

Józef Łukaszewicz
Uniwersytet Wrocławski

ZASTOSOWANIA RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. Wstęp

Rachunek prawdopodobieństwa jest niewątpliwie przedmiotem, który sprawia szczególne trudności zarówno studentom jak i wykładowcom i to nie tylko na specjalności nauczycielskiej. Sądzę, że głównym źródłem tych trudności są kłopoty związane z dopasowaniem odpowiedniego modelu probabilistycznego do konkretnej sytuacji praktycznej przy próbach zastosowania teorii. Można wprowadzić na zajęciach z rachunku prawdopodobieństwa ograniczyć zakres omawianych przykładów do banalnych zadań z monetą, kostką do gry i losowaniem kul z urny, ale wtedy trudno jest uzasadnić potrzebę i znaczenie teorii, której zakres zastosowań ciągle się rozszerza wysuwając ją bez wątpienia na czołowe miejsce wśród różnych dyscyplin matematycznych ze względu na użyteczność dla innych działów nauki i gospodarki. Tę rolę rachunku prawdopodobieństwa powinien rozumieć nauczyciel matematyki, który zgodnie z nowymi tendencjami w nauczaniu matematyki będzie musiał przekazywać uczniom elementy probabilistyki już w młodszych klasach powszechnej szkoły dziesięcioletniej.

Przyszłego nauczyciela najlepiej można do tego przygotować dając mu obok kursowego wykładu z rachunku prawdopodobieństwa dodatkową możliwość poznania zastosowań tej dyscypliny na odpowiednio ustawionym wykładzie monograficznym. Wysłuchanie takiego wykładu oprócz rozszerzenia horyzontów słuchacza powinno także utrwalić i pogłębić zrozumienie materiału z wykładu kursowego.

Autor referatu ma już pewne doświadczenie w prowadzeniu takich wykładów na Uniwersytecie Wrocławskim a celem niniejszego wystąpienia jest przedstawienie kilku tematów, które można w sposób przystępny wyłożyć na specjalności nauczycielskiej. Prezentowane tu tematy mogą być punktem wyjścia do specjalnie ukierunkowanych prac magisterskich a słuchacze będą je mogli wykorzystać w przyszłej pracy nauczycielskiej także przy prowadzeniu zajęć fakultatywnych i kółek matematycznych.

2. Teoria gier

Grą dwuosobową G o sumie zero nazywamy trójkę

$$G = \{X, Y, K\},$$

gdzie:

X jest zbiorem strategii I gracza;

Y jest zbiorem strategii II gracza;

$K: X \times Y \rightarrow R$ jest funkcją wypłaty I gracza /jest to funkcja, która odwzorowuje iloczyn kartezjański zbiorów X, Y do zbioru liczb rzeczywistych R /.

Rozgrywka w tak określonej grze polega na tym, że każdy z graczy wybiera niezależnie strategię ze zbioru swoich strategii i, jeśli gracz I wybrał strategię $x \in X$ a gracz II strategię $y \in Y$, to w wyniku rozgrywki gracz I otrzymuje od gracza II wypłatę $K(x, y)$. Jeżeli $K(x, y) < 0$, to ujemną wypłatę należy rozumieć jako wypłatę $-K(x, y)$ w przeciwnym kierunku /gracz I płaci graczowi II/.

Z punktu widzenia gracza I interesująca jest wielkość

$$(1) \quad \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \underline{v},$$

zwana dolną wartością gry. Jeżeli \underline{v} ma wartość skończoną, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje strategia I gracza $\bar{x}(\epsilon) \in X$ taka, że

$$\forall_{y \in Y} K(\bar{x}(\epsilon), y) \geq \underline{v} - \epsilon.$$

Wybierając taką strategię gracz I może sobie zagwarantować,

że bez względu na wybór strategii II wypłata nie będzie niższa niż $\underline{v} - \epsilon$.

Gracza II interesuje natomiast wielkość

$$(2) \quad \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = \bar{v}$$

zwana górną wartością gry. Jeżeli \bar{v} ma wartość skończoną, to wówczas dla każdego $\epsilon > 0$ gracz II znajdzie strategię $\bar{y}(\epsilon) \in Y$, która gwarantuje, że bez względu na wybór strategii I gracza wypłata nie będzie wyższa niż $\bar{v} + \epsilon$ czyli, że

$$\forall_{x \in X} K(x, \bar{y}(\epsilon)) \leq \bar{v} + \epsilon.$$

Łatwo udowodnić, że nierówność

$$(3) \quad \underline{v} \leq \bar{v}$$

spełniona jest nawet wtedy, gdy jedna z tych wartości, lub obie, mają wartości nieskończone. Jeżeli relacja (3) spełniona jest jako równość, to mówimy, że gra jest zamknięta a wspólną wartość

$$v = \underline{v} = \bar{v}$$

nazywamy wartością gry.

Jeżeli gra G ma skończoną wartość v , to każdą strategię I gracza $\bar{x} \in X$, która spełnia warunek

$$(4) \quad \forall_{y \in Y} K(\bar{x}, y) \geq v$$

nazywamy optymalną strategią I gracza. Podobnie każdą strategię II gracza $\bar{y} \in Y$, która spełnia warunek

$$\forall_{x \in X} K(x, \bar{y}) \leq v$$

nazywamy optymalną strategią II gracza. Oznaczmy przez $\bar{X} \subset X$ oraz $\bar{Y} \subset Y$ zbiory optymalnych strategii odpowiednio I i II gracza /mogą to być zbiory puste/. Jeżeli obaj gracze mają optymalne strategie: $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$, to:

kres górny w wyrażeniu (1) jest osiągnięty dla $x = \bar{x}$;

kres dolny w wyrażeniu (2) jest osiągnięty dla $y = \bar{y}$;

$$K(\bar{x}, \bar{y}) = v;$$

$$\forall_{x \in X} \forall_{y \in Y} K(x, \bar{y}) \leq K(\bar{x}, \bar{y}) \leq K(\bar{x}, y).$$

Ostatnią relację przyjmuje się jako definicję punktu siodłowego: para strategii optymalnych \bar{x}, \bar{y} tworzy punkt siodło-

wy funkcji wypłaty $K(x, y)$.

Ograniczmy teraz nasze rozważania do specjalnego typu gier dwuosobowych o sumie zero, a mianowicie do gier macierzowych. Niech $A = \{a_{ij}\}$ będzie macierzą formatu $n \times m$ o elementach rzeczywistych. Grą macierzową o macierzy wypłat A nazwiemy grą $G = \{X, Y, K\}$, w której:

zbiór strategii I gracza X jest sympleksem n -wymiarowym

$$(5) X = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \forall_i x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\},$$

zbiór strategii II gracza Y jest sympleksem m -wymiarowym

$$(6) Y = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_m) : \forall_j y_j \geq 0, \sum_{j=1}^m y_j = 1\}$$

funkcja wypłaty K ma postać

$$(7) K(x, y) = xAy^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}x_i y_j.$$

Tak zdefiniowana gra macierzowa jest domknięta i ma niepuste zbiory optymalnych strategii obu graczy /jest to tak zwane twierdzenie minimaksowe/.

Zwróćmy teraz uwagę na fakt, że w grze macierzowej każdą strategię I gracza $x \in X$ można interpretować jako rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej o wartościach ze zbioru $N = \{1, 2, \dots, n\}$, a zbiór strategii I gracza X jest zbiorem wszystkich takich rozkładów. Podobnie każdą strategię II gracza $y \in Y$ można interpretować jako rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej o wartościach ze zbioru $M = \{1, 2, \dots, m\}$, a zbiór strategii II gracza Y jest zbiorem wszystkich takich rozkładów. Przy takiej interpretacji strategii obu graczy funkcję wypłaty K można przedstawić jako wartość oczekiwaną losowo wybranego elementu macierzy A

$$K(x, y) = E(a_{\xi, \eta}),$$

gdzie losowy wskaźnik ξ ma rozkład prawdopodobieństwa x , losowy wskaźnik η ma rozkład prawdopodobieństwa y i zmienne losowe ξ, η są niezależne.

Sympleksy (5) i (6) są zbiorami wypukłymi w n-wymiarowej lub m-wymiarowej przestrzeni euklidesowej, rozpiętymi na wersorach układu współrzędnych. Wersorom odpowiadają rozkłady o masie prawdopodobieństwa skupionej w jednym punkcie a odpowiednie strategie nazywamy strategiami czystymi.

Pierwszy gracz ma n strategii czystych:

$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie

$$x_j^{(i)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq i, \\ 1 & \text{dla } j = i. \end{cases}$$

Drugi gracz ma m strategii czystych:

$$y^{(j)} = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_m^{(j)}), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie

$$y_i^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j, \\ 1 & \text{dla } i = j. \end{cases}$$

Ponieważ funkcja (7) jest liniowa ze względu na każdą ze zmiennych, więc w grze macierzowej warunek optymalności (4) strategii $\bar{x} \in X$ spełniony jest wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność

$$K(\bar{x}, y) \geq v$$

spełniona jest dla każdej z m strategii czystych II gracza, czyli gdy spełnione są nierówności

$$(8) \quad \bar{x}A(y^{(j)})^T = (\bar{x}A)_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\bar{x}_i \geq v \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, m.$$

Zbiór \bar{X} optymalnych strategii I gracza jest więc częścią wspólną sympleksu X i m półprzestrzeni (8). Jest to więc wielościan wypukły /który może się redukować do jednego punktu/.

Podobnie zbiór \bar{Y} optymalnych strategii II gracza jest wielościanem wypukłym: częścią wspólną sympleksu Y i n półprzestrzeni

$$x^{(i)}A\bar{y}^T = (A\bar{y}^T)_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}\bar{y}_j \leq v \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Tak więc teoria gier macierzowych sprowadza się do badania wielościanów wypukłych. Zagadnienie wyznaczenia wartości gry i optymalnych strategii obu graczy można sprowadzić do rozwiązania pewnego zagadnienia z programowania liniowego. Tutaj chcemy jednak zwrócić uwagę na iteracyjną metodę przybliżoną, która polega na konstrukcji ciągu fikcyjnych rozgrywek $\{R_k\}$. W rozgrywkach nieparzystych R_{2s-1} ($s = 1, 2, \dots$) pierwszy gracz wybiera strategię czystą $x^{(i_s)}$ najkorzystniejszą dla niego /to znaczy dającą maksymalną wypłatę V_s / przeciwko znanej strategii $y(s)$ drugiego gracza. W rozgrywkach parzystych R_{2s} ($s = 1, 2, \dots$) drugi gracz wybiera strategię czystą $y^{(j_s)}$ najkorzystniejszą dla niego /to znaczy dającą minimalną wypłatę v_s / przeciwko znanej strategii $x(s)$ pierwszego gracza. Ciągi strategii $\{x(s)\}$, $\{y(s)\}$, ciągi optymalnych wyborów $\{i_s\}$, $\{j_s\}$ i ciągi wypłat $\{V_s\}$, $\{v_s\}$ są wyznaczone przy pomocy następujących wzorów rekurencyjnych:

$y(1)$ = dowolny ustalony element zbioru Y ,

$$[Ay(1)^T]_{i_1} = \max_i [Ay(1)^T]_i = \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j(1) = V_1,$$

$$x(1) = x^{(i_1)},$$

$$[x(1)A]_{j_1} = \min_j [x(1)A]_j = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i(1) = v_1,$$

.....

$$y(s+1) = \frac{s}{s+1} y(s) + \frac{1}{s+1} y^{(j_s)},$$

$$[Ay(s+1)^T]_{i_{s+1}} = \max_i [Ay(s+1)^T]_i = \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j(s+1)$$

$$= V_{s+1},$$

$$x(s+1) = \frac{s}{s+1} x(s) + \frac{1}{s+1} x^{(i_{s+1})},$$

$$\begin{aligned} [x(s+1)A]_{j_{s+1}} &= \min_j [x(s+1)A]_j = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i(s+1) = \\ &= v_{s+1} \\ &\dots \dots \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

W powyższych wzorach ekstrema mogą być osiągnięte dla kilku różnych wartości wskaźnika i lub j . Aby wybór i_{s+1} lub j_{s+1} był jednoznaczny należy wtedy przyjąć dowolną dodatkową regułę postępowania /np. wybierać minimalny wskaźnik realizujący dane ekstremum/.

Zauważmy, że skonstruowane tutaj strategie $x(s)$ są strategiami empirycznymi, których składowe są częstościami wyboru poszczególnych strategii czystych pierwszego gracza w dotychczasowych rozgrywkach nieparzystych. Podobną interpretację mają strategie $y(s)$, z tym jednak, że należy tu również uwzględnić wpływ dowolnie ustalonej strategii wyjściowej $y(1)$. Tak więc w kolejnych rozgrywkach następuje proces wzajemnego uczenia się przeciwników.

Łatwo zauważyć, że dla każdego s zachodzą nierówności

$$v_s \leq v \leq V_s.$$

Jeśli więc dla pewnej pary wskaźników s_1, s_2 zachodzi równość,

$$(9) \quad v_{s_1} = v_{s_2},$$

to wspólna wartość (9) jest wartością gry. Nieco trudniej udowodnić, że oba ciągi $\{V_s\}$ i $\{v_s\}$ są zawsze zbieżne do wartości gry

$$(10) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} V_s = \lim_{s \rightarrow \infty} v_s = v.$$

Elementarny, choć nieco uciążliwy dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce S. Karlina ([3], tom 1, § 6.6). W podanym tam dowodzie są niestety błędy (w dowodach lematów 6.6.1 i 6.6.3), jednak cały dowód można bez trudności naprawić.

Ze zbieżności (10) wynika, że jeśli istnieją granice

ciągów empirycznych strategii $\{x(s)\}$ i $\{y(s)\}$, to są one strategiami optymalnymi

$$\bar{x} = \lim_{s \rightarrow \infty} x(s) \in \bar{X},$$

$$\bar{y} = \lim_{s \rightarrow \infty} y(s) \in \bar{Y}.$$

Ciągi $\{x(s)\}$ i $\{y(s)\}$ mogą być rozbieżne, ale ponieważ są ograniczone ($x(s) \in X$, $y(s) \in Y$), więc można z nich zawsze wybrać podciągi zbieżne. Każdy punkt skupienia ciągu $\{x(s)\}$ jest optymalną strategią pierwszego gracza a każdy punkt skupienia ciągu $\{y(s)\}$ jest optymalną strategią drugiego gracza. Jeżeli zbiory \bar{X} i \bar{Y} są jednopunktowe, to ograniczone ciągi $\{x(s)\}$ i $\{y(s)\}$ mają tylko po jednym punkcie skupienia a więc są zbieżne.

3. Teoria niezawodności

Niech ξ będzie zmienną losową, która przyjmuje tylko wartości nieujemne. Jeśli $F(t)$ oznacza dystrybuantę zmiennej losowej ξ , to warunek nieujemności można zapisać w postaci równości

$$F(0) = 0.$$

Zmienną losową ξ będziemy tu interpretowali jako czas pracy losowo wybranego elementu ustalonego typu /np. lampy elektronowej/ od chwili włączenia do eksploatacji do momentu awarii tego elementu. Funkcję

$$P(t) = 1 - F(t) = \Pr\{\xi \geq t\},$$

to jest prawdopodobieństwo, że element będzie bez awarii pracował do chwili t nazywamy funkcją niezawodności.

Jeżeli istnieje gęstość rozkładu prawdopodobieństwa

$$f(t) = F'(t),$$

to możemy zdefiniować wielkość

$$r(t) = - \frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

nazywaną intensywnością awarii. Nazwę tę uzasadnia wzór

(przy $h \rightarrow 0$)

$$\Pr \{t \leq \xi < t+h \mid \xi \geq t\} = f(t) \cdot h + o(h),$$

który oznacza, że prawdopodobieństwo awarii w przedziale $[t, t+h)$ elementu, który nie uległ awarii do momentu t z dokładnością do małych rzędu wyższego niż h jest równe iloczynowi intensywności awarii $f(t)$ w początkowym punkcie przedziału i długości przedziału h .

W teorii niezawodności szczególną rolę odgrywa wykładnicza funkcja niezawodności

$$(11) \quad P_{\lambda}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \leq 0, \\ e^{-\lambda t} & \text{dla } t > 0. \end{cases}$$

Dodatni parametr λ jest tu intensywnością awarii

$$f(t) = \lambda,$$

niezależną od czasu t . Funkcja (11) jest jedyną funkcją niezawodności mającą stałą intensywność awarii. Jest to również jedyna⁽¹⁾ funkcja niezawodności spełniająca warunek

$$(12) \quad \forall_{x \geq 0} \forall_{y \geq 0} P(x+y) = P(x)P(y).$$

Tę własność funkcji niezawodności nazywamy brakiem pamięci, bo prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy elementu w przedziale $[x, x+y)$ pod warunkiem, że nie było awarii przed momentem x zależy wtedy tylko od długości przedziału y a nie od położenia tego przedziału

$$\Pr \{\xi \geq x+y \mid \xi \geq x\} = P(x+y)/P(x) = P(y)$$

$$(P(x) > 0).$$

Innymi słowy element, który pracował bezawaryjnie do momentu x jest tak samo dobry /z punktu widzenia dalszej jego

(¹) Jeśli umówimy się, że funkcja niezawodności

$$P(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \leq 0, \\ 0 & \text{dla } t > 0; \end{cases}$$

jest także wykładnicza o intensywności awarii $\lambda = +\infty$.

pracy/ jak nowy element, który w chwili x zostałby włączony do eksploatacji.

Zastępując w (12) znak równości odpowiednim znakiem słabej nierówności otrzymamy definicję dwu klas funkcji niezawodności:

Funkcja niezawodności $P(t)$ jest klasy NBU ⁽²⁾ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(13) \quad \forall_{x \geq 0} \forall_{y \geq 0} P(x+y) \leq P(x)P(y).$$

Funkcja niezawodności $P(t)$ jest klasy NWU ⁽³⁾ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x \geq 0} \forall_{y \geq 0} P(x+y) \geq P(x)P(y).$$

Wykładnicze funkcje niezawodności i tylko takie należą jednocześnie do obu zdefiniowanych klas NBU i NWU. Funkcja niezawodności

$$P(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \leq 0, \\ e^{-t^2} & \text{dla } t > 0 \end{cases}$$

jest przykładem funkcji niezawodności z klasy NBU. Wypukła kombinacja liniowa

$$\alpha P_{\lambda_1}(t) + (1 - \alpha)P_{\lambda_2}(t), \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

- (²) NBU jest krótkim angielskim zwrotu "New Better than Used" /nowy element lepszy od używanego/ a usprawiedliwieniem tej nazwy jest fakt, że dla $P(x) > 0$ z (13) wynika nierówność

$$\Pr \{ \xi \geq x+y \mid \xi > x \} \leq \Pr \{ \xi \geq y \}$$

a więc element, który już pracował przez czas x ma mniejsze szanse bezawaryjnej pracy w odcinku czasowym o długości y niż element świeżo włączony do eksploatacji.

- (³) NWU jest skrótem zwrotu "New Worse than Used" /nowy element gorszy od używanego/.

dwu wykładniczych funkcji niezawodności $P_{\lambda_1}(t)$ i $P_{\lambda_2}(t)$ należy do klasy NWU.

Dla funkcji niezawodności różniczkowalnych /tj. mających intensywność awarii/ przynależność do klasy NBU jest równoważna z faktem, że intensywność awarii jest funkcją niemalejącą a przynależność do klasy NWU jest równoważna z faktem, że intensywność awarii jest funkcją nierosnącą.

Empiryczne wyznaczenie funkcji niezawodności danego elementu w ustalonych warunkach eksploatacji jest na ogół trudne i wymaga kosztownych i długotrwałych badań elementów. Niekiedy jednak można łatwiej ocenić pewne parametry statystyczne interesującego nas rozkładu prawdopodobieństwa /np. średni czas bezawaryjnej pracy elementu/ a z rozważań teoretycznych można przyjąć, że funkcja niezawodności należy do jednej ze zdefiniowanych tutaj klas. W takich przypadkach można wykorzystać oszacowania funkcji niezawodności będące treścią następujących twierdzeń:

TWIERDZENIE 1. Jeżeli funkcja niezawodności $P(t)$ należy do klasy NBU i $\mu > 0$ jest średnim czasem bezawaryjnej pracy elementu

$$\mu = E(\xi) = \int_0^{\infty} P(x) dx,$$

to spełnione są nierówności

$$(14) \quad P(t) \geq \begin{cases} e^{-t/\mu} & \text{dla } t \leq \mu, \\ 0 & \text{dla } t > \mu; \end{cases}$$

$$(15) \quad P(t) \leq \begin{cases} 1 & \text{dla } t \leq \mu, \\ e^{-wt} & \text{dla } t > \mu, \end{cases}$$

gdzie $w = w(t, \mu)$ jest pierwiastkiem równania

$$\int_0^t e^{-wx} dx = \mu.$$

TWIERDZENIE 2. Jeżeli funkcja niezawodności $P(t)$ należy do klasy NWU i $\mu > 0$ jest średnim czasem bezawaryjnej pracy elementu, to dla dowolnego $t \geq 0$ spełniona jest nierówność

$$(16) \quad 0 \leq P(t) \leq \frac{\mu}{\mu + t}.$$

Oszacowanie od dołu (14) w twierdzeniu 1 zostało podane przez A.W. Marshalla i F. Proschana [8]. Oszacowanie od góry (15) w twierdzeniu 1 oraz oszacowania (16) w twierdzeniu 2 zostały znalezione przez A. Korzeniowskiego i A. Opawskiego [6]. Dowody twierdzeń są elementarne.

Teoria niezawodności zajmuje się także warunkami właściwego funkcjonowania systemów złożonych z wielu różnych elementów. Do określenia niezawodności systemu nie wystarcza znajomość niezawodności elementów składowych systemu. Potrzebne są do tego jeszcze dodatkowe informacje dwu rodzajów: o wzajemnych zależnościach między funkcjonowaniem poszczególnych elementów i o strukturze systemu.

Z matematycznego punktu widzenia najprostszy jest przypadek systemu, w którym czasy bezawaryjnej pracy wszystkich elementów składowych są niezależnymi zmiennymi losowymi. Przyjęcie takiego założenia wymaga oczywiście technicznego uzasadnienia lub empirycznego potwierdzenia przy pomocy odpowiednio zaplanowanych badań testowych.

Mówiąc o strukturze systemu mamy tu na myśli opis warunków, przy których system jest zdalny do pracy. Zakładamy tutaj, że podobnie jak każdy z elementów składowych również i system znajduje się zawsze w jednym z dwu możliwych stanów: stan sprawności i stan awarii, przy czym stan systemu jest deterministycznie wyznaczony przez stany elementów składowych. Przy tym założeniu strukturę systemu opisuje dwuwartościowa funkcja χ określona na zbiorze wszystkich podzbiorów zbioru elementów E

$$\chi : 2^E \rightarrow \{0, 1\}.$$

Dla dowolnego podzbioru $A \subset E$ równość $\chi(A) = 1$ oznacza, że system jest sprawny, jeżeli elementy należące do podzbioru A są sprawne a elementy należące do dopełnienia $\bar{A} = E \setminus A$ uległy awarii. Zerowa wartość $\chi(A) = 0$ oznacza awarię systemu, w którym elementy należące do podzbioru A i tylko te elementy są sprawne.

Dwa skrajne przypadki funkcji χ definiują najprostsze systemy:

(a) System szeregowo połączonych elementów o funkcji

$$(17) \quad \chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } A = E, \\ 0 & \text{gdy } A \neq E. \end{cases}$$

Taki system jest sprawny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego elementy są sprawne.

(b) System równolegle połączonych elementów o funkcji

$$(18) \quad \chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{gdy } A = \emptyset. \end{cases}$$

Taki system ulega awarii jedynie w przypadku awarii wszystkich jego elementów.

W przypadku niezależności funkcjonowania n elementów składowych o funkcjach niezawodności $P_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, funkcja niezawodności $P(t)$ systemu (a) jest iloczynem

$$P(t) = P_1(t)P_2(t) \dots P_n(t),$$

natomiast funkcja niezawodności systemu (b) jest dopełnieniem iloczynu dopełnień

$$P(t) = 1 - [1 - P_1(t)][1 - P_2(t)] \dots [1 - P_n(t)].$$

W wielu występujących w praktyce systemach funkcja $\chi(A)$ jest nierosnąca, to znaczy dla dowolnych podzbiorów $A_1, A_2 \subset E$ spełniony jest warunek

$$A_1 \subset A_2 \implies \chi(A_1) \geq \chi(A_2).$$

Systemy o tej własności nazywamy systemami monotonicznymi. Jeżeli monotoniczny system znajduje się w stanie awarii, to dodatkowe awarie jego elementów nie mogą przywrócić stanu sprawności systemu. Monotonicznymi są w szczególności systemy opisane funkcjami (17) i (18).

Każdy podzbiór $A \subset E$, dla którego $\chi(A) = 0$ nazywamy zbiorem krytycznym. W systemach monotonicznych każdy nadzbiór zbioru krytycznego jest również zbiorem krytycznym. Można wtedy wprowadzić interesujące pojęcie minimalnych zbiorów

krytycznych. Podzbiór $A \subset E$ elementów systemu monotonicznego nazywamy minimalnym zbiorem krytycznym wtedy i tylko wtedy, gdy:

- (i) A jest zbiorem krytycznym;
- (ii) żadnym podzbiorem właściwym zbioru A nie jest zbiorem krytycznym.

System równolegle połączonych elementów ma tylko jeden zbiór krytyczny /będący oczywiście minimalnym zbiorem krytycznym/. Jest nim zbiór wszystkich elementów E .

W systemie szeregowo połączonych elementów minimalnych zbiorów krytycznych jest tyle, ile jest elementów. Są nimi wszystkie podzbiory jednoelementowe zbioru E .

4. Teoria punktowych procesów stochastycznych

Punktowym nazywamy proces stochastyczny $X(t)$, $t \geq 0$, którego realizacje są funkcjami przedziałami stałymi, mającymi w dyskretnych punktach jednostkowe przyrosty skokowe. Proces $X(t)$ może być np. modelem matematycznym przejazdu pojazdów przez ustalony punkt obserwacyjny na drodze. $X(t)$ jest wtedy liczbą pojazdów, które minęły dany punkt od początku obserwacji ($t=0$) do momentu t . Przykład realizacji takiego procesu pokazany jest na rys. 1.

Punkty nieciągłości: τ_1, τ_2, \dots są momentami przejazdu kolejnych pojazdów przez punkt obserwacyjny. Ponieważ w punktach nieciągłości skoki są jednostkowe, więc jeśli przyjmujemy, że $X(0) = 0$, to ciąg $\{\tau_i\}$ punktów nieciągłości całkowicie wyznacza przebieg procesu. Punktowy proces stochastyczny może być również opisany przez ciąg $\{\xi_i\}$ odstępów między kolejnymi punktami nieciągłości. W omawianym tu przykładzie są to odstępy czasowe między przejazdami kolejnych pojazdów /z wyjątkiem odstępu ξ_1 między początkiem obserwacji i przejazdem pierwszego pojazdu/.

Szczególnym przypadkiem punktowego procesu stochastycznego jest proces odnowy, to jest proces, dla którego odstępy

ξ_1 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie prawdopodobieństwa⁽⁴⁾. W dalszych rozważaniach ograniczymy się właśnie do procesów odnowy i to do szczególnego przypadku takich procesów z czasem dyskretnym. Będziemy zakładali, że nieciągłości procesu $X(t)$ mogą występować tylko w punktach o odciętej całkowitej a odstępy ξ_1 mają rozkład dyskretny

$$(19) \quad p_j = \Pr \{ \xi_1 = j \}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Wygodnym narzędziem do operowania takimi rozkładami jest funkcja tworząca

$$(20) \quad \varphi(s) = E(s^{\xi_1}) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j s^j.$$

Nie będziemy tutaj przypominali własności funkcji tworzącej, bo wchodzi to w zakres kursowego wykładu rachunku prawdopodobieństwa. Chcemy natomiast pokazać na prostym przykładzie zastosowanie pomysłowej metody rozwiązywania wielu zadań /związanych nie tylko z procesami odnowy/, która polega na nadaniu funkcji tworzącej pewnej dodatkowej interpretacji oraz sprowadzeniu zadania do modelu błędzenia przypadkowego w sieci.

W przedziale $0 < s < 1$, argument funkcji tworzącej (20) może być interpretowany jako prawdopodobieństwo⁽⁵⁾. Rozważmy ciąg zdarzeń losowych $A_k, k = 1, 2, \dots$, niezależnych między so-

(4) Zrezygnujemy tutaj z nieco ogólniejszej definicji dopuszczającej odmienny rozkład pierwszego odstępu ξ_1 .

W naszym przykładzie oznacza to, że rozpoczynamy obserwację w momencie przejazdu pojazdu przez punkt obserwacyjny /pojazdu tego nie liczymy/.

(5) Szereg potęgowy w (20) jest zawsze zbieżny w przedziale $|s| \leq 1$, ale znajomość funkcji $\varphi(s)$ w dowolnym podprzedziale o dodatniej długości wyznacza jednoznacznie funkcję tworzącą w całym przedziale zbieżności.

bą a także niezależnych od przebiegu interesującego nas procesu odnowy. Zdarzenia A_k mają jednakowe prawdopodobieństwa

$$\Pr \{A_k\} = s, \quad k = 1, 2, \dots$$

Iloczyn $p_j s^j$ pod znakiem sumy (20) może więc być interpretowany jako prawdopodobieństwo, że zmienna losowa $\xi_1 = \tau_1 - \tau_{1-1}$ przyjmie wartość j a jednocześnie zrealizuje się zdarzenie

$$A_{\tau_{1-1}+1} \cap A_{\tau_{1-1}+2} \cap \dots \cap A_{\tau_1}$$

Funkcja tworząca będzie wtedy prawdopodobieństwem

$$\varphi(s) = \Pr \{A_{\tau_{1-1}+1} \cap A_{\tau_{1-1}+2} \cap \dots \cap A_{\tau_1}\}$$

realizacji odcinka ciągu zdarzeń A_k o losowym początku $\tau_{1-1}+1$ i losowej długości ξ_1 . Jeżeli wrócimy do przykładu z obserwacją pojazdów na drodze a zdarzenie A_k będziemy interpretowali jako fakt, że "w chwili $t=k$ nie nastąpi awaria urządzenia rejestrującego przejazdu", to dla ustalonego s wartość funkcji tworzącej $\varphi(s)$ będzie prawdopodobieństwem, że nie będzie awarii w całym okresie czasu między dwoma kolejnymi przejazdami pojazdów.

Sformułujemy teraz następujące zadanie. Niech $\{\tau_i\}$ będzie ciągiem momentów przejazdu pojazdów na drodze tworzącym proces odnowy o znanym rozkładzie odstępów (19). Z ciągu $\{\tau_i\}$ wybieramy podciąg $\{\omega_i\}$ momentów przejazdu pojazdów, po których następuje odstęp ξ nie krótszy niż ustalona liczba naturalna d . Takie momenty mogą nas interesować np. ze względu na możliwość przejścia pieszych przez drogę. Podciąg $\{\omega_i\}$ także tworzy proces odnowy /jeśli początek obserwacji przesuniemy do pierwszego zaobserwowanego momentu $\omega_1/$. Nowy proces odnowy nazywany jest rozrzedzeniem wyjściowego procesu. Należy znaleźć rozkład odstępów η_1 między kolejnymi punktami nieciągłości w rozrzedzonym procesie odnowy.

Niech $\psi(s)$ będzie funkcją tworzącą odstępów η_1 . Zgodnie z podaną uprzednio interpretacją funkcji tworzącej $\psi(s)$ jest /dla $0 < s < 1/$ prawdopodobieństwem nie wystąpienia a-

warii w odstępie między sąsiednimi punktami rozrzedzonego procesu odnowy. Prawdopodobieństwo to możemy obliczyć jako prawdopodobieństwo dojścia od stanu "POCZĄTEK" do stanu pochłaniającego "KONIEC" w błędzeniu przypadkowym po sieci pokazanej na rys. 2. W sieci tej jest jeszcze inny stan pochłaniający "AWARIA", a przy skierowanych łukach podane są odpowiednie prawdopodobieństwa przejścia.

Spróbujmy teraz wyjaśnić rys. 2. Jeżeli w jakiejś chwili zaobserwowaliśmy punkt ω_1 procesu rozrzedzonego, to zgodnie z jego definicją wiemy, że punkt ten pokrywa się z pewnym punktem τ_k procesu wyjściowego i odstęp $\xi_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$ jest niekrótszy niż d . Warunkowy rozkład długości tego odstępu jest dany wzorem

$$\Pr \{ \xi_{k+1} = j \mid \xi_{k+1} \geq d \} = \frac{p_j}{1 - p_d}, \quad j = d, d+1, \dots,$$

gdzie

$$p_d = \Pr \{ \xi_{k+1} < d \} = \sum_{l=1}^{d-1} p_l.$$

Prawdopodobieństwo, że do momentu τ_{k+1} nie nastąpi awaria /to jest prawdopodobieństwo przejścia od stanu 1 do stanu 2/ jest równe

$$p_{12} = \frac{1}{1 - p_d} \sum_{j=d}^{\infty} p_j s^j$$

a prawdopodobieństwo wystąpienia awarii p_{13} /to jest prawdopodobieństwo przejścia od stanu 1 do stanu 3/ jest dopełnieniem do jedności prawdopodobieństwa p_{12} .

Punkt τ_{k+1} pokrywa się z punktem ω_{1+1} procesu rozrzedzonego wtedy i tylko wtedy, gdy również następny odstęp $\xi_{k+2} = \tau_{k+2} - \tau_{k+1}$ jest niekrótszy niż d . Odpowiada temu przejście ze stanu 2 do stanu 5, a prawdopodobieństwo tego przejścia jest równe

$$p_{25} = 1 - p_d.$$

Jeżeli odstęp ξ_{k+2} jest krótszy niż d , to należy rozpatrzyć dwa możliwe przypadki:

w przedziale $(\tau_{k+1}, \tau_{k+2}]$ nie nastąpi awaria /odpowiada to przejściu ze stanu 2 do stanu 4/;

w przedziale tym nastąpi awaria /przejście ze stanu 2 do stanu 3/.

Pierwszy z tych dwu przypadków ma prawdopodobieństwo

$$P_{24} = \sum_{j=1}^{d-1} p_j s^j$$

a drugi prawdopodobieństwo

$$P_{23} = P_d - P_{24} = P_d - \sum_{j=1}^{d-1} p_j s^j.$$

Po dojściu do stanu 4 musimy badać następny odstęp między pojazdami, co odpowiada cofnięciu się do stanu 2 /z prawdopodobieństwem $p_{42} = 1/$. Dojście do stanu 5 oznacza natomiast, że osiągnęliśmy już następny punkt ω_{1+1} procesu rozrzedzonego i nie nastąpiła awaria. Stąd z prawdopodobieństwem $p_{56} = 1$ przechodzimy do interesującego nas stanu pochłaniającego "KONIEC".

Prawdopodobieństwo dojścia od stanu "POCZĄTEK" do stanu "KONIEC", czyli wartość funkcji tworzącej $\psi(s)$ odstępów między punktami procesu rozrzedzonego obliczamy z wzoru

$$\begin{aligned} \psi(s) &= p_{12} p_{25} (1 + P_{24} + P_{24}^2 + P_{24}^3 + \dots) = \\ &= \frac{p_{12} p_{25}}{1 - P_{24}} = \\ &= \frac{1}{1 - P_d} \sum_{j=d}^{\infty} p_j s^j \cdot (1 - P_d) \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{d-1} p_j s^j} = \\ &= \frac{\sum_{j=d}^{\infty} p_j s^j}{1 - \sum_{j=1}^{d-1} p_j s^j} = \end{aligned}$$

$$\varphi(s) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} p_j s^j}{1 - \sum_{j=1}^{d-1} p_j s^j}.$$

Szereg potęgowy w pierwszym wierszu powyższego rachunku odpowiada wykonaniu 0, 1, 2, 3, ... cykli 2 → 4 → 2 przed ostatecznym przejściem ze stanu 2 do stanu 5.

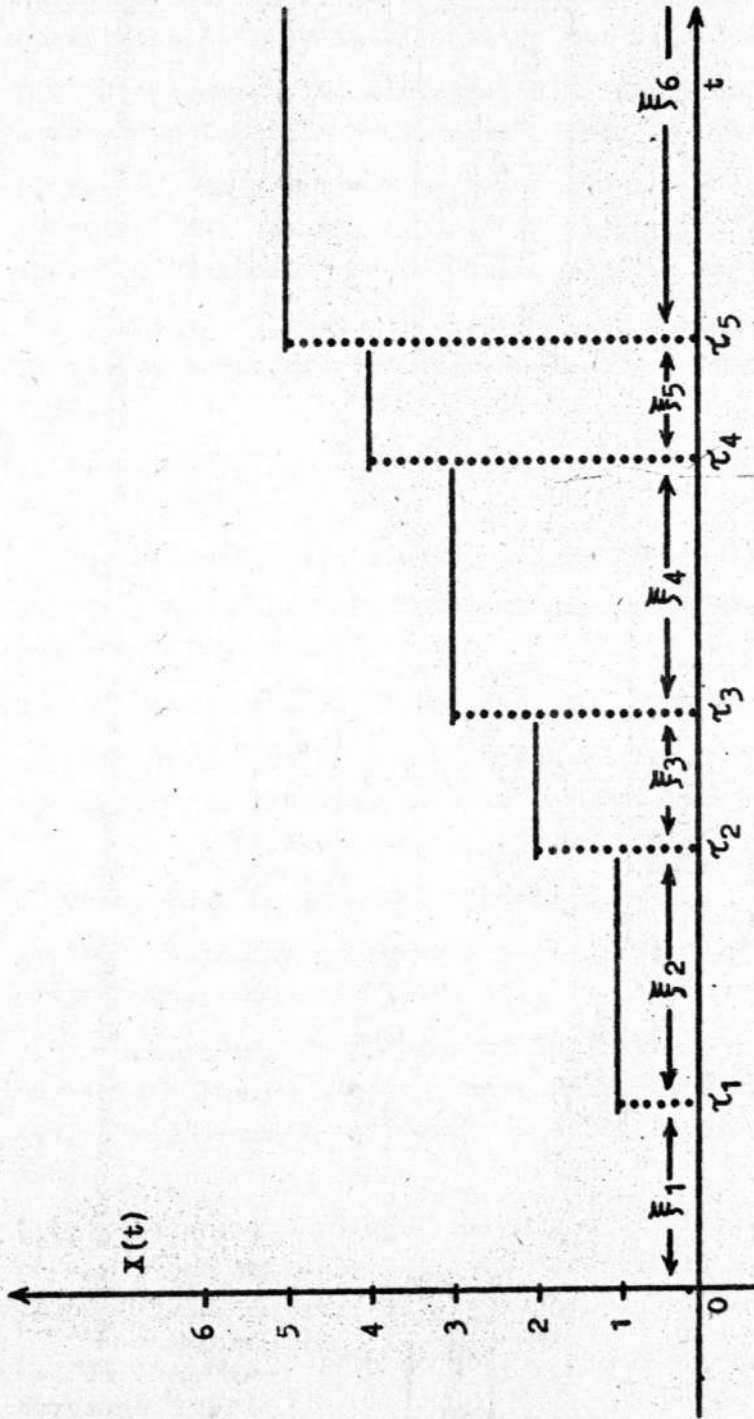
Metoda obliczania funkcji tworzących poprzez nadanie im interpretacji probabilistycznej została zastosowana po raz pierwszy przez J.T. Runnenburga [11]. Interesujące przykłady zastosowania tej metody w połączeniu z metodą graficzną błędzenia przypadkowego w sieciach zawiera książka L. Råde'go [10] o rozrzedzaniu procesów odnowy.

5. Zakończenie

Po przedstawieniu wybranych tematów z zastosowań matematyki zastanówmy się jeszcze, jakie korzyści może dać studentowi zapoznanie się ze wskazaną tu tematyką. Mówiąc o korzyściach mam tu na myśli przede wszystkim rozszerzenie i lepsze przyswojenie podstawowego materiału z kursowego wykładu rachunku prawdopodobieństwa. Jedną z trudności właściwego przyswojenia teorii jest zwykle spowodowana niedostatkami interesujących przykładów. Zazwyczaj wykład kursowy i ćwiczenia z nim związane opierają się do znudzenia na kilku podstawowych rozkładach prawdopodobieństwa. W teorii gier wprowadza się natomiast w naturalny sposób zbiór wszystkich rozkładów prawdopodobieństwa na zbiorze o skończonej liczbie elementów. W zbiorze tym szuka się rozkładów optymalnych ze względu na sformułowane kryterium /strategie optymalne/ a iteracyjna metoda przybliżona dostarcza interesujących przykładów zbieżności rozkładów prawdopodobieństwa. W teorii niezawodności występuje problem szacowania funkcji niezawodności /a więc pośrednio także dystrybuanty/ w różnych klasach rozkładów nieujemnych zmiennych losowych. Opis struktury złożonego systemu jest dobrą ilustracją konstrukcji odpo-

wiedniej przestrzeni probabilistycznej. Interesujące może być także prześledzenie podobieństw /i różnic/ między zbiorami krytycznymi w teorii niezawodności i zwycięskimi koalicjami w teorii zgromadzeń głosujących /patrz np. rozdział "Voting coalitions" w książce Kemeny'ego i współautorów [4] lub artykuł Steinera [12]/. W pokazanym fragmencie teorii procesów punktowych słuchacz oswoi się dobrze z ważnym narzędziem dyskretnego rachunku prawdopodobieństwa jakim jest funkcja tworząca. Pokazane tam metody rachunkowe pozwalają w prosty sposób rozwiązać wiele interesujących zagadnień z różnych dziedzin zastosowań.

Czytelnikowi, który chciałby bliżej zapoznać się z omawianymi tutaj teoriami mogę polecić dodatkową lekturę. W zamieszczonej niżej bibliografii zebrałem oprócz pozycji cytowanych w tekście również podstawowe pozycje książkowe. Wybierałem przy tym literaturę dostępną w języku polskim, która napisana jest w miarę przystępnie i powinna być łatwa do odszukania w krajowych bibliotekach matematycznych.



Rys. 1. Przykład realizacji punktowego procesu stochastycznego.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa, tom I /wydanie 2/ - 1966, tom II - 1969.
- [2] B.W. Gniedenko, J.K. Bielajew, A.D. Sołowiew, Metody matematyczne teorii niezawodności, PWN, Warszawa 1968.
- [3] S. Karlin, Mathematical methods and theory in games, programming, and economics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, and Pergamon Press, Reading-London-Paris, 1959.
- [4] J.G. Kemeny, J.L. Snell, G.L. Thompson, Introduction to finite mathematics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs 1957.
- [5] B. Kopociński, Zarys teorii odnowy i niezawodności, PWN, Warszawa 1973.
- [6] A. Korzeniowski, A. Opawski, Bounds for reliability in the NBU, NWU and NBUE, NWUE classes, Zastosowania matematyki 15 /1976/, str. 1-5.
- [7] R.D. Luce, H. Raiffa, Gry i decyzje, PWN, Warszawa 1964.
- [8] A.W. Marshall, F. Proschan, Classes of distributions applicable in replacement with renewal theory implications, Proc. Sixth Berkeley Symp. 1 /1970/, str. 395-415.
- [9] G. Owen, Teoria gier, PWN, Warszawa 1975.
- [10] L. Råde, Thinning of renewal point processes. A flow graph study, Göteborg 1972.
- [11] J.T. Runnenburg, On the use of the method of collective marks in queueing theory, Proc. Symp. on Congestion Theory, The University of North Carolina Press, Chapel Hill 1965.
- [12] H.G. Steiner, Examples of exercises in mathematization on the secondary school level, Educational studies in mathematics 1 /1968/, str. 181-201.
- [13] B. van der Veen, Wstęp do teorii badań operacyjnych, PWN, Warszawa 1970.
- [14] J.S. Wencel, Elementy teorii gier, PWN, Warszawa 1961.

APPLICATIONS OF THE PROBABILITY THEORY

Summary

Probability is certainly one of the chapters of mathematics which create special difficulties for both students and teachers at any level of mathematical instruction. The main source of the difficulties lies perhaps in finding appropriate probabilistic models when the theory has to be applied to practical problems. Teaching probability we may of course restrict ourselves to trivial examples and problems with coins, dices, balls and cards but then it is difficult to show the proper role and importance of the theory now widely applied in many fields of science and human activity. This significance of probability has to be understood by the teachers of mathematics. According to the new trends in mathematical education they will soon teach the elements of probability starting from junior classes of the elementary school. In this paper author wants to give examples of such topics in applied probability: the theory of strategic games, reliability and stochastic point processes; which may well illustrate the role of probability and which may be taught with reasonably simple mathematical apparatus. Those topics may be included into special courses for teachers or even presented as a additional material to more advanced students in secondary schools.

Применения теории вероятностей

Резюме

Теория вероятностей является одной из тех глав математики, которые вызывают особые затруднения как студентам, так и преподавателям на всяком уровне математической эдукации. Главная причина этих затруднений по видимому состоит в нахождении соответственных вероятностных моделей в случае попытки применения теории к решению практических задач. Преподавая теорию вероятностей можно конечно рассматривать только тривиальные примеры с монетами, игральными костями, шарами в урне и колонами карт, но тогда теряется особая роль и значение теории, которая сегодня успешно применяется в многих науках и полях деятельности человека. Значение теории вероятностей должно стать известным учителям математики так как согласно новым тенденциям математического образования они скоро будут преподавать элементы вероятности начиная с первых классов начальной школы. В настоящей статье автор хочет привести примеры таких направлений применяемой теории вероятностей: стратегические игры, надежность, точечные стохастические процессы; которые могут указать роль этой теории и которые можно изложить употребляя сравнительно простой математический аппарат. Эти проблемы легко включить в программу специального курса для учителей, а даже использовать как дополнительный материал для отличившихся учеников средней школы.