ZESZYTY NAUKOWE WYZSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z. 3

WŁODZIMIERZ ŚLĘZAK
Bydgoszcz

ИЗМЕРИМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой работе изложена некоторая модификация теоремы из статьи/2/, получена путём введения понятия $\uparrow$- или $\downarrow$- дегенерации (/5/) вместо дегенерации. Мы используем следующую лемму:

Лемма I. //2/, лемма 2, стр. II4 /. Пусть $A\subset R^n$ будет измеримым по Лебегу множеством. Тогда существует подмножество $B\subset A$, тоже измеримое, такое, что $m_n(A-B)=0$/ где m_n - мера Лебега в R^n/ и кроме того $B\subset\cdot + B$ что по определению значит, что каждая точка $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in B$ удовлетворяет следующим 3-м условиям: (1) $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ является точкой плотности B, (2) x_i является точкой плотности множества $B_{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}=\{t\in R:(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)\in B\}$ для всех $i=1,2,\dots,n$.

(3) $(x_2,\dots,x_n)\in R^{n-1}$ является точкой плотности сечения

$$B_{x_1}=\{(t_2,\dots,t_n)\in R^{n-1}:(x_1,t_2,\dots,t_n)\in B\}:$$

Вот-основная теорема:

Теорема I. Пусть $f:R^n\to R$ будет действительной функцией такой, что все её сечения $t\longmapsto f_{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}(t)=$

$=f(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)$; $i=1,\dots,n$ измеримые, а все сечения $f_{x_2,\dots,x_n}$ обладают свойством (G) /см./2/ /.Функция является при этих предложениях измеримой тогда и только тогда,когда множество $A(f)=\bigcup_{i=2}^{n}\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n: f_{x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}$ является в точке x_i положительно $\uparrow$- здегенерована или $\downarrow$- здегенерована$\}$ является измеримым ,меры нуль.

Доказательство а/Необходимость. Конечно $A(f)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n: f_{x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}$ не является аппроксимативно непрерывна в точке $x_i\}$,где суммирование берётся по модулю n .Множество с правой стороны этого включения измеримо,и как показано в /2/ стр.II5-II6 это по существу нуль - множество.Поэтому получим тоже $m_n(A(f))=0$ б/Достаточность /ограничимая случаем n = 3/.Покажем что f удовлетворяет условиям леммы Дейвиса-Грандэго //1//, которая использовалась уже в /5/ .

Пусть $E\subset R^3$ будет измеримым множеством положительной меры, $m_3(E)>0$ и пусть $\varepsilon>0$ - заданное любое положительное число. Образуем последовательность (J_k) всех открытых интервалов, которых концы рациональны. Образуем тоже последовательность (K_k) замкнутых сегментов, которых длины удовлетворяют неравенству $\delta(K_k)<\varepsilon$ и которых концы рациональны.

Обозначим через Q_{rs} множество $\{(x_2, x_3) \in R^2 : E_{x_2, x_3} \cap \mathcal{J}_r$ измеримое множество положительной меры, и кроме того $f(t, x_2, x_3)$ принадлежит множеству K_s при всякой точке принадлежащей d- внутренности множества $\mathcal{J}_r \cap E_{x_2 x_3}\}$ /это значит t - точка плотности этого множества/. Пусть

$Q = \{(x_2, x_3) \in R^2 : E_{x_2, x_3}$ измеримо, положительной меры$\}$.

Поскольку все сечения f_{x_2, x_3} удовлетворяют условию (G) (см. /I/), то $\bigcup\limits_r \bigcup\limits_s Q_{rs} \supset Q$. Так как кроме того Q является множеством положительной меры, то существует собокупность индексов (r_0, s_0) такая, что $m^*_2(Q_{r_0 s_0}) > 0$, где m^*_2 внешняя плоская Лебегова мера. Обозначим через в множество $\{(x_2, x_3) \in R^2 : (x_2, x_3)$ является точкой внешней плотности множества $Q_{r_0 s_0}\}$. Множество в измеримо и кроме того $m_2(B) = m^*_2(Q_{r_0 s_0}) > 0$. Положим теперь $C = (\mathcal{J}_{r_0} \times B) \cap E$. Очевидно множество C измеримо и его мера положительная, поскольку $m_1(C_{x_2, x_3})$ положительна для m_2 - почти всех точек $(x_2, x_3) \in Q_{r_0 s_0}$

Пусть $D = C \cap (R^n - A(f))$. На основании леммы I существует для множества D такое множество $Z \subset D$, что $m_3(D - Z) = 0$ и кроме того $Z \subset \cdot + Z$. Очевидно Z включено в E и его мера /в троймерном пространстве/ положительная.

Осталось показать, что $f(x_1, x_2, x_3) \in K_{s_0}$, какая бы не была точка (x_1, x_2, x_3) принадлежащая множеству Z. Зафиксируем $(x_1, x_2, x_3) \in Z$. Так как Z тяжело включается в себя $(Z \subset\cdot Z)$, то Z является d - открытым, измеримым множеством положительной меры. Кроме того каждый из его измеримых подмножеств положительной меры пересекается с $Q_{r_0 s_0}$.

Предположим /чтобы получить противоречие/, что $f(x_1, x_2, x_3)$ не принадлежит K_{s_0}. Функция
$(u_2, u_3) \longmapsto f_{x_1}(u_2, u_3) = f(x_1, u_2, u_3)$ на основании теорем из /5/ является измеримой на множестве Z_{x_1}. Поскольку кроме того $f_{x_1}(Q_{r_0 s_0}) \subset K_{s_0}$, имеем $(*)$ $m_2\left(Z_{x_1} - (f_{x_1})^{-1}(K_{s_0})\right) = 0$.
С другой стороны имеем $f(x_1, x_2, x_3) \notin K_{s_0} = [k, l]$ и секция $f_{x_1 x_2}$ в точке x_3 не является ни $\uparrow$- ни $\downarrow$- здегенерованной; это означает, что $m_1^*\left(Z_{x_1, x_3} \cap \{x_2 : f(x_1, x_2, x_3) < k\} \cup\right.$
$\left.\cup\, Z_{x_1, x_3} \cap \{x_2 : f(x_1, x_2, x_3) > l > k\}\right) > 0$.
Для каждой точки $u_2 \in Z_{x_1, x_3} \cap (f_{x_1, x_3})^{-1}(R - K_{s_0})$ секции $f_{x_1 u_2}$ в точке x_3 не обладают свойством $\uparrow$- дегенерации ни $\downarrow$ -дегенерации поэтому $m_2^*(Z_{x_1} \cap (f_{x_1})^{-1}(R - K_{s_0})) > 0$ что противоречит $(*)$ и завершает доказательство.

С л е д с т в и е: Пусть $f : R^3 \to R$ будет действительной функцией от 3 переменных x_1, x_2, x_3. Если все её сечения f_{x_1, x_2}, f_{x_2, x_3}, f_{x_1, x_3} являются производными, то f принадлежит $\overline{\text{III}}$ классу Бера. В доказательстве существенную роль играет измеримость функции которая вытекает из нашей теоремы I.

В основе результатов изложенных в этой статье лежат глубокие идеи З.Грандэ, которому автор очень благодарен за инспирацию и помощь.

Литература

/1/ Z.Grande, La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x, f(x))$, Dissertationes Mathematicae, CLIX /1978/, p.1–50.

/2/ – Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Math. Slovaca 28 /1978/, No. т, p.113-118

/3/ A.Marczewski, Cz.Ryll - Nardzewski, Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables, Ann.Soc.Pol. Math.25 /1952/, p.145-154

/4/ Z.Zahorski, Sur la premiére derivée, Trans.Amer. Math. Soc. 69 /1950/, p.1-54

/5/ W.Ślęzak, Une condition équivalente à la meşurabilité d'une fonction de deux variables, /submited to Problemy Matematyczne 3/

ИЗМЕРИМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Содержание

В работе обобщается некоторые теоремы З.Грандэ. Найьолее интересным следством является то, что функция 3 переменных, которой все секции являются производными, принадлежит 3-му классу Бера.