ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1980 z. 2

Halina J. Jędryka
Bydgoszcz

O PEWNYM PROSTYM SPOSOBIE BADANIA RÓWNANIA OGÓLNEGO STOŻKOWYCH

1. Przekształcenie liniowe na płaszczyźnie i jego macierz.

Niech na płaszczyźnie Π dana będzie baza ortogonalna $B\ (0, \vec{i}, \vec{j})$.

Niech na tej płaszczyźnie dane będą dwa zbiory wektorów X oraz Y.

Jeżeli każdemu wektorowi $\vec{x} \in X$ na podstawie jakiejkolwiek umowy F przyporządkujemy pewien wektor $\vec{y} \in Y$, to powiadamy, że na zbiorze X określone zostało przekształcenie lub transformacja F, co zapisujemy $F\colon X \to Y$ lub $X \xrightarrow{F} Y$.

Wektory $\vec{y} = F(\vec{x})$ nazywamy wartością przekształcenia F, zaś wektor $\vec{x}$ argumentem przekształcenia F.

Jeżeli przekształcenie A spełnia dwa warunki:

1^0. $A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A(\vec{v}_1) + A(\vec{v}_2)$

2^0. $A(\alpha\vec{v}) = \alpha A(\vec{v})$, gdy $\alpha \in R$,

to przekształcenie A nazywamy liniowym.

Otóż wektorowi $\vec{x} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = [x_1, y_1]$ z pomocą zapisu: $[x_1, y_1]$ przyporządkowana została macierz wierszowa, co możemy zapisać jako przyporządkowanie

$$\vec{x} \xrightarrow{W} [x_1, y_1]$$

co zapisujemy także

$$[x_1, y_1] = W(\vec{x}).$$

Podobnie możemy wektorowi $\vec{u} = u_1\vec{i} + v_1\vec{j}$ z pomocą zapisu: $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$ przyporządkować macierz kolumnową, co oznacza, że określone jest przyporządkowanie

$$\vec{u} \xrightarrow{K} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

co zapisujemy także

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = K(\vec{u}).$$

Dla macierzy określa się przekształcenie, które polega na tym, że macierz wierszową zamieniamy na kolumnową. Przekształcenie takie nazywamy transponowaniem macierzy M i oznaczamy symbolem M^T. Mamy

$$[x_1, y_1]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Transponowanie macierzy kolumnowej polega na zastąpieniu jej macierzą wierszową, czyli

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}^T = [u_1, v_1].$$

Otóż przekształcenie liniowe A na płaszczyźnie Π w bazie $B(0, \vec{i}, \vec{j})$ jest określone za pomocą pewnej macierzy kwadratowej stopnia drugiego, czyli:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

To dane przekształcenie liniowe A przyporządkowuje wektorom bazy $\vec{i}$ oraz $\vec{j}$ wektory $\vec{e}_1 = A\,\vec{i}$ oraz $\vec{e}_2 = A\,\vec{j}$.

Niech wektory $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ będą w bazie $B(0, \vec{i}, \vec{j})$ określone z pomocą współrzędnych $\vec{e}_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ oraz $\vec{e}_2 = [\alpha_2, \beta_2]$ tzn.

$$\vec{e}_1 = A\,\vec{i} = \alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j}$$

$$\vec{e}_2 = A\,\vec{j} = \alpha_2\vec{i} + \beta_2\vec{j}.$$

Weźmy pod uwagę macierz, której kolumny są utworzone ze współrzędnych wektorów $\vec{e}_1$ oraz $\vec{e}_2$ czyli

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Otóż macierz ta jednoznacznie określa przekształcenie liniowe A.

W tym celu zauważmy, że możemy określić współrzędne dowolnego wektora, przekształconego z pomocą transformacji liniowej A.

Mianowicie, niech będzie dany dowolny wektor

$$\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} = [x_1, x_2]^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

i odpowiadający mu wektor przekształcony

$$\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Otóż wektor przekształcony z pomocą A będzie

$$\begin{aligned}
\vec{y} &= A\vec{x} = A(x_1\vec{i} + x_2\vec{j}) = A(x_1\vec{i}) + A(x_2\vec{j}) = \\
&= x_1A(\vec{i}) + x_2A(\vec{j}) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = \\
&= x_1(\alpha_1\vec{i} + \beta_1\vec{j}) + x_2(\alpha_2\vec{i} + \beta_2\vec{j}) = \\
&= x_1\alpha_1\vec{i} + x_1\beta_1\vec{j} + x_2\alpha_2\vec{i} + x_2\beta_2\vec{j} = \\
&= (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2)\vec{i} + (\beta_1x_1 + \beta_2x_2)\vec{j} = \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \\ \beta_1x_1 + \beta_2x_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ale $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, czyli

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 \\ \beta_1x_y + \beta_2x_2 \end{bmatrix}$$

skąd

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

co można sprawdzić, wymnażając macierze po prawej stronie ostatniej równości.

Otóż ostatnią równość możemy zapisać w postaci

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Uwaga. Transponowanie macierzy jest także określone dla macierzy kwadratowych. Polega ono na zamianie wierszy danej macierzy na kolumny, a kolumn na odpowiednie wiersze, czyli gdy dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{to} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywa się symetryczną, gdy $A = A^T$. Oznacza to, że $a_{ij} = a_{ji}$, czyli $a_{12} = a_{21}$.

2. Forma kwadratowa wyznaczona przez macierz A.

Zauważmy dalej, że gdy wektor $\vec{y} = A\,\vec{x}$ przekształcony za pomocą przekształcenia liniowego o macierzy symetrycznej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

czyli wektor o macierzy

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

pomnożymy przez macierz wierszową

$$[x_1, x_2] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T = X^T,$$

odpowiadającą wektorowi $\vec{x}$, to otrzymamy

$$X^T A\, X = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \right] =$$

$$= \left[a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \right] = [\Phi(x_1 x_2)].$$

Element tej jednowyrazowej macierzy, oznaczony symbolem $\Phi(x_1,x_2)$ nazywamy formą kwadratową o macierzy symetrycznej A, czyli formą kwadratową

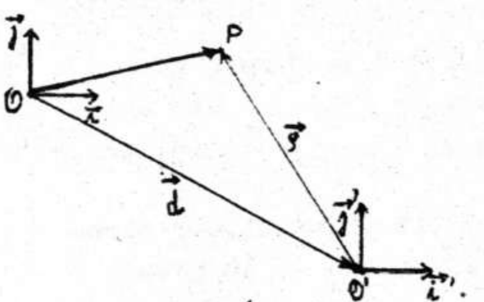
$$\Phi(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 .$$

Widzimy więc, że forma kwadratowa $\Phi(x_1,x_2)$ jest określona przez iloczyn macierzy $X^T A X$.

3. Przesunięcie równoległe, czyli translacja.

T.B. Translacja bazy.

Dokonajmy translacji, czyli przesunięcia równoległego danej bazy $B(0,\vec{i},\vec{j})$ o wektor $\vec{d} = [d_1,d_2]$ do nowego położenia w punkcie $0'$ płaszczyzny.



rys. 1.

Weźmy pod uwagę punkt P płaszczyzny, który nie zmienił swego położenia na płaszczyźnie. Z łatwością znajdujemy /rys.1/ związek, jaki zachodzi między wektorami wodzącymi $\vec{r}$ i $\vec{\rho}$ punktu P w pierwotnym i w nowym położeniu bazy. Otrzymujemy

$$\vec{r} = \vec{\rho} + \vec{d} \quad \text{czyli} \quad [x,y] = [x',y'] + [d_1,d_2]$$

gdzie x',y' oznaczają współrzędne punktu P w nowej bazie $B(0',i',j')$, skąd

$$x = x' + d_1 \quad \text{oraz} \quad y = y' + d_2.$$

Jeżeli wektory zapiszemy za pomocą macierzy kolumnowych, to

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} .$$

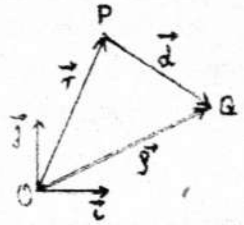
lub

$$X = X' + D$$

gdzie X, X' oraz D oznaczają odpowiednie macierze kolumnowe, występujące w poprzedzającej równości.

T.F. Translacja figury.

Niech na płaszczyźnie dana będzie baza $B(0,\vec{i},\vec{j})$ oraz punkt $P(x,y)$. Dokonujemy translacji o wektor $\vec{d} = [d_1, d_2]$ punktu P w danej bazie do położenia w punkcie $Q(u,v)$, (rys.2).



rys. 2.

Otóż $\vec{q} = \vec{r} + \vec{d}$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

skąd $u = x + d_1$

$v = y + d_2$

Jeżeli macierze kolumnowe oznaczymy odpowiednio U, X, D to otrzymamy $U = X + D$.

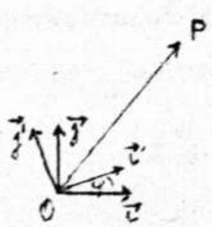
4. Przekształcenie przez obrót.

OB. Obrót bazy o kąt φ.

Dana jest baza $B(0,\vec{i},\vec{j})$ i punkt $P(x,y)$. Dokonujemy obrotu /po łuku okręgu/ danej bazy $B(0,\vec{i},\vec{j})$ o kąt φ do nowego położenia $B'(0,\vec{i}',\vec{j}')$.

Weźmy pod uwagę punkt P, o którym zakładamy, że nie zmienia swego położenia na płaszczyźnie. Oznaczmy współrzędne punktu P w nowej bazie B' odpowiednio $[x', y']$.

Znajdziemy związek, jaki zachodzi między współrzędnymi punktu P w pierwotnym i w nowym położeniu bazy.



rys.3.

	$\vec{i}'$	$\vec{j}'$
$\vec{i}$	φ	$\frac{\pi}{2} + \varphi$
$\vec{j}$	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	φ

W bazie $B(0,\vec{i},\vec{j})$ $OP = [x,y]$

W bazie $B'(0,\vec{i}',\vec{j}')$ $OP' = [x',y']$

Ale $OP' = OP$, czyli $x'\vec{i'} + y'\vec{j'} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.
Mnożąc tę równość wektorową skalarnie najpierw przez wersor $\vec{i'}$ oraz drugi raz przez wersor $\vec{j'}$ i korzystając z tabelki dla kątów między wersorami, otrzymamy

$$\begin{aligned} x' + 0 &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ 0 + y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{czyli} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{bmatrix}$$

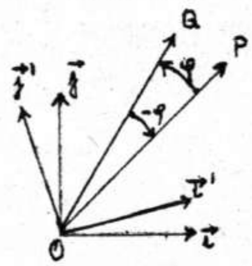
skąd

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Mamy więc $X' = \Omega X$. Macierz Ω nazywamy macierzą obrotu bazy.

OF. Obrót figury o kąt φ.

Dana jest baza $B(0,\vec{i},\vec{j})$ i punkt $P(x,y)$. Dokonujemy obrotu /po łuku okręgu/ o kąt φ punktu P w danej bazie $B(0,\vec{i},\vec{j})$ do nowego położenia w punkcie $Q(u,v)$.



rys. 4.

Tak można obrócić układ B do położenia $B'(0,\vec{i'},\vec{j'})$, aby punkt Q w bazie B' miał współrzędne równe współrzędnym punktu P w bazie B. Widoczne, że w tyr celu wystarczy obrócić układ B o kąt φ.

Nowa macierz współrzędnych jest równa iloczynowi macierzy obrotu Ω przez macierz współrzędnych u, v punktu Q, czyli

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{skąd} \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

co można sprawdzić przez podstawienie i wymnożenie macierzy kwadratowych.

Otrzymaliśmy więc

$$U = \Omega^T \cdot X,$$

skąd

$$X = \Omega \cdot U.$$

5. Stożkowe o równaniu środkowym i ich przekształcenie przez obrót i przesunięcie.

Niech będzie dana stożkowa S mająca środek, czyli o równaniu

$$S(x,y) = b^2x^2 + \alpha a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

które nazywa się równaniem środkowym stożkowej.

Łatwo zauważyć, że formie kwadratowej

$$\Phi(x,y) = b^2x^2 + \alpha a^2y^2$$

występującej w tym równaniu odpowiada macierz symetryczna

$$A = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & \alpha a^2 \end{bmatrix}$$

czyli, że $\quad X^T A X = [\Phi(x,y)].$

Obróćmy stożkową S o kąt φ tzn. że oś stożkowej S z wersorem $\vec{i}$ będzie po obrocie tworzyć kąt φ. Wektor wodzący obranego punktu E na stożkowej $\vec{r}_E = x_E\vec{i} + y_E\vec{j}$ po obrocie o kąt φ niech ma współrzędne p_E i q_E, czyli $\vec{r}_E = p_E\vec{i} + q_E\vec{j}$. Macierz P nowych współrzędnych (p,q) punktu E po obrocie stożkowej o kąt φ z pomocą macierzy obrotu Ω wyrazi się następująco:

$$X = \Omega P,$$

skąd $\quad X^T = P^T\Omega^T.$

Otrzymamy

$$X^T A X = P^T\Omega^T A \Omega P = P^T Q P$$

gdzie

$$Q = \Omega^T A \Omega = \begin{bmatrix} b^2c^2 + \alpha a^2s^2; & b^2sc - \alpha a^2sc \\ b^2sc - \alpha a^2sc; & b^2s^2 + \alpha a^2c^2 \end{bmatrix}$$

przy czym s oznacza $\sin\varphi$, zaś c oznacza $\cos\varphi$.

Macierz Q określa formę kwadratową Φ po dokonaniu obrotu o kąt φ.

Z kolei dokonujemy translacji stożkowej S o wektor $\vec{d} = d_1\vec{i} + d_2\vec{j}$, któremu odpowiada macierz D. Weźmy pod uwagę wektor wodzący $\vec{r}_{E_\varphi} = p_E\vec{i} + q_E\vec{j}$ punktu E stożkowej po obrocie o kąt φ. Niech punkt ten po translacji o wektor $\vec{d}$ ma wektor wodzący $\vec{r}_{E\varphi d} = u_E\vec{i} + v_E\vec{j}$. Macierz U nowych współrzędnych punktu E po obrocie o kąt φ i translacji o wektor $\vec{d}$ z pomocą macierzy translacji D wyrazi się następująco:

$$P = U - D \text{ skąd } P^T = U^T - D^T.$$

Otrzymamy zatem, że

$$X^T A\, X = P^T Q\, P = (U^T - D^T)\,Q(U - D)$$

skąd

$$X^T A\, X = U^T Q\, U - D^T Q\, U - U^T Q\, D + D^T Q\, D.$$

Dokonując mnożeń macierzy występujących w ostatniej równości, otrzymamy, że

$U^T Q\, U =$
$= (b^2c^2 + \alpha a^2s^2)u^2 + 2(b^2sc - \alpha a^2sc)uv + (b^2s^2 + \alpha a^2c^2)v^2$

$D^T Q\, D =$
$= (b^2c^2 + a^2s^2)d_1^2 + 2(b^2sc - \alpha a^2sc)d_1d_2 + (b^2s^2 + \alpha a^2c^2)d_2^2$

$D^T Q\, U =$
$= (b^2c^2 + \alpha a^2s^2)d_1u + (b^2sc - \alpha a^2sc)d_1v + (b^2sc - \alpha a^2sc)d_2u +$
$+ (b^2s^2 + \alpha a^2c^2)d_2v$

$U^T Q\, D =$
$= (b^2c^2 + \alpha a^2s^2)d_1u + (b^2sc - \alpha a^2sc)d_2u + (b^2sc - \alpha a^2sc)d_1v +$
$+ (b^2s^2 + \alpha a^2c^2)d_2v.$

Zatem
$D^T Q\, U + U^T Q\, D =$
$= 2(a_{11}d_1 + a_{12}d_2)u + 2(a_{21}d_1 + a_{22}d_2)v$, gdzie oznaczono:
$a_{11} = b^2c^2 + \alpha a^2s^2$; $a_{12} = a_{21} = b^2sc - \alpha a^2sc$; $a_{22} = b^2s^2 + a^2c^2$.

Uwzględniając wprowadzone oznaczenia możemy napisać

$$X^T A\, X = \big[a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 - 2(a_{11}d_1 + a_{12}d_2)u$$
$$-2(a_{21}d_1 + a_{22}d_2)v + a_{11}d_1^2 + 2a_{12}d_1d_2 + a_{22}d_2^2 =$$
$$= \big[\Phi(u, v)\big].$$

Otrzymaliśmy więc, że po obrocie i po translacji równanie stożkowej S będzie postaci:

$$S(u,v) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0,$$

gdzie oznaczono:

$$2a_{13} = -2(a_{11}d_1 + a_{12}d_2)$$
$$2a_{23} = -2(a_{21}d_1 + a_{22}d_2)$$
$$a_{33} = a_{11}d_1^2 + 2a_{12}d_1d_2 + a_{22}d_2^2 - a^2b^2.$$

Jeżeli wprowadzimy symboliczną zmienną w, przyjmując, że $w = 1$, czyli także $w^2 = 1$, to możemy równanie $S(u,v)$ zapisać w postaci:

$$S(u,v,w) = a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}uv + 2a_{23}uw + a_{33}w^2 = $$
$$= 0,$$

skąd widać, że $S(u,v,w)$ jest formą kwadratową zmiennych u,v,w, dającą się zapisać w następującej postaci macierzowej

$$\left[S(u,v,w)\right] = U^T\tilde{A}\ U = [u,v,w]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

gdzie macierz $\tilde{A}$ jest symetryczna tzn. że $A = A^T$ czyli, że $a_{ij} = a_{ji}$.

Widzimy zatem, że równanie stożkowej S po obrocie, określonym przez macierz obrotu Ω i po przesunięciu wyznaczonym przez macierz translacji D ulega zmianie, przyjmując postać szczególną równania

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + a_{22}v^2 + 2a_{13}u + 2a_{23}v + a_{33} = 0,$$

które nazywamy równaniem ogólnym stopnia drugiego dla dwóch zmiennych u i v, a które jest formą kwadratową zmiennych u,v,w przy $w = 1$, o macierzy symetrycznej $\tilde{A}$.

Można okazać, że równanie paraboli $y^2 - 2px = 0$ po obrocie, określonym przez macierz Ω i przesunięciu o macierzy translacji D, przyjmie postać szczególną równania ogólnego stopnia drugiego, o macierzy $\tilde{A}$.

Powstaje pytanie, czy na odwrót, mając dane równanie szczególne o postaci równania ogólnego stopnia drugiego, z pomocą przekształcenia przez obrót i przesunięcie możemy otrzymać prostsze równanie stożkowej, którą przedstawia to równanie.

Można okazać, że w tym celu trzeba dokonać translacji bazy do punktu, który jest środkiem stożkowej S lub do wierzchołka, gdy stożkowa jest parabolą. Następnie trzeba dokonać obrotu bazy o początku w środku stożkowej lub w wierzchołku paraboli o taki kąt φ, aby osie układu po obrocie miały kierunek osi głównych stożkowej.

Okazuje się jednak, że równanie ogólne stopnia drugiego o macierzy A może w szczególnych przypadkach przedstawiać inne zbiory geometryczne niż stożkowej S o równaniu środkowym, względnie paraboli o równaniu kanonicznym $y^2 - 2px = 0$.

Zagadnienie to rozwiązuje twierdzenie, dokonujące tzw. metrycznej klasyfikacji stożkowych. Sformułujemy to twierdzenie bez dowodu /dowód patrz M. Stark. Geometria Analityczna, str. 180-184, Warszawa 1970/.

Twierdzenie. Jeżeli stożkowa ma równanie rzeczywiste, to istnieje prostokątny układ współrzędnych, w którym daje się ona przedstawić jednym z równań wymienionych w tablicy na następnej stronie.

W tablicy tej w kolumnach drugiej i trzeciej występują liczby, które określają rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad i \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

przy czym rząd macierzy jest liczbą równą najwyższemu stopniowi różnego od zera wyznacznika, który daje się utworzyć ze współrzędnych tej macierzy. W czwartej kolumnie liczba $W = \det A$ zaś $\tilde{W} = \det \tilde{A}$, natomiast A_{ik} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ik} z macierzy $\tilde{A}$.

Lp.	rzA	rz$\tilde{A}$	Podprzypadki	Postać kanoniczna	Typ krzywej
I	2	3	$W>0$ i $a_{11}\tilde{W}<0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	elipsa rzeczywista
II	2	3	$W>0$ i $a_{11}\tilde{W}>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$	elipsa nierzeczywista
III	2	3	$W<0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	hiperbola
IV	2	2	$W<0$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	para prostych rzeczywistych nierównoległych
V	2	2	$W>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	para prostych nierzeczywistych nierównoległych
VI	1	3		$y^2-2px=0$	parabola
VII	1	2	$A_{11}<0$ lub $A_{22}<0$	$y^2-a^2=0$	para prostych rzeczywistych równoległych
VIII	1	2	$A_{11}>0$ i $A_{22}>0$	$y^2+a^2=0$	para prostych nierzeczywistych nierównoległych
IX	1	1		$y^2=0$	prosta właściwa podwójna
X	0	2		$uw=0$	prosta niewłaściwa i prosta właściwa
XI	0	1		$w^2=0$	podwójna prosta niewłaściwa

BIBLIOGRAFIA

[1] Tadeusz M. Jędryka, O konstrukcjach i właściwościach stożkowych, Matematyka, Czasopismo dla Nauczycieli 1976 Nr 3,

str. 153-172.

[2] Halina J. Jędryka, Pewne ujęcie metodyczne dotyczące cięciw, średnic i biegunowych stożkowych. Problemy Matematyczne 1979, Nr 1, Zeszyty Naukowe WSP Bydgoszcz.

[3] Franciszek Leja, Geometria analityczna. Warszawa 1954.

[4] Witold Pogorzelski, Geometria analityczna. T.B.P. Stud. Pol. Warszawskiej. Warszawa 1931.

[5] Marceli Stark, Geometria analityczna. B.M. Tom 17. Warszawa 1970.

[6] Eustachy Żyliński, Geometria analityczna. Warszawa 1938.

ON A SIMPLE METHOD OF INVESTIGATION OF THE GENERAL EQUATION OF CONICS

Summary

This paper contains the methodical investigation the general equation of conics applying the matrix representation of rotation and translation.