ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1980 z. 2

Zbigniew Grande
Bydgoszcz

SUR LES FONCTIONS DONT LES SECTIONS SONT APPROXIMATIVEMENT CONTINUES

Désignons par R l'espace des nombres réels et par R^2 l'espace produit R x R. Étant donnée une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ et $x_0 \in R$ et $y_0 \in R$ fixés, les fonctions d'une variable $f_{x_0}(y) = f(x_0,y)$ et $f^{y_0}(x) = f(x,y_0)$ s'appellent sections de la fonction f correspondant respectivement à x_0 et y_0. Dans le travail [1] Davies a démontré que la continuité approximative de toutes les sections f_x et f^y de la fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ implique l'appartenance de la fonction f à la deuxième classe de Baire et il a montré un exemple d'une fonction $f:R^2$ R qui n'est pas de première classe de Baire et dont toutes les sections f_x et f^y sont approximativement continues. Pourtant l'exemple de Davies ne montre pas que la fonction f ayant ses sections approximativement continues ne peut pas avoir les autres bonnes propriétés, par exemple être ponctuellement discontinue.

On a également la même situation dans le cas de la fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant ses sections f_x et f^y continues presque partout /relativement à la mesure de Lebesgue/ et approximativement continues. L'exemple d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ n'étant pas de première classe et telle que toutes les sections f_x et f^y sont continues presque partout et approximativement continues est montré dans mon article [2].

Dans cet article je montre qu'il existe une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x et f^y approximativement continues et qui n'est continue en aucun point. De plus, je démontre que toute fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ dont toutes les sections f_x et f^y sont continues presque partout et approximativement continues est déjà ponctuellement discontinue sur tout ensemble $A_1 \times A_2$, où les ensembles linéaires A_1 et A_2 sont fermés et ne contiennent aucun de leurs points de dispersion.

Lemme 1. Il existe un ensemble $A \subset R^2$ dénombrable, dense et tel que tous les ensembles linéaires $A_x = \{t \in R: (x,t) \in A\}$ et $A^y = \{t \in R: (t,y) \in A\}$ sont vides ou ne contient plus qu'un element.

Démonstration. Soit (U_n) la suite des ensembles ouverts d'une base dénombrable dans R^2. Fixons le point $(x_1,y_1) \in U_1$ et le nombre naturel n et supposons qu'on ait déjà les points (x_i,y_i) $(i = 1,2,\dots, n-1)$ tels que $(x_i,y_i) \in U_i$ pour $i = 1,2,\dots, n-1$ et $x_i \neq x_j$ et $y_i \neq y_j$ pour $i,j = 1,2,\dots, n-1$ et $i \neq j$.
Comme l'ensemble

$$B_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} \left[\{(x_i,t): t \in R\} \cup \{(t,y_i): t \in R\} \right]$$

n'est pas vide, il existe donc le point $(x_n,y_n) \in B_n$. Remarquons que l'ensemble $A = \{(x_k,y_k): k = 1,2,\dots\}$ satisfait aux conditions exigées.

Théorème 1. Il existe une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x et f_y approximativement continues qui n'est continue en aucun point et qui n'est la limite d'aucune suite de fonctions continues presque partout.

Démonstration. Soit A l'ensemble du lemme 1. Il existe pour tout nombre naturel n deux ensembles fermés, nondenses $A_n, B_n \subset R$ tels que $x_n \in A_n$, $y_n \in B_n$, x_n est un point de densité de l'ensemble A_n, y_n est un point de densité de l'ensemble B_n, $B_n \cap \{y_k: k \neq n$ et $k = 1,2,\dots\} = \emptyset$, $A_n \cap \{x_k: k \neq n$ et $k = 1,2,\dots\} = \emptyset$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ pour $i \neq j$ et $i,j = 1,2,\dots$. Soient $C_n \subset A_n$ et $D_n \subset B_n$ $(n = 1,2,\dots)$ les ensembles du type F_σ qui ne se composent que de ses points de densite tels que $x_n \in C_n$ et $y_n \in B_n$. D'après le lemme 11 du travail [5] il existe pour n = 1,2,... les deux fonctions $f_n : R \longrightarrow R$ et $g_n : R \longrightarrow R$ approximativement continues et telles que

$$f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in R - C_n,$$
$$0 < f_n(x) \leq 1 \text{ pour } x \in C_n,$$
$$g_n(x) = 0 \text{ pour } x \in R - D_n, \text{ et}$$
$$0 < g_n(x) \leq 1 \text{ pour } x \in D_n.$$

Posons, pour n = 1,2,... ,

$$\bar{f}_n(x) = f_n(x)/f_n(x_n),$$
$$\bar{g}_n(y) = g_n(y)/g_n(y_n),$$

et

$$f(x,y) = \begin{cases} \bar{f}_n(x) \cdot \bar{g}_n(y) \text{ lorsque } (x,y) \in C_n \times D_n \\ 0 \text{ lorsque } (x,y) \in R^2 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \times D_n). \end{cases}$$

La fonction f satisfait aux conditions exigées. En effet, si $x_0 \in C_n$, on a l'égalité

$$f(x_0, y) = \bar{f}_n(x_0)\, \bar{g}_n(y) \text{ pour tout } y \in R.$$

Si $x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$, on a $f(x_0, y) = 0$ pour $y \in R$.

Toutes les sections f_x sont donc approximativement continues. On vérifie de la même façon que toutes les sections f^y sont approximativement continues. Afin d'établir que la fonction f n'est continue en aucun point, il suffit de remarquer que $f(x,y) = 1$ en tout point $(x,y) \in A$ et que l'ensemble

$$\{(x,y) : f(x,y) \neq 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \times D_n).$$

Le dernier ensemble est de première catégorie, il existe dans tout ensemble ouvert dans R^2 deux points (u_1, v_1) et (u_2, v_2) tels que $f(u_1, v_1) = 1$ et $f(u_2, v_2) = 0$, d'où il vient la discontinuité de la fonction f en tout point.

Il reste à prouver que la fonction f n'est la limite d'aucune suite de fonctions continues presque partout. Dans le travail [4] Mauldin a démontré que la fonction f peut être la limite d'une suite de fonctions continues presque partout si et seulement s'il existe une fonction $g:R^2 \longrightarrow R$ de première classe de Baire et un ensemble $F \subset R^2$ du type F_δ et de mesure (de Lebesgue) zéro tels que $\{(x,y):f(x,y) \neq g(x,y)\} \subset F$. Supposons, au contraire, que la fonction f soit la limite d'une suite de fonctions continues presque partout. Il existe donc une fonction $g:R^2 \longrightarrow R$ de première classe et un ensemble F du type F_δ, de mesure zéro tels que $\{(x,y):f(x,y) \neq g(x,y)\} \subset F$. D'autre part, quel que soit l'ensemble ouvert $U \subset R^2$, les ensembles $\{(x,y) \in U: f(x,y) < 1/4\}$ et $\{(x,y) \in U:f(x,y) > 3/4\}$ sont de mesure positive. Comme, de plus,

$$\{(x,y) \in U:f(x,y) < 1/4\} \subset \{(x,y) \in U:g(x,y) < 1/4\} \cup F \text{ et}$$
$$\{(x,y) \in U:f(x,y) > 3/4\} \subset \{(x,y) \in U:g(x,y) > 3/4\} \cup F,$$

la fonction g admet les valeurs plus petites que 1/4 et plus grandes que 3/4 dans tout ensemble ouvert, en contradiction avec la discontinuité ponctuelle de la fonction g.

Remarque 1. Si toutes les sections f_x et f^y d'une fonction $f:R^2 \longrightarrow R$ sont continues presque partout et approximativement continues, l'ensemble des points de continuité de la fonction f est déjà dense.

Démonstration. En effet, comme toute fonction continue presque partout et approximativement continue est quasicontinue, la fonction f est donc, d'après le théorème du travail [3] , également quasicontinue, donc et ponctuellement discontinue.

Nous démontrerons encore le théorème plus fort.

Théorème 2. Si toutes les sections f_x et f^y d'une fontion $f:R^2 \longrightarrow R$ sont continues presque partout et approximativement continues et si les ensembles A_1, $A_2 \subset R$ sont nonvides, fermés et ne contiennent aucun de leurs points de dispersion, la fonction partielle $f/(A_1 \times A_2)$ est continue en certain point de l'ensemble $A_1 \times A_2$.

Démonstration. Admettons, au contraire, qu'il existe une fonction $f: R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x et f^y continues presque partout et approximativement continues pour laquelle il existe deux ensembles nonvides, fermés A_1, A_2 A_2 R ayant la densité supérieure positive en tout son point et tels que la fonction partielle $f/(A_1 \times A_2)$ n'est continue en aucun point de l'ensemble $A_1 \times A_2$. Il existe pour tout point $(x, y) \in A_1 \times A_2$ un intervalle ouvert $I(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y))$ d'extremités rationnelles tel que, quelle que soit la sphère ouverte $S((x,y), r)$ de centre au point (x,y) et de rayon $r > 0$, il existe dans l'ensemble $S((x,y), r) \cap (A_1 \times A_2)$ deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) tels que $f(x_1, y_1) \leq \alpha(x, y)$ et $f(x_2, y_2) \geq \beta(x, y)$.

Rangeons tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles en une suite $I_1, I_2, \ldots$ et posons

$$B_n = \{(x,y) \in A_1 \times A_2 : \text{au point } (x,y) \text{ correspond l'intervalle } I_n\}$$

On vérifie facilement que tous les ensembles B_n sont fermés. Comme $A_1 \times A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, il existe donc un indice naturel n_0 tel que l'ensemble B_{n_0} est de deuxième catégorie dans $A_1 \times A_2$. Par conséquent, il existe deux intervalles ouverts J_1 et J_2 tels que $J_1 \cap A_1 \neq \emptyset$, $J_2 \cap A_2 \neq \emptyset$ et $(J_1 \cap A_1) \times (J_2 \cap A_2) \subset B_{n_0}$. Soit le point $(x_0, y_0) \in (J_1 \cap A_1) \times (J_2 \cap A_2)$ tel que $f(x_0, y_0) \leq \alpha_0 < \alpha_0 + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{4} = \alpha_1$, où $I_{n_0} = (\alpha_0, \beta_0)$.

La section f^{y_0} étant continue presque partout et approximativement continue, il existe un intervalle fermé d'extrémités rationnelles $K_1 \subset J_1$ tel que $m(K_1 \cap A_1) > 0$ (m désignant la mesure de Lebesgue dans R) et $f(x, y_0) < \alpha_1$ pour tout $x \in K_1 \cap A_1$. Toutes les sections f_x étant également continues presque partout et approximativement continues, il existe pour tout point $x \in K_1 \cap A_1$ un intervalle fermé $K(x) \subset J_2$ tel que $m(K(x) \cap A_2) > 0$ et $f(x,y) < \alpha_1$ pour tout $y \in K(x) \cap A_2$. Soit $\{L_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ la suite de tous les intervalles fermés d'extrémités rationnelles. Puisque $m(K_1 \cap A_1) > 0$, au moins l'un des ensembles

$$C_n^1 = \{x \in K_1 \cap A_1 : K(x) = L_n^1\}$$

est donc de mesure extérieure positive. Désignons par C^1 cet ensemble C_n^1 et par L^1 lui correspondant l'intervalle L_n^1. Soient $x_o \in C^1$ le point de densité extérieure de l'ensemble C^1 et $M_1 \subset \mathrm{Int}(K_1)$ ($\mathrm{Int}(K_1)$ désigne comme d'habitude l'intérieur de l'ensemble K_1) l'intervalle fermé tel que $x_o \in \mathrm{Int}(M_1)$ et

$$\frac{m^*(M_1 \cap C^1)}{m(M_1)} > 1 - \frac{1}{2},$$

où m^* désigne la mesure extérieure de Lebesgue dans R. Il existe un point $(x_1, y_1) \in (\mathrm{Int}(M_1) \cap A_1) \times (\mathrm{Int}(L^1) \cap A_2)$ tel que $f(x_1, y_1) \geq \beta_o > \beta_o - \dfrac{\beta_o - \alpha_o}{4} = \beta_1$.

De nouveau, tout en conservant la même méthode on démontre l'existence d'un intervalle fermé $K_2 \subset \mathrm{Int}(M_1)$ tel que $m(K_2 \cap A_1) > 0$ et $f(x, y_1) > \beta_1$ pour tout $x \in K_2 \cap A_1$ et par la suite l'existence d'un ensemble $C^2 \subset A_1 \cap K_2$ et des intervalles fermés $L^2 \subset \mathrm{Int}(L^1)$ et $M_2 \subset \mathrm{Int}(M_1)$ tels que

$$m(L^2 \cap A_2) > 0, \quad m(M_2) < 1/2,$$

$$\frac{m^*(M_2 \cap C^2)}{m(M_2)} > 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

et $f(x,y) > \beta_1$ pour $x \in M_2 \cap C^2$ et $y \in L^2$.

En général, le $n^{\text{ème}}$ pas donne un ensemble $C^n \subset A_1$ et des intervalles fermés $M_n \subset \mathrm{Int}(M_{n-1})$ et $L^n \subset \mathrm{Int}(L^{n-1})$ tels que $m(L^n \cap A_2) > 0$, $m(M_n) < \frac{1}{n}$,

$$(1) \quad \frac{m^*(M_n \cap C^n)}{m(M_n)} > 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et $f(x,y) > \beta_1$ ou $f(x,y) < \alpha_1$ pour $x \in M_n \cap C^n$ et $y \in L^n$, suivant que n est pair ou impair. Comme l'intersection des ensembles $(M_n \times L^n) \cap (A_1 \times A_2)$ n'est pas vide, il existe donc un point $(u,v) \in \bigcap_{n=1} (M_n \times L^n) \cap (A_1 \times A_2)$. D'après (1) la densité supérieure de l'ensemble $\{t \in R: f^v(t) > \beta_1\}$ et la densité supérieure de l'ensemble $\{t \in R: f^v(t) < \alpha_1\}$ au point u sont égales à 1, en contradiction avec la continuité approximative de la section f^v au point u et la démonstration est achevée.

Démontrons encore le théorème suivant:

Théorème 3. Soient A_1, $A_2 \subset R$ les ensembles nonvides, parfaits et tels que l'ensemble des points de dispersion de l'ensemble A_1 appartenant à A_1 est dense dans A_1 et l'ensemble des points de dispersion de l'ensemble A_2 appartenant à A_2 est dense dans A_2. Il existe une fonction $f: R^2 \longrightarrow R$ ayant toutes ses sections f_x et f^y continues presque partout et approximativement continues telle que la fonction réduite $f/(A_1 \times A_2)$ n'est continue en aucun point de l'ensemble $A_1 \times A_2$.

Dans la démonstration de ce théorème nous apliquerons le lemme suivant dont la démonstration est analogue que la démonstration du lemme 1.

Lemme 2. Soient les ensembles A_1 et A_2 les mêmes que ceux du theoreme 3. Il existe un ensemble $A \subset A_1 \times A_2$ dénombrable et dense dans $A_1 \times A_2$ et tel que tous les ensembles A_x et A^y sont vides ou ne contient qu'un élément étant un point de dispersion de l'ensemble A_2 ou A_1 respectivement.

Démonstration du théorème 3. Soit $A \subset A_1 \times A_2$ l'ensemble satisfaisant aux conditions du lemme 2. Rangeons tous les points de l'ensemble A en une suite $p_1, p_2, \ldots$ telle que $p_i \neq p_j$ pour $i \neq j$ et désignons par (x_i, y_i) les coordonnées du point p_i $(i = 1,2,\ldots)$. Il existe pour tout point $p_i(x_i,y_i)$ deux ensembles ouverts U_i et V_i tels que

$U_i \subset R - A_1$, $V_i \subset R - A_2$, x_i est un point de densité de l'ensemble U_i, y_i est un point de densité de l'ensemble V_i, la fermeture $Cl(U_i)$ de l'ensemble U_i est l'union des fermetures des composantes de l'ensemble U_i et de l'ensemble $\{x_i\}$ et la fermeture $Cl(V_i)$ est l'union des fermetures des composantes de l'ensemble V_i et de l'ensemble $\{y_i\}$ et $U_i \cap U_j = \emptyset$ et $V_i \cap V_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, \ldots$. Il existe pour $i = 1, 2, \ldots$ deux fonctions $f_i : R \to [0, 1]$ et $g_i : R \to [0, 1]$ continues presque partout, approximativement continues et telles que

$$f_i(x_i) = 1 \text{ et } f_i(x) = 0 \text{ pour } x \in R - Cl(U_i) \text{ et}$$

$$g_i(y_i) = 1 \text{ et } g_i(y) = 0 \text{ pour } y \in R - Cl(V_i).$$

Posons

$$f(x,y) = \begin{cases} f_i(x) \cdot g_i(y) & \text{lorsque } (x,y) \in Cl(U_i) \times Cl(V_i) \\ 0 & \text{lorsque } (x,y) \in R^2 - \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(Cl(U_i) \times Cl(V_i)\right). \end{cases}$$

On vérifie facilement que la fonction f satisfait aux conditions exigées.

Problème. La fonction $f : R^2 \to R$ ayant toutes ses sections f_x et f^y continues presque partout et approximativement continues doit - elle être la limite d'une suite de fonctions continues presque partout?

TRAVAUX CITES

[1] R.O. Davies, Separate approximate continuity implies measurability, Proc. Camb. Phil. Soc. 73 /1973/, p. 461-465.

[2] Z. Grande, Sur la r-continuité des fonctions de deux variables, Demonstratio Mathematica 11 /1978/, p. 937-945.

[3] S. Kempisty, Sur les fonctions quasicontinues, Fund. Math. 29 /1932/, p. 184-197.

[4] R.D. Mauldin, The Baire order of the functions continuous almost everywhere, Proc. Amer. Math. Soc. 51 /1975/, p. 371-377.

[5] Z. Zahorski, Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc. 69 /1950/, p. 1-54.

SUR LES FONCTIONS DONT LES SECTIONS SONT APPROXIMATIVEMENT CONTINUES

Résumé

Dans cet article on examine les fonctions de deux variables dont les sections f_x et f^y sont approximativement continues et les fonctions de deux variables dont les sections f_x et f^y sont continues presque partout et approximativement continues.

O FUNKCJACH, KTÓRYCH CIĘCIA SĄ APROKSYMATYWNIE CIĄGŁE

Streszczenie

W tym artykule bada się funkcje dwóch zmiennych, których cięcia f_x i f^y są aproksymatywnie ciągłe oraz funkcje dwóch zmiennych, których cięcia f_x i f^y są ciągłe prawie wszędzie i aproksymatywnie ciągłe.