\alpha$ обозначает $\min(\alpha_1; \alpha_2)$. Кроме того имеем

(3) $$\frac{m(J_n\cap\{x: |f(x)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon}{8}\})}{m(J_n)} > 1-\frac{\alpha}{2}.$$

Осюда вытекает существование такого $t_n'$, что

$$f(t_n')>f(x_0)-\frac{\varepsilon}{8}, \quad |f(t_n')-f(x_n)|<\frac{\varepsilon}{8}$$

Поэтому имеем

(4') $f(x_n)-f(t_n')>-\frac{\varepsilon}{8}$,

(5') $f(t_n')-f(x_0)>-\frac{\varepsilon}{8}$.

Складывая неравенства $(4')$ и $(5')$ получаем

(6') $f(x_n)>f(x_0)-\frac{\varepsilon}{4}$.

Существует тоже $t_n''$ такое, что

(4'') $f(x_n)-f(t_n'')<\frac{\varepsilon}{8}$,

(5'') $f(t_n'')-f(x_0)<\frac{\varepsilon}{8}$, откуда

(6'') $f(x_n) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Из (6') и (6'') вытекает, что для $n > N$

$|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Тем более $|f(x_{n+1}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Осюда мы получаем оценку

$$|f(x_n) - f(x_{n+1})| \leq |f(x_n) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_{n+1})| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но это противоречит факту, что $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ что и завершает доказательство.

Следующая теорема будет модификацией теоремы 5 стр.15 из /3/ , которой фрагментом является теорема 5 стр.158 из работы /5/ .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f: R^2 \to R$ будет такая, что все её секции являются измеримыми функциями одной действительной переменной. Тогда эквивалентны следующие условия:

(A) Функция $f$ является измеримой.

(B) $m_2(A(f) \cup B(f)) = 0$ , где $A(f)$ обозначает то-же, что и в /7/ : $A(f) = \{(x,y) : f^y$ является $\uparrow$- здегенерованая или $\downarrow$- здегенерованая в точке $x\}$, а множество $B(f)$ определено следующим образом:

$B(f) = \{(x,y) \in R^2 : f_x$ не является аппроксимативно непрерывной в точке $y\}$.

(C) $m_2(A(f) \cup C(f)) = 0$ где $C(f) = R^2 \setminus \{(x,y) : f_x$ является $\downarrow$ и $\uparrow$ - положительно нездегенерованой в точке $y\}$; $m_2$ обозначает очевидно плоскую меру Лебега.

Доказательство.

$(A) \Rightarrow (B)$. Для измеримых функций имеем $m_2(A(f))=0$, как мы заметили в /7/ /см.тоже /2/ /. Также множество $B(f)$ является множеством меры нуль, это вытекает из удостоверения 2 стр.13 из работы /3/ /см.тоже /5/ стр.158/.

$(B) \Rightarrow (C)$. Заметим, что

$$C(f) = R^2 \setminus \{(x,y) : \bigwedge_{b>y} \bigwedge_{a<y} D_i(y, A^b(f_x)) > 0 < D_i(y, A_a(f_x))\}$$ и

$$B(f) = R^2 \setminus \{(x,y) : \bigwedge_{b>y} \bigwedge_{a<y} D(y, A^b(f_x)) = 1 = D(y, A_a(f_x))\}.$$

Из того вытекает, что $(x,y) \in R^2 \setminus B(f) \Rightarrow D_i(y, A^b(f_x)) > 0 < D_i(y, A_a(f_x)) \Rightarrow (x,y) \in R^2 \setminus C(f)$ и отсюда $C(f) \subset B(f)$.

Поэтому $m_2(A(f) \cup C(f)) \leq m_2(A(f) \cup B(f)) = 0$. $(C) \Rightarrow (A)$.

Обозначим через $A = R^2 \setminus (A(f) \cup C(f))$.

Из свойств меры Лебега вытекает существование последовательности $(A_n)$ замкнутых множеств $A_n = Cl(A_n) \subset A$ положительной конечной меры $0 < m_2(A_n) < +\infty$, такой что $A_i \subset A_{i+1}$ $(i = 1,2,\ldots)$ и кроме того $m_2(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$. Для $n = 1,2,\ldots$ положим

$$f_n(x,y) = \begin{cases} f(x,y) ; & (x,y) \in A_n \\ 0 ; & (x,y) \notin A_n . \end{cases}$$

Чтобы доказать нашу теорему хватит показать, что каждая функция $f_n$ является измеримой. Для этого мы воспользуемся леммой 3 со стр.335 работы /2/ /см. также /1/, лемма 2 и /4/, лемма/. Эту лемму мы использовали также в работе /7/.

Зафиксируем число $n$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $E$ будет произвольным множеством положительной меры. Обозначим через $Q$ множество

$$Q = \{x \in R : E_x \text{ - измеримо и } m(E_x) > 0\}.$$

Из известной теоремы Фубини /6/ $Q$ является измеримым множеством положительной меры. Пусть $(\mathcal{J}_i)$ будет последовательностей всех открытых интервалов, которых концы рациональны, и пусть $(K_n)$ обозначает последовательность замкнутых сегментов о рациональных концах, которых длина /диаметр/ меньше чем $\varepsilon$ . Обозначим через $Q_{rs}$ множество

$$\{x \in Q : m(\mathcal{J}_r \cap E_x) > 0 ,\ f_n(x,y) \in K_s$$

для каждой точки y , которая является точкой плотности множества $E_x \cap \mathcal{J}_r$ $\}$. Очевидно $\bigcup_r \bigcup_s Q_{rs} \subset Q$.

Покажем, что включение можно заступить равенством. Для этого заметим, что каждое сечение $(f_n)_x$ функции $f_n$ овладает свойством $(G)$ . Существенно, если мы имеем измеримое множество $D$ положительной меры и фиксированное число $\eta > 0$, следует рассмотреть 2 возможности:

I Множество $D \setminus (A_n)_x$ является множеством положительной меры. Тогда существует такой интервал $\mathcal{J}_r$ , что $\mathcal{J}_r \cap (A_n)_x = \phi$ , $m(\mathcal{J}_r \cap D) > 0$ и рестрикция $(f_n)_x | \mathcal{J}_r \cap D \equiv \mathrm{constans}$ . Отсюда $\operatorname{osc}(f_n)_x = 0 < \eta$ на множестве $\mathcal{J}_r \cap D$

II Множество $D \setminus (A_n)_x$ является множеством меры нуль. В этом случае все точки плотности множества $D$ принадлежат множеству $(A_n)_x$. Применяя метод доказательства теоремы 2 до множества $D\cap(A_n)_x$ мы доказываем существование такого интервала $J$, что $m(J\cap D)>0$ и $\operatorname{osc}(f_n)_x\leq\eta$ на $d$-внутренности множества $D\cap J$ /это обозначает: на множестве всех точек плотности множества $D\cap J$/. Поэтому каждое сечение $(f_n)_x$ обладает свойством $(G)$ и в консеквенции $Q=\bigcup_r\bigcup_s Q_{rs}$.

Затем существует такая пара индексов $(r_0,s_0)$ что внешняя мера $m^*(Q_{r_0s_0})$ является положительной.

Обозначим через P множество $\{x\in R: D^*(x,Q_{r_0s_0})=1\}$.

Множество P является измеримым, положительной меры. Обозначим теперь через B множество $E\cap(P\times J_{r_0})$.

Множество B тоже измеримо, положительной меры, $m_2(B)>0$, так как $m(B_x)>0$ для каждой точки $x\in Q_{r_0s_0}$. Будем писать $A\subset +A$, если исполняются условия (2) и (3) леммы со стр.157 работы /5/ :

(2) Каждая точка $y_0\in A_{x_0}=\{y:(x_0,y)\in A\}$ является точкой плотности сечения $A_{x_0}$.

(3) Каждая точка $x_0\in A^{y_0}=\{x:(x,y_0)\in A\}$ является точкой плотности $A^{y_0}$.

В работе /3/, стр.12 имеется информация /доказательство такое-же, как доказательство леммы I из статьи /5/, что для каждого измеримого множества $A_1$ существует множество $B_1\subset A_1$ типа

$\mathbb{F}_\sigma$ такое, что $m(A_1 \setminus B_1)=0$ и кроме того $B_1 \subset + B_1$. Поэтому существуют три измеримые множества $G, H, L$, такие, что $G \subset A_n$, $G \subset +G$, $H \subset R^2 \setminus A_n$, $H \subset +H$, $L \subset B$, $L \subset +L$,

$m_2(A_n \setminus G)=0$, $m_2(B \setminus L)=0$, $m_2(R^2 \setminus A_n \setminus H)=0$.

Заметим, что $M \equiv L \cap (G \cup H) \subset E$ является измеримым подмножеством E, при этом $M$ положительной меры.

Теперь осталось показать, что $f_n(x,y) \in K_{s_0}$ для каждой точки $(x,y)$ множества $M$. Пусть $(x_0,y_0) \in M$. Предположим /чтобы получить противоречие/, что $f(x_0,y_0) \notin K_{s_0} \equiv [k,l]$.

Тогда $f(x_0,y_0) > l$ или $f(x_0,y_0) < k$. Так как в доказательстве теоремы из /7/ можем ограничится рассмотрением только случая $f(x_0,y_0) > l > k$.

Пусть $a = \frac{1}{2}(l+f(x_0,y_0))$. По предложению $f^{y_0}$ не является ни $\uparrow$- здегенерованой, ни $\downarrow$- здегенерованой и поэтому $x_0 \in \{t \in R : f(t,y_0) > a\}$ и верхняя плотность того множества в точке $x_0$ является положительной. Обозначим её через $\alpha$:

$$\alpha = D_s(x_0, A_a(f^{y_0})) > 0.$$

С другой стороны $x_0$ является точкой внешней плотности множества $Q_{r_0 s_0}$ и $y_0 \in J_{r_0}$. По определению множества $Q_{r_0 s_0}$ имеем $D(x_0, \{t \in R : f(t,y_0) \in K_{s_0}\})=1$. Поэтому существует открытый интервал $J$, которому принадлежит $x_0$ и такой что средняя плотность множества $\{t : f(t,y_0) \in K_{s_0}\}$ на множестве $J$ перевышает

$1-\frac{\alpha}{4}\}$.

Тогда существует общая точка этих множеств: $t_0 \in \{t : f(t, y_0) > a\} \cap$ $\cap \{t : f(t, y_0) \in K_{s_0}$ что невозможно, так как пересечение этих множеств – пустое множество.

З а м е ч а н и е 2. Сравнивая результаты нашей теоремы 3 с результатами теоремы 5 стр.15 из работы /3/ мы получаем следующих 5 эквивалентных условий: (A), (B), (C) из теоремы 3 и кроме того:

$(B')\quad m_2(A'(f) \cup B(f)) = 0$

$(C')\quad m_2(A'(f) \cup C'(f)) = 0$ где мы

обозначили:

$A'(f) = \{(x, y) \in R^2 : f^y$ является здегенерованой (в смысле /2/) в точке x $\}$

$C'(f) = \{(x, y) \in R^2 : f_x$ не является положительно нездегенерованой в точке y (в смысле /3/)$\}$.

На основании работы /7/ мы получаем ещё 2 услович, эквивалентные предыдущим:

$(C'')\quad m_2(A(f) \cup C'(f)) = 0$

$(C''')\quad m_2(A'(f) \cup C(f)) = 0.$

Кончая эту работу, автор хочет выразить глубокую благодарность доцнту З.Грандэ, которого блестящие, грандиозные идеи положены з основе предлагаемых результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

/1/ R.O.Davies, Separate approximate continuity implies measurability. Math.Proc.Camb.Phil.Soc. 73 /1973/, p.461-465

/2/ Z.Grande, On the measurability of functions of two variables, Math. Proc..Camb.Phil.Soc. 77 /1975/, p.335-336

/3/ - La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F\left(x, f(x)\right)$, Dissertationes Mathematicae, CLIX /1978/, p.1-45

/4/ -, Sur la mesurabilité des fonctions de deux variables, Bull. Acad.Polon.Sci., Sér. Sci. Math. Astr. Phys., vol XXI, No 9, /1973/, p.813-816

/5/ -, Les fonctions qui ont la propriété K et la mesurabilité des fonctions de deux variables, Fund.Math. XCIII /1976/ p.155-160

/6/ P.R.Halmos, Measure Theory, D.Van Nostrand Comp., Inc. Princeton, London /1950/

/7/ W.Ślęzak, Une condition équivalente à la mesurabilité d'une fonction de deux variables, Problemy Matematyczne,

## НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ИЗМЕРИМОСТИ ФУНКЦИИ 2 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание

В настоящей работе обобщается понятие положительно нездегенерованой функции и доказывается несколько условий эквивалентных измеримости функции 2 переменных.