ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1980 z.2

Danuta Nowicka
Bydgoszcz

О решении некоторой системы сингулярных интегральных уравнений с интегралом Хадамарда и с крепко особенными правыми частями

Сингулярные интегральные уравнения с рядом особенности $\geqslant 1$ для крепко особенных правых части рассматривал уже в своих публикациях К. Винер.
В работе [1] он получил для уравнения

$$\Gamma\int_a^x (x-t)^{-k-\alpha}\varphi(t)dt = (x-a)^{-l} \tag{1.1}$$

где $a < x \leqslant b$; $0 < \alpha < 1$; $k=0,1,2,\ldots$; $l = 1,2,\ldots$;

решение

$$\varphi(x) = (-1)^{l-1}((l-1)!)^{-1}\,\Gamma^{-1}(1-k-\alpha)\,\Gamma^{-1}(k+\alpha-l)\,(x-a)^{k+\alpha-l-1}\cdot$$
$$\cdot\ \ln(x-a) + \sum_{\mu=2}^{N} c_\mu (x-a)^{k+\alpha-\mu}$$

в котором $N\in\langle 2,\infty)$, c_μ - произвольные постоянные

Ему это удалось благодаря тому, что он использовал понятие несобственного интеграла в смысле Хадамарда и за одном обобщил определение Эйлеровых интегралов на отрицательные значения параметров.

Для доказания, что (1.2) есть решением (1.1), он вычислил, что:

$$\Gamma\int_a^x (x-t)^{\alpha}(t-a)^{\beta}dt = \Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+\beta)\,\Gamma^{-1}(2+\alpha+\beta)\,(x-a)^{\alpha+\beta+1}$$

где $\alpha,\beta \neq -1,-2,\ldots$; $2+\alpha+\beta \neq 0,-1,-2,\ldots$ (1.3)

$$\Gamma\int_a^x (x-t)^{k+\alpha}(t-a)^{-l}\,dt = (-1)^{l-1}((l-1)!)^{-1}\,\Gamma(k+\alpha+1)\cdot$$
$$\Gamma^{-1}(k+\alpha-l+2)\left\{\Gamma'(1)-\Gamma'(k+\alpha-l+2)\,\Gamma^{-1}(k+\alpha-l+2)+\ln(x-a)+\right.$$
$$\left.+\lambda_l\left(\sum_{\nu=1}^{l-1}\nu^{-1}\right)\right\}(x-a)^{k+\alpha-l+1}$$

, где $0<\alpha<1$, $l=1,2,\ldots;$

$k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots;$ $\lambda_0=0$, $\lambda_l=1$ для $l\in\mathbb{N}$ (1.4)

$$\Gamma\int_a^x (x-t)^{\alpha}(t-a)^{\beta-r-s}\ln(t-a)\,dt=(-1)^s s!\,\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta-r-s+1)(x-a)^{-s-1}$$

где $r, s=0,1,2,\ldots;$ $\alpha+\beta+2-r=0$, α,β – нецелые числа. (1.5)

2. Докажем следующей теоремы:

• Теорема 1.

Интегральное уравнение

$$\Gamma\int_a^x \left[(x-t)^{-k-\alpha-i-j}\right]_{\substack{i\le m\\ j\le m}}\cdot\left[\varphi_j(t)\right]_{j\le m}\,dt=\left[(x-a)^{-l-s-i}\right]_{i\le m} \quad (2.1)$$

в котором $x\in(a,b\rangle$, $0<\alpha<1$, $k=-2,-1,0,1,\ldots;$

$l=-s,-s+1,-s+2,\ldots$

имеет решение

$$\Phi(t)=\left[\varphi_j(t)\right]_{j\le m}=\left[\bar\varphi_j(t)+\bar X_j(t)\right]_{j\le m} \quad (2.2)$$

где

$$\varphi_j(t)=(-1)^{l+s-1}\,\Gamma^{-1}(k+\alpha-l-s+j)\,\Gamma^{-1}(-k-\alpha-m-j+1)\,\Omega_m^{-1}(m\times m)\cdot$$
$$\cdot\Delta_{js}(m\times m)\,(t-a)^{k+\alpha+j-l-s-1}\ln(t-a) \quad (2.3)$$

$$\Omega(m\times n)=\left(\prod_{v=1}^{n}(-k-d-m-v)\right)^{-1}\det\left[\prod_{\mu=0}^{m-u}(-k-d-m-v+\mu)\right]_{\substack{u\le n\\ v\le n}}$$

$$\Delta_{js}(m\times n)=\left(\prod_{\substack{v=1\\ v\neq j}}^{n}(-k-d-m-v)\right)^{-1}\det\left[\delta_{uv}\right]_{\substack{u\le n\\ v\le n}}$$

$$\delta_{uv}\begin{cases}\prod\limits_{\mu=0}^{m-u}(-k-d-m-v+\mu) & \text{для } v\neq j\\ (-1)^{u}\left((l+s+u-1)!\right)^{-1} & \text{для } v=j\end{cases}$$

$$\bar{X}_j(t)=\eta_j(t-a)^{k+d-l-s+j-1}$$

η_j - произвольные постоянные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если возьмём $z > a$ и матрицу $\left[(z-x)^{k+d+m+i-1}\delta_{ri}\right]_{\substack{r\le n\\ i\le n}}$, где δ_{ri} обозначает символ Кронекера, тогда из (2.1) получим:

$$\Gamma\int_a^z\left[(z-x)^{k+d+m+i-1}\delta_{ri}\right]_{\substack{r\le m\\ i\le n}}dx\ \Gamma\int_a^x\left[(x-t)^{-k-d-i-j}\right]_{\substack{i\le n\\ j\le n}}\left[\varphi_j(t)\right]_{j\le n}dt=$$

$$=\Gamma\int_a^z\left[(z-x)^{k+d+m+i-1}\delta_{ri}\right]_{\substack{r\le n\\ i\le n}}\left[(x-a)^{-l-s-i}\right]_{i\le n}dx$$

Тогда по формуле о преобразовании Дирихлета имеем:

$$\Gamma\int_a^z\left\{\Gamma\int_t^z\left[(z-x)^{k+d+m+i-1}(x-t)^{-k-d-i-j}\right]_{\substack{i\le n\\ j\le n}}dx\right\}\left[\varphi_j(t)\right]_{j\le n}dt=$$

$$=\Gamma\int_a^z\left[(z-x)^{k+d+m+i-1}(x-a)^{-l-s-i}\right]_{i\le n}dx$$

С помощью равенства (1.3) и (1.4) находим:

$$\left[\Gamma(k+\alpha+m+i)\Gamma(-k-\alpha-i-j+1)\Gamma^{-1}(m-j+1)\right]_{\substack{i\le m\\ j\le m}} \; {}^{\Gamma}\!\!\int_a^z \left[(z-t)^{m-j-\alpha}\varphi_j(t)\right]_{j\le m} dt =$$

$$= \Big[(-1)^{l+s+i-1}\left((l+s+i-1)!\right)^{-1}\Gamma(k+\alpha+m+i)\,\Gamma^{-1}(k+\alpha+m-l-s+1)\cdot$$

$$\cdot\left\{\Gamma'(1)-\Psi(k+\alpha+m-l-s+1)+\ln(z-a)+\lambda_{l+s+i}\left(\sum_{\nu=1}^{l+s+i-1}\nu^{-1}\right)\right\}\cdot$$

$$\cdot\,(z-a)^{k+\alpha+m-l-s}\Big]_{i\le m}$$

Используя свойства детерминантов и Эйлеровых интегралов нетрудно проверить, что

$$\det\left[\Gamma(k+\alpha+m+i)\Gamma(-k-\alpha-i-j+1)\Gamma^{-1}(m-j+1)\right]_{\substack{i\le m\\ j\le m}} =$$

$$=\Gamma^{m}(\alpha)\,\Gamma^{m}(1-\alpha)\prod_{r=1}^{m}(r-1)!\,(-1)^{k+\alpha+r}\,\Gamma^{-1}(m-r+1) \quad , \text{ где } 0<\alpha<1$$

$k = -2, -1, 0, 1, \ldots;\quad m\in\mathbb{N}$

а также, что

$$\det\Big[\Gamma(k+\alpha+m+i)\Gamma(-k-\alpha-i-j+1)\Gamma^{-1}(m-j+1) \quad \text{для } j\ne r \;\wedge$$

$$\wedge\;(-1)^{l+s+i-1}\left((l+s+i-1)!\right)^{-1}\Gamma(k+\alpha+m+i)\Gamma^{-1}(k+\alpha+m-l-s+1)\cdot$$

$$\cdot\left\{\Gamma'(1)-\Psi(k+\alpha+m-l-s+1)+\ln(t-a)+\lambda_{l+s+i}\left(\sum_{\nu=1}^{l+s+i-1}\nu^{-1}\right)\right\}\cdot$$

$$(t-a)^{k+\alpha+m-l-s} \quad \text{для } j=r\Big]_{i\le m} =$$

$$= (-1)^{l+s-1}\,\Gamma(k+d+m+r)\,\Gamma^{-1}(k+d+m-l-s+1)\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq r}}^{m}\Gamma(k+d+m+\mu)\cdot$$

$$\cdot\,\Gamma(-k-d-m-\mu+1)\,\Gamma^{-1}(m-\mu+1)\,(t-a)^{k+d+m-l-s}\cdot\Big\{\Delta_{rs}(m\times n)\ln(t-a)$$

$$+\ \Delta^{*}_{rs}(m\times n)\Big\}\ ,\ \text{где}$$

$$\Delta_{rs}(m\times n) = \Big(\prod_{\substack{v=1\\ v\neq r}}^{m}(-k-d-m-v)\Big)^{-1}\det[\delta_{uv}]_{\substack{u\leq n\\ v\leq n}}$$

$$\delta_{uv} = \begin{cases}\prod\limits_{\mu=0}^{m-u}(-k-d-m-v+\mu) & \text{для } v\neq r\\[2ex] (-1)^{u}\big((l+s+u-1)!\big)^{-1} & \text{для } v=r\end{cases}$$

$$\Delta^{*}_{rs}(m\times n) = \Big(\prod_{\substack{v=1\\ v\neq r}}^{m}(-k-d-m-v)\Big)^{-1}\det[\delta^{*}_{uv}]_{\substack{u\leq n\\ v\leq n}}$$

$$\delta^{*}_{uv} = \begin{cases}\prod\limits_{\mu=0}^{m-u}(-k-d-m-v+\mu) & \text{для } v\neq r\\[2ex] (-1)^{u}\big((l+s+u-1)!\big)^{-1}\cdot P & \text{для } v=r\end{cases}$$

$$P = \Gamma'(1) - \Psi(k+d+m-l-s+1) + \lambda_{l+s+u}\Big(\sum_{v=1}^{l+s+u-1} v^{-1}\Big)$$

$$\Psi(t) = \Gamma'(t)\,\Gamma^{-1}(t)\ ;\ 0<d<1\ ;\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

$$\lambda_0 = 0,\qquad \lambda_r = 1\qquad \text{для } r\in\mathbb{N}$$

Отсюда вытекает:

$$\cdot \left\{ \Delta^{*}_{js}(m\times m) + \Delta_{js}(m\times m) \sum_{\mu=1}^{m-j+1} (k+\alpha+m-l-s+1-\mu)^{-1} \right\}$$

имеем:

$$[\varphi_j(t)]_{j\le m} = \Big[(-1)^{l+s-1}\,\Gamma^{-1}(k+\alpha+j-l-s)\,\Gamma^{-1}(-k-\alpha-m-j+1)\cdot$$

$$(z-a)^{k+\alpha+j-l-s-1}\,\ln(z-a)\,\Delta_{js}(m\times m)\,\Omega^{-1}_{k}(m\times m)\Big]_{j\le m} +$$

$$+\left[\eta_j (z-a)^{k+\alpha+j-l-s-1}\right]_{j\le m}$$, что и требуется доказать.

Используя свойствами интегралов в смысле Хадамарда, нетрудно доказать, что справедлива теорема:

Теорема 2.

Если матрица $\Phi(t)$ вида (2.2) есть решением уравнения (2.1), то решением этого уравнения есть также матрица:

$$\Psi(t) = [\varphi_j(t)]_{j\le m} + X(t)$$

где

$$X(t) = \sum_{\mu=0}^{Q} c_\mu \left[\lambda_{js}(t-a)^{k+\alpha+j-s-\mu}\right]_{j\le m} + \sum_{\xi=2}^{R} d_\xi \left[\lambda^{*}_{js}(t-a)^{k+\alpha-j-s-\xi}\right]_{j\le m}$$

$c_\mu,\ d_\xi,\ \lambda_{js},\ \lambda^{*}_{js}$ - произвольные постоянные, $Q, R \in N$

и $\varphi_j(t)$ определено в (2.3).

Наконей нужно доказать, что матрица определенная формулой (2.4) есть единым решением уравнения (2. 1).

Пусть кроме матрицы $\Psi(t)$ определенной формулой (2.4) решением уравнения (2. 1) будет тоже матрица $\mathcal{L}(t)$.

Это значит, что заходит:

$$\Gamma\int_a^x \left[(x-t)^{-k-l-i\,j}\right]_{\substack{i\leq n\\ j\leq n}} \cdot \left(\Psi(t)-\mathcal{L}(t)\right) dt = \Theta$$

Если возмём $z > a$ и матрицу

$$\left[(z-x)^{k+l+m+i-1}\,\delta_{ri}\right]_{\substack{r\leq n\\ i\leq n}}.$$

нетрудно доказать, аналогично как в доказательстве теремы 1 , что заходит:

$$\left[\Gamma(k+l+m+i)\,\Gamma(-k-l-n-i+1)\,\Gamma^{-1}(n-j+1)\right]_{\substack{i\leq n\\ j\leq n}} \cdot \Big[\Gamma(n-j+1)\cdot$$

$$\cdot \underbrace{\Gamma\int_a^z dt \ldots \Gamma\int_a^z}_{(n-j+1)} \left(\Psi(t)-\mathcal{L}(t)\right) dt\Big]_{j\leq n} = \Theta$$

Отсюда следует, что $\mathcal{L}(t) = \Psi(t)$.

Литература

1 Klaus Wiener, Über Integralgleichungen mit singulären rechten Seiten und Hadamard - Integralen mit variablen Singularitäten. Beiträge zur Analysis 2 /1971/.

2 Klaus Wiener, Zur Lösung der Abelschen Integralgleichung mit einem Hadamard - Integral. Wiss. Zeitschrift Martin Luther Univ. Halle - Wittenberg, XV/4, 1966.

3 Klaus Wiener, Lineare Integralgleichungen min Hadamard - Integralen. Wiss. Zeitschrift Martin Luther Univ. Halle - Witenberg, XI/5, 1962.

4 Danuta Nowicka, О решении некоторой системы сингулярных уравнений с интегралом Хадамарда. Zeszyty Naukowe WSP w Bydgoszczy, Problemy Matematyczne 1977, z. 1.

O ROZWIĄZANIU PEWNEGO UKŁADU OSOBLIWYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH Z CAŁKĄ HADAMARDA Z MOCNĄ OSOBLIWOŚCIĄ PRAWEJ STRONY

Streszczenie

W pracy przeprowadzono konstrukcję rozwiązania operatorowego równania całkowego typu Abela z mocną osobliwością prawej strony. Całka występująca w równaniu jest całką typu Hadamarda. Rozwiązanie przedstawiono w postaci zamkniętej.