ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1982 z.3.

HALINA J.JĘDRYKA
TADEUSZ M.JĘDRYKA
Bydgoszcz

O WPROWADZENIU CAŁKI OZNACZONEJ

A. Załóżmy, że dana jest funkcja $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ i, że znane jest twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej w postaci

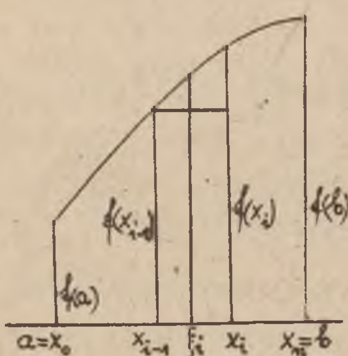
$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \text{ gdzie } \xi \in (a,b) .$$

Uporządkowanym układem (n-1) punktów:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b ,$$

gdzie „<" jest relacją mniejszości, dokonujemy rozbicia przedziału $I = \langle a,b\rangle$ na przedziały rozłączne $I_i = \langle x_{i-1}, x_i)$. Każdy z tych przedziałów można domknąć, przy czym jest

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{I}_i = \langle a,b\rangle = I.$$



Do każdego domkniętego i-tego przedziału $\overline{I}_i = \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ stosujemy twierdzenie Lagrange'a

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i ,$$

gdzie $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ oraz $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Oznaczając $f(x_i) = y_i$, $i = 0,1,2,\dots,n$ możemy napisać

$$y_i - y_{i-1} = y'(\xi_i)\Delta x_i ,$$

gdzie $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$,

a wobec $y'(\xi_i)\Delta x_i = dy(\xi_i)$, będzie:

$$y_i - y_{i-1} = dy(\xi_i)\ ,\ i = 0,1,2,\dots,n.$$

Sumując stronami powyższe równości, otrzymamy

$$y_n - y_o = \sum_{i=1}^{n} dy(\xi_i)\ ,$$

co możemy zapisać także w postaci

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} df(\xi_i)$$

lub w postaci

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

Ponieważ nie znamy naogół żadnej z wartości $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, tym samym nie znamy wartości żadnego składnika sumy, występującej po prawej stronie powyższych równości, przeto bierzemy rozbicie, zwane podziałem normalnym $\Pi_k\left(a = x_o^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)} = b\right)$ czyli takie rozbicie Π_k, że

$$\max_{1 \le i \le n_k} \operatorname{dia}\left(I_i^{(k)}\right) = \delta_k \longrightarrow 0\ ,\ \text{gdy } k \longrightarrow +\infty$$

i stosując przejście graniczne

$$\lim_{k\to+\infty}\left[f(b) - f(a)\right] = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f'\left(\xi_i^{(k)}\right)\Delta x_i^{(k)}$$

otrzymamy, że

$$f(b) - f(a) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f'\left(\xi_i^{(k)}\right)\Delta x_i^{(k)}\ ,\ \text{gdzie } x_{i-1}^{(k)} < \xi_i^{(k)} < x_i^{(k)}.$$

Ponieważ podział Π_k jest normalny, to wiadomo, że gdy $k \longrightarrow +\infty$ to wobec $\delta_k \longrightarrow 0$ oraz twierdzenia o trzech ciągach, dla każdego i będzie: $x_{i-1}^{(k)}$; $\xi_i^{(k)}$; $x_i^{(k)}$; dążyć do wspólnej wartości $x = \xi$.

Otóż granicę $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f'\left(\xi_i^{(k)}\right)\Delta x_i^{(k)}$, której wartość $f(b) - f(a)$ znamy, będziemy nazywali całką oznaczoną Riemanna-Stieltjesa względem funkcji f na przedziale $I = \langle a,b\rangle$ i będziemy oznaczali następująco:

$$\int_a^b f'(\xi)d\xi \quad \text{, bądź:} \quad \int_{\langle a,b\rangle} y'dx \quad \text{, względnie:} \quad \int_{\langle a,b\rangle} df \ .$$

Możemy więc wobec:

$$f'\left(\xi_i^{(k)}\right)\Delta x_i^{(k)} = y'\left(\xi_i^{(k)}\right)\Delta x_i^{(k)} = df\left(\xi_i^{(k)}\right)$$

pisać, że całka oznaczona Riemanna-Stieltjesa względem funkcji $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ czyli:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k} f'\left(\xi_i^{(k)}\right)\Delta x_i^{(k)} = \int_a^b f'(\xi)d\xi \ ,$$

bądź

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k} y'\left(\xi_i^{(k)}\right)\Delta x_i^{(k)} = \int_{\langle a,b\rangle} y'dx$$

względnie

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k} df\left(\xi_i^{(k)}\right) = \int_{\langle a,b\rangle} df \ .$$

Mamy więc, że całka oznaczona Riemanna-Stieltjesa, którą będziemy nazywać krótko (R-S)-całką względem funkcji f na $\langle a,b\rangle$ i pisać (R-S)-$\int_{\langle a,b\rangle} df$, jest równa liczbie: $f(b) - f(a)$.

Mamy więc, że dla funkcji $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$

$$\int_a^b f'(\xi)d\xi = f(b) - f(a).$$

Dla funkcji $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ połóżmy $\varphi = f'$ i $\Phi = f$. różniczkując funkcję f mamy: $(f)' = (\Phi)' = \Phi'$, ale $(f)' = f' = \varphi$, zatem $\varphi = \Phi'$. Możemy więc zapisać, że

$$\int_a^b f'(\xi)\,d\xi = \int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi \ ,$$

ale mamy także

$$\int_a^b f'(\xi)d\xi = \int_a^b \Phi'(\xi)d\xi = \Phi(b) - \Phi(a),$$

zatem otrzymujemy ostatecznie dla φ

$$\text{(L-N)}\quad \int_a^b \varphi(\xi)d\xi = \Phi(b) - \Phi(a), \text{ przy czym } \Phi' = \varphi,$$

gdzie funkcja $\varphi \in C(\langle a,b\rangle)$.

Wzór (L-N), wyrażający podstawowe twierdzenie rachunku całkowego, możemy zapisać następująco

$$(R) - \int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi = (R\text{-}S) - \int_{\langle a,b\rangle} d\Phi,$$

gdzie R- $\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi$ nazywamy całką Riemanna funkcji $\varphi \in C(\langle a,b\rangle)$ i wysłowić, że:

Całka Riemanna funkcji ciągłej φ na $\langle a,b\rangle$ jest równa na $\langle a,b\rangle$ całce Riemanna-Stieltjesa względem jej funkcji pierwotnej Φ, gdzie oczywiście przyjmujemy, że funkcją pierwotną dla funkcji φ nazywa się funkcja Φ taka, że $\Phi' = \varphi$.

Wzór (L-N) bywa nazywany często wzorem Leibniza-Newtona.

B. Z wzoru Leibniza-Newtona (L-N) otrzymamy natychmiast następujące własności (R), a także (R-S) całki na $\langle a,b\rangle$.

1. Kładąc w szczególności b = a, otrzymamy definicje

$$\int_a^a \varphi(\xi)d\xi = \Phi(a) - \Phi(a) = 0, \text{ oraz definicje}$$

2. $\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi = -\int_b^a \varphi(\xi)\,d\xi$.

Ponadto mamy, że

3. $\int_a^b \varphi(\xi)d\xi = \int_a^c \varphi(\xi)\,d\xi + \int_c^b \varphi(\xi)\,d\xi$ dla $c \in \langle a,b\rangle$, jako, że

$$\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi = \Phi(b) - \Phi(a) = [\Phi(c) - \Phi(a)] + [\Phi(b) - \Phi(c)] =$$

$$= \int_a^c \varphi(\xi)\,d\xi + \int_c^b \varphi(\xi)\,d\xi .$$

4.1 Jeżeli $\alpha \in R$, gdzie R jest zbiorem liczb rzeczywistych, to

$$\int_a^b \alpha\varphi(\xi)\,d\xi = \alpha\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi$$

jako, że $\int_a^b \alpha\varphi(\xi)\,d\xi = (\alpha\Phi)(b) - (\alpha\Phi)(a) = \alpha\Phi(b) - \alpha\Phi(a) =$

$$= \alpha[\Phi(b) - \Phi(a)] = \alpha\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi .$$

4.2 Jeżeli funkcje $\varphi, \psi \in C(\langle a,b\rangle)$ i jeżeli Φ i Ψ są odpowiednio ich funkcjami pierwotnymi, to

$$\int_a^b [\varphi(\xi) + \psi(\xi)]\,d\xi = \int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi + \int_a^b \psi(\xi)\,d\xi .$$

Mamy bowiem

$$\int_a^b [\varphi(\xi) + \psi(\xi)]\,d\xi = (\Phi + \Psi)(b) - (\Phi + \Psi)(a) =$$

$$= [\Phi(b) - \Phi(a)] + [\Psi(b) - \Psi(a)] = \int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi + \int_a^b \psi(\xi)\,d\xi$$

Z 4.1 i 4.2 wynika, że (R)-całka na $\langle a,b\rangle$ jest funkcjonałem liniowym, to jest zachodzi równość

$$\int_a^b [\alpha\varphi(\xi) + \beta\psi(\xi)]\,d\xi = \alpha\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi + \beta\int_a^b \psi(\xi)\,d\xi$$

(R)-całka, jako funkcjonał liniowy, bywa oznaczana symbolem

$\mathcal{J}_a^b(\cdot) = \int_a^b (\cdot)\,d\xi$, natomiast (R-S)-całka, jako funkcjonał, bywa oznaczana symbolem $\mathcal{H}(\cdot\,, \langle a,b\rangle) = \int_{\langle a,b\rangle} d(\cdot)$.

5.1 Wobec $\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi'(\xi_0)(b-a)$ oraz $\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi = \Phi(b) - \Phi(a)$ mamy natychmiast

$$\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi = \Phi'(\xi_0)(b-a) .$$

5.2 Wobec założeń z 5.1 i $\Phi' = \varphi$ mamy także

$$\int_a^b \varphi(\xi)d\xi = \varphi(\xi_0)(b-a),$$

co zapisujemy często

$$\varphi(\xi_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(\xi)d\xi$$

i nazywamy wartością średnią funkcji φ w $\langle a,b\rangle$.

C. Weźmy pod uwagę wzór (L-N) dla funkcji $\varphi \in C(\langle a,b\rangle)$ i niech $b = x \in R$. Wtedy całkę $\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi = \Phi(x) - \Phi(a)$ nazywamy (R)-całką ze zmienną górną granicą całkowania.

6. Wobec $\Phi' = \varphi$ całka $\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi = \Phi(x) - \Phi(a)$ jest funkcją ciągłą argumentu $x \in R$.

7. Wobec

$$\left(\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi\right)' = \left[\Phi(x) - \Phi(a)\right]' = \Phi' - 0 = \Phi' = \varphi$$

mamy, że

$$\left(\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi\right)' = \varphi(x)$$

Otóż 6 i 7 możemy wyrazić następująco:

Całka ze zmienną granicą górną jest funkcją klasy $C^1(\langle a,b\rangle)$ argumentu $x \in R$.

8. Wobec $\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi = \Phi(x) - \Phi(a)$ otrzymamy, że

$$\Phi(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi + \Phi(a)$$

i różniczkując, otrzymamy

$$\left(\Phi(x)\right)' = \left(\int_a^x \varphi(\xi)d\xi + \Phi(a)\right)' = \Phi'(x) = \varphi(x)$$

czyli mamy, że:

Całka ze zmienna górną granicą x jest funkcją pierwotną funkcji φ, zwanej funkcją podcałkową.

9. Jeżeli $\varphi, \psi \in C^1(\langle a,b\rangle)$, to widoczne, że

$$\int_a^b d(\varphi\psi) = \int_a^b (\psi d\varphi + \varphi d\psi) = \int_a^b \psi d\varphi + \int_a^b \varphi d\psi$$

jako, że $\int_a^b (\psi d\varphi + \varphi d\psi) = \int_a^b [\psi\varphi' + \varphi\psi'] d\xi = \int_a^b \psi\varphi' d\xi + \int_a^b \varphi\psi' d\xi =$

$= \int_a^b \psi d\varphi + \int_a^b \varphi d\psi$, ale $\int_a^b d(\varphi\psi) = \varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a)$, więc

$$\int_a^b d(\varphi\psi) = \int_a^b \psi d\varphi + \int_a^b \varphi d\psi = \varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a) .$$

10. Mamy także

$$\int_a^b \varphi[\psi(\xi)]\psi'(\xi) d\xi = \int_a^b \varphi[\psi(\xi)] d\psi(\xi) = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \varphi(t)\, dt .$$

C. Twierdzenie o wartości średniej dla całek.

Jeżeli funkcje $f, g \in C(\langle a,b\rangle)$, to także funkcja $\varphi = fg \in C(\langle a,b\rangle)$ zatem będzie, gdy $g(x) \neq 0$ w $\langle a,b\rangle$, to wobec wzoru Leibniza-Newtona

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a) , \quad \int_a^b g(x)dx = G(b) - G(a) ,$$

gdzie $\Phi' = fg$ oraz $G' = g$ i na mocy twierdzenia Cauchy'ego mamy, że (por. [1])

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{\Phi'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)} = f(\xi)$$

skąd

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx .$$

Podobnie dla funkcji $\varphi, \psi \in C(\langle a,b\rangle)$, z których funkcja ψ zachowuje znak na $\langle a,b\rangle$, mamy (p. [1] lub [2])

I. $\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_a^b \psi(x)dx$, gdzie $\xi \in (a,b)$.

Uwzględniając natomiast, że

$$\int_a^b d(\Phi\Psi) = \int_a^b \Psi d\Phi + \int_a^b \Phi d\Psi = \int_a^b \Psi\Phi' d\xi + \int_a^b \Phi\Psi' d\xi = \Phi(b)\Psi(b) - \Phi(a)\Psi(a)$$

i stosując I mamy

$$\Psi(\xi)\int_a^b d\Phi + \Phi(\eta)\int_a^b d\Psi = \Phi(b)\Psi(b) - \Phi(a)\Psi(a)$$

czyli

$$\Psi(\xi)[\Phi(b) - \Phi(a)] + \Phi(\eta)[\Psi(b) - \Psi(a)] = \Phi(b)\Psi(b) - \Phi(a)\Psi(a)$$

skąd

$$\Psi(\xi)\Phi(b) - \Psi(\xi)\Phi(a) + \Phi(a)\Psi(a) - \Phi(b)\Psi(b) = -\Phi(\eta)[\Psi(b) - \Psi(a)]$$

a stąd

$$-\Phi(a)[\Psi(\xi) - \Psi(a)] - \Phi(b)[\Psi(b) - \Psi(\xi)] = -\Phi(\eta)\int_a^b \Psi'(x)\,dx$$

i dalej

$$\Phi(a)\int_a^{\xi}\Psi'(x)\,dx + \Phi(b)\int_{\xi}^{b}\Psi'(x)\,dx = \int_a^b \Phi(x)\Psi'(x)\,dx\,.$$

Otrzymaliśmy więc, że gdy $\Phi, \Psi \in C^1(\langle a,b\rangle)$ i, że Φ' zachowuje znak w $\langle a,b\rangle$:

$$\int_a^b \Phi(x)\,d\Psi(x) = \Phi(a)\int_a^{\xi} d\Psi(x) + \Phi(b)\int_{\xi}^{b} d\Psi(x)\,.$$

Kładąc $\Phi = f$, $\Psi = g$, dla funkcji $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ oraz funkcji $g \in C^1(\langle a,b\rangle)$ otrzymujemy, gdy f' zachowuje znak w $\langle a,b\rangle$, wzór:

II. $$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)\int_a^{\xi} dg(x) + f(b)\int_{\xi}^{b} dg(x)\,.$$

Otóż wzór I nazywamy pierwszym, a wzór II drugim twierdzeniem o wartości średniej dla całek postaci : $\int_a^b f\,dg$, jako, że we wzorze I całka $\int_a^b \varphi\psi\,dx = \int_a^b \varphi\,d\Psi$ dla $\Psi' = \psi$. Występująca w obu tych twierdzeniach całka postaci: $\int_a^b f\,dg$ nazywa się całką Riemanna--Stieltjesa funkcji $f \in C(\langle a,b\rangle)$ względem funkcji $g \in C^1(\langle a,b\rangle)$, co zapisujemy: $(R\text{-}S)\text{-}\int_{\langle a,b\rangle} f\,dg$.

Zauważmy, że dla $(R\text{-}S)\text{-}\int_{\langle a,b\rangle} f\,dg$ zachodzi, gdy g' zachowuje znak w $\langle a,b\rangle$, iż

$$\int_a^b f\,dg = f(\xi)\int_a^b dg = f(\xi)\sum_{i=1}^{n_k} dg(\xi_i^{(k)}) = f(\xi)\sum_{i=1}^{n_k} g'(\xi_i^{(k)})\Delta x_i^{(k)} =$$

$$= f(\xi)\sum_{i=1}^{n_k}[g(x_i^{(k)}) - g(x_{i-1}^{(k)})] = f(\xi)[g(b) - g(a)]$$

na każdym normalnym rozbiciu $\Pi_k\left(a = x_0^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} = b\right)$ przedziału $\langle a,b\rangle$.

Widać więc, że można ogólnie zdefiniować (p. [3], str.139) (R-S)- $\int_{\langle a,b\rangle} f\,dg$ jako granicę sum Riemanna-Stieltjesa postaci

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n_k} f\left(\xi_i^{(k)}\right)\left[g\left(x_i^{(k)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right], \text{ gdzie } \xi_i^{(k)} \in \left(x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k)}\right)$$

czyli

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f\left(\xi_i^{(k)}\right)\left[g\left(x_i^{(k)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right] = \int_a^b f\,dg,$$

a nadto, natychmiast, że

$$|\sigma_k| \leq \sup_{\langle a,b\rangle}|f|\left|\sum_{i=1}^{n_k}\left[g\left(x_i^{(k)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right]\right| \leq \sup_{\langle a,b\rangle}|f|\sum_{i=1}^{n_k}\left|g\left(x_i^{(k)}\right) - g\left(x_{i-1}^{(k)}\right)\right| \leq \sup_{\langle a,b\rangle}|f|\, V_a^b(g),$$

gdzie $V_a^b(g)$ jest wahaniem całkowitym funkcji g na $\langle a,b\rangle$.
Zatem $|\lim \sigma_n| \leq |(R\text{-}S)\text{-}\int_{\langle a,b\rangle} f\,dg| \leq \sup_{\langle a,b\rangle}|f|\,V_a^b(g)$. Całka (R-S)- $\int_{\langle a,b\rangle} f\cdot dg$ istnieje dla $f\in C(\langle a,b\rangle)$ oraz $g\in C^*(\langle a,b\rangle)$, przy czym $C^*(\langle a,b\rangle)$ jest przestrzenią sprzężoną do $C(\langle a,b\rangle)$.

LITERATURA

[1] K.Kuratowski; Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, W-wa, 1973

[2] F.Leja; Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, W-wa, 1976

[3] J.Musielak; Wstęp do analizy funkcjonalnej, PWN, W-wa, 1976

ABOUT AN INTRODUCTION OF THE DEFINITE INTEGRAL

SUMMARY

We have given an introduction in the notion of Riemann-Stieltjes integral in that methodical elaborate and we have enclused some simple proofs of clasical theorems connected with that integral, with it too.

ÜBER DIE EINFÜHRUNG DES BESTIMMTEN INTEGRALS

INHALT

Eine Einführung in den Begriff des Riemann-Stieltjes Integrals und einige verbundenen mit diesem Integral einfachen Beweisen klasische Sätzen haben wir in diese methodische Bearbeitung gegeben.