ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1980 z. 2

Adam Płocki
WSP Kraków

CO Z RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA DLA UCZNIA? JAKI RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA DLA NAUCZYCIELA?

1. Wprowadzenie

Od kilku lat rachunek prawdopodobieństwa stał się integralną częścią matematyki wyższej w wykładzie uniwersyteckim. Wykład rachunku prawdopodobieństwa wszedł jako obowiązkowy na kierunku nauczycielskim w uniwersytetach i w wyższych szkołach pedagogicznych. Prawie równocześnie rachunek prawdopodobieństwa stał się fragmentem szkolnej matematyki.

Probabilistyka weszła do polskiej szkoły stosunkowo późno. Późno, bo dopiero w drugiej połowie XX wieku. Było oczywiste, że trudno będzie sobie wyobrazić nowoczesną szkołę z nowoczesnym programem matematyki bez rachunku prawdopodobieństwa.

Program matematyki przewidział na realizację haseł probabilistycznych ostatnią klasę liceum i technikum, a więc i z tego powodu rachunek prawdopodobieństwa pojawił się w szkole stosunkowo późno.

Nauczyciele nie byli w należyty sposób przygotowani do nauczania rachunku prawdopodobieństwa. Trudno się temu dziwić. Większość z nich nigdy w trakcie swoich studiów probabilistyki nie spotkała. Pierwsze lekcje z rachunku prawdopodobieństwa w szkole były często pierwszym spotkaniem z problemami probabilistycznymi zarówno dla ucznia, jak i dla jego nauczyciela.

Nauczanie arytmetyki, algebry, geometrii czy nawet analizy nie napotyka na tak specyficzne trudności, jakie towarzyszą nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa. Brak doświadczenia w nauczaniu probabilistyki na poziomie szkolnym, brak wypracowanych koncepcji dydaktycznych, a przede wszystkim brak podstaw intuicyjnych ucznia - to główne powody tego, że obecna koncepcja szkolnej probabilistyki nie zdała w praktyce egzaminu.

Rachunek prawdopodobieństwa wszedł do szkoły jako prawie oddzielny przedmiot, z oddzielnym podręcznikiem, w którym zaprezentowano materiał w prawie do perfekcji sformalizowanej postaci, jako fragment teorii miary.

Młodzież nie lubi rachunku prawdopodobieństwa. Probabilistyka w obecnym kształcie stała się dla ucznia abstrakcyjną, niestrawną i powszechnie nielubianą dziedziną dziwnej, nietypowej matematyki. Świadczą o tym egzaminy wstępne na wyższe uczelnie. Reakcja absolwenta obecnej szkoły średniej na najbardziej nawet banalny problem probabilistyczny postawiony przy egzaminie wstępnym daje wiele do myślenia. Zadań z rachunku prawdopodobieństwa najczęściej nawet nie próbuje się przy tym egzaminie rozwiązywać.

Co jest powodem takiego stanu rzeczy?

Pewną teorię można w trakcie nauczania narzucić, jako teorię aksjomatyczną. Tak właśnie zrobiono w szkole z rachunkiem prawdopodobieństwa. Ów rachunek miał stać się w ten sposób kolejnym po geometrii przykładem teorii zbudowanej na podstawach aksjomatycznych. Ponieważ sensowna dyskusja nad aksjomatyczną konstrukcją danej teorii jest możliwa dopiero na późnym etapie nauczania, zatem miejscem na lekcje z rachunku prawdopodobieństwa stała się dopiero ostatnia klasa liceum.

Czy jednak takie umiejscowienie rachunku prawdopodobieństwa w szkole pozwala na taką dyskusję? Spójrzmy, jak wygląda sytuacja w przypadku geometrii. Od wczesnych klas szkoły podstawowej uczeń spotykał problemy geometryczne, mierzył, rysował, konstruował, obserwował i opisywał różne twory geometryczne. Przez te długie lata kształcono intuicje geometryczne ucznia. Uczeń przez te - czasem bardzo luźne - kontakty z geometrią nabywał "ogładę geometryczną". Szkoła przez te kontakty "wychowywała go geometrycznie".

Rachunek prawdopodobieństwa pojawił się w szkole nagle /bez wcześniejszych luźnych kontaktów z problemami probabilistycznymi/ w postaci teorii sformalizowanej. Nauczanie probabilistyki, której brak podstaw intuicyjnych spowodowało trudności, jakich nie zna nauczanie żadnego innego fragmentu matematyki.

Nauczanie rachunku prawdopodobieństwa wg obecnej koncepcji realizowanej w liceum dałoby właściwy efekt, gdyby poprzedzało je wcześniejsze spotykanie problemów probabilistycznych już od klasy IV szkoły podstawowej począwszy. Aksjomaty byłyby wówczas naturalnymi dla ucznia wnioskami z czynionych wcześniej spekulacji myślowych, eksperymentów, dociekań i obserwacji.

Warto tu podkreślić, że zgodnie z najnowszymi tendencjami dydaktyków rachunku prawdopodobieństwa, formalizację probabilistyki w szkole należy uznać za rzecz drugorzędną. O wiele ważniejsze znaczenie przypisuje się kształceniu intuicji probabilistycznej.

2. Od kiedy i jaka probabilistyka w szkole?

Z uwagi na specyfikę rachunku prawdopodobieństwa jego nauczanie nie jest łatwe. W nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa uczestniczy inny typ myślenia od tego, do jakiego przywykliśmy i jaki z powodzeniem stosujemy przy nauce innych fragmentów matematyki. Cała szkolna wiedza skierowana jest w przeszłość. Rachunek prawdopodobieństwa przestawia myślenie ucznia w kierunku przyszłości.

Naukę rachunku prawdopodobieństwa można rozpoczynać już w klasie IV szkoły podstawowej. Obserwacja zjawisk natury losowej w otaczającej ucznia rzeczywistości, proste gry losowe pozwolą uczniowi poprzez zabawę i rozrywkę dostrzegać problemy probabilistyczne. Na tym etapie wystarcza porównywanie szans zajścia różnych zdarzeń. Tym pierwszym spotkaniom ucznia z probabilistyką powinny towarzyszyć doświadczenia probabilistycznie równoważne. Użycie tu kostek, rulek i urn z kulami, bądź krążkami zachowujących się tak samo pozwoli wydobywać ze zjawisk losowych ich istotę. Rzut monetą, rzut kostką, w której trzy ścianki są białe, a trzy czarne, obserwacja, czy przychodzące na świat dziecko jest chłopcem, czy dziewczynką - to przykłady takich właśnie doświadczeń równoważnych probabilistycznie.

Ogromnie ważną rolę w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa odgrywa symulacja probabilistyczna. Spośród wielu jej form najbardziej znaną jest czytanie z tablic liczb losowych. W początkowym okresie nauczania wystarczą zestawy liczb losowych, które skonstruuje sobie uczeń sam z pomocą np. dwudziestościanu foremnego, z odpowiednio ponumerowanymi ściankami /cyframi 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9/. Później fragment tablicy liczb losowych cytowany z gotowych tablic liczb losowych powinien stanowić nieodłączną pomoc na lekcjach matematyki, tak, jak linijka, czy cyrkiel.

Symulacja z pomocą liczb losowych pozwoli nie tylko zastępować jedne doświadczenia innymi /np. wielokrotny rzut monetą czytaniem kolejnych cyfr losowych z tablicy liczb losowych i interpretowanie cyfry parzystej jako orła, nieparzystej - jako reszki/, z pomocą symulacji będziemy szacować szanse zajścia pewnych zjawisk, będziemy symulować losowe, nietendencyjne rozmieszczenie elementów w pewnych komórkach /szufladach/, czy też w sposób nietendencyjny pobierać próbę reprezentatywną z danej populacji skończonej.

Warto tu przytoczyć kilka konkretnych przykładów, które scharakteryzują typ problemów omawianych w szkole z użyciem symulacji.

Przykład 1. Weźmy prostą grę losową. Rysunek 1 przedstawia bieżnię, na której z udziałem przypadku /a ściślej: pewnej próby Bernoulliego/ odbywać się będą wyścigi. Niech dwa postawione na starcie pionki warcabowe oznaczają dwu ścigają-

	M e t a		
	3	3	
	2	2	
	1	1	
M	Start		J

Rys. 1

cych się biegaczy. Niech to będzie Jaś i Małgosia.

Jaką próbę Bernoulliego użyć do tych wyścigów? Propozycje mogą wyjść od ucznia. Oto przykład jednej: Z okna klasy widać kiosk Ruchu. Raz kupującym jest mężczyzna, innym razem kobieta. Kolejni klienci podchodzą do kiosku zupełnie przypadkowo. Przyjmijmy, że gdy kupuje w kiosku kobieta - to krok w kierunku mety robi Małgosia, gdy jest to mężczyzna - robi to Jaś.

Aby nie biegać od okna do planszy z bieżnią można najpierw zarejestrować ciąg /i to długi!/ kolejnych klientów tego kiosku. Rejestrujmy: 1 - gdy jest to mężczyzna, 0 - gdy jest to kobieta. Tak oto uczeń otrzyma pierwszy zestaw liczb losowych o bazie 0-1 /niejednorodnych/. Ciąg ten pozwoli na kilkakrotne powtórzenie tej gry. Przypuśćmy, że dostaliśmy ciąg 1110100001100001101100100. Ten ciąg - to jakby pierwszy tablica liczb losowych wygenerowana przez podchodzących do kiosku klientów.

Rozszyfrowanie tego, jak toczyć się będzie ów wyścig, gdy cyfry 0 i 1 tak oto w sposób przypadkowy pojawiały się jedna za drugą, da ciekawy sposób zakodowania przebiegu tej gry oraz jej wyników.

Ponieważ trudno zbadać zwyczaje i "charakter" tak powstającego ciągu cyfr losowych użyjmy teraz do gry monety.

Niech orzeł oznacza 0, reszka - to 1. Zwyczaje tak powstającego ciągu zer i jedynek uczeń z łatwością dostrzeże. Ten bieg /tę grę/ uczeń uzna za sprawiedliwą.

W grupach dwuosobowych można - rzucając taką samą monetą - powtórzyć tę grę wiele razy. Na podstawie tak otrzymanej dużej liczby wyników można dokonać prób szacowania szansy wygrania biegu przez każdego z zawodników. Miarą tej szansy będzie odpowiednia frakcja.

Łatwo teraz rozstrzygać inne problemy natury kombinatorycznej, takie np. jak: na ile różnych sposobów może toczyć się ów wyścig? Jak długo trwa w każdym przypadku ten bieg? /Warto założyć, że kolejne próby wykonywane są w kolejnych jednostkach czasu, czas jako parametr powinien towarzyszyć doświadczeniom od samego początku nauki. Doświadczenia stają się wówczas prostymi procesami stochastycznymi/.

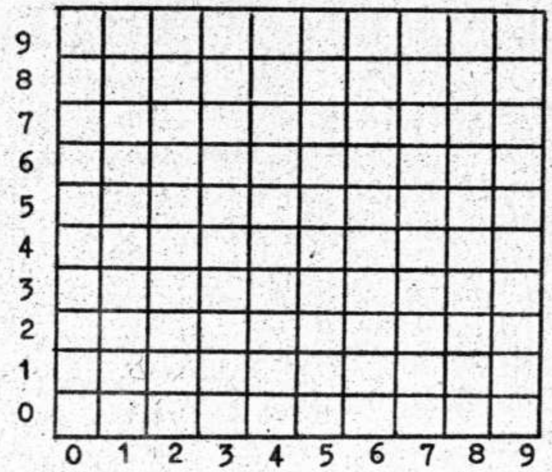
Przypisywanie każdemu wynikowi tego biegu czasu jego trwania - to prosty przykład zmiennej losowej będącej tzw. czasem błądzenia przypadkowego. Szacowanie średniego czasu trwania tej gry za pomocą średniej arytmetycznej tak otrzymanych w klasie wyników pozwoli wprowadzić ucznia w trudne, a jakże ważne pojęcie nadziei matematycznej.

Przykład 2. Siedmiu myśliwych udało się na polowanie na kaczki. Ukazało się stado 6 kaczek. Każdy z myśliwych upatrzył jedną, do której wystrzelił /zakładamy, że jest to dobry strzelec/. Myśliwi nie zdołają ustalać, który do której kaczki celuje, zatem niektóre z kaczek mogą ujść cało, inne zostać trafione kilkakrotnie. Polowanie to można symulować siedmiokrotnym rzutem kostką sześcienną. Ponumerowawszy kaczki a także myśliwych możemy traktować liczbę oczek otrzymaną w k-tym rzucie /k=1,2,3,4,5,6,7/ jako kaczkę, do której celuje k-ty myśliwy. Wielokrotne powtarzanie siedmiokrotnego rzucania kostką do gry da wyniki wielu powtórzeń tego polowania. Problemy, które można z pomocą otrzymanego drogą symulacji materiału rozstrzygać - to: ocena szansy trafienia w konkretną kaczkę, problem średniej liczby kaczek, które przeżyją, ocena szansy wybrania przez wszystkich myśliwych tej samej kaczki itd.

Przykład 3. W kawał ciasta wsypano bakalie, a wśród nich 100 rodzynków i po dokładnym wymieszaniu upieczono zeń 100 babek. Rodzynki trafiały w poszczególne babki przypadkowo. Interesujące wydaje się oszacowanie rozkładu liczby rodzynków w tych babkach. Wypiek, o którym tu mowa można symulować z pomocą tablic liczb losowych. Liczby losowe wygenerują przypadkowe rozmieszczenie stu rodzynków w stu babkach. Babki można zakodować parami ze zbioru

$$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\} \times \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} .$$

Zbiór ten można przedstawić geometrycznie tak, jak na rys.2.



Rys. 2

Otwórzmy tablice liczb losowych i zaczynając czytanie kolejnych cyfr od dowolnej kolumny i dowolnego wiersza, łączmy kolejne cyfry w pary. Para cyfr ij niechaj oznacza, że w babkę o współrzędnych ij trafia rodzynek /i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9/. Czytanie stu kolejnych par jest symulacją losowego rozmieszczenia stu rodzynków w stu babkach. Powtarzanie takiej symulacji w grupach uczniowskich pozwoli dostrzec pewną prawidłowość rozkładu liczby rodzynków w babkach. Z pomocą tego materiału można szacować prawdopodobieństwo, że babka z takiego wypieku będzie babką bez rodzynków, z jednym, dwoma, z co najmniej trzema rodzynkami itd.

Przykład 4. Partia 2000 telewizorów powinna zostać dokładnie przebadana pod względem jakości. Babanie całej partii jest niewskazane /bo czasochłonne i zbyt kosztowne/. Pojawia się problem, jak w sposób nietendencyjny pobrać z tej partii towaru próbę 50 sztuk, które to sztuki poddane zostaną dokładnej kontroli. Nietendencyjność wyboru tych 50 sztuk pozwala uznać tę próbę za "podobną" do całej partii towaru. Losowy wybór 50 elementowej próby wygeneruje symulacja z pomocą tablic liczb losowych. Ponumerujmy telewizory od 0000 do 1999. Z tablic liczb losowych czytajmy cyfry losowe blokami czterocyfrowymi, skreśliwszy te czwórki, które rozpoczyna cyfra większa od 1. Otrzymane tą drogą czwórki - to numery telewizorów, które zostają wybrane do szczegółowej kontroli. Czytanie kontynuujemy do momentu otrzymania 50 różnych lub nie w zależności od tego, czy chodzi o pobieranie bez zwracania, czy też ze zwracaniem, czwórek takich cyfr losowych.

Wydaje się być ważnym z dydaktycznego punktu widzenia problem oceny przypadkowości, nietendencyjności pobierania w inny sposób próby. Oto konkretny przykład takiej oceny:

Należy dokonać weryfikacji zasadności przydziału stypendiów studentom na danym wydziale. Szczegółowe sprawdzenie dokumentacji ma dotyczyć 30 % przypadkowo wybranych studentów. Zaproponowano następujący sposób pobierania tej 30 % próby: Jeśli dany rocznik liczy 100 studentów wybierze się teczki 30 pierwszych wg alfabetu studentów. Pytanie - czy jest to rzeczywiście wybór nietendencyjny? Uczeń powinien dostrzegać mankamenty takiego pobierania. Komisja przyznająca stypendia mogła to robić wg kolejności alfabetycznej. Przy pierwszych pobieranych wg alfabetu dokumentach przeglądała dokumentację skrupulatnie i świadczenia przyznawała zgodnie z przepisami. Stopniowo jednak z powodu wielu przyczyn /np. zmęczenia!?/ następne teczki z dokumentami przeglądane były mniej dokładnie.

Nietrudno o inne przykłady pobierania próby, które wydają się być nietendencyjne, choć takimi w rzeczywistości nie są. Umiejętność oceny przypadkowości wyboru - to ważny fragment kształtowania probabilistycznej ogłady ucznia.

Ważne dla kształcenia intuicji probabilistycznej ucznia są te fragmenty symulacji, które są bliskie problemom ucznia, a więc np. sprawa szacowania pól różnorakich figur płaskich, tzw. metodą Monte Carlo. Sporządzony przez ucznia kwadrat jednostkowy /np. na papierze milimetrowym/ z narzuconą nań "chmurką punktów losowych" może służyć - podobnie jak linijka - do wymierzania pól figur płaskich zawartych w tym kwadracie /a umieszczonych np. na przezroczystej foli, którą można na ów kwadrat nakładać/. Chmurka np. 300 punktów rzuconych na ów kwadrat z pomocą tablic liczb losowych pozwala na stosunkowo dobre oszacowanie nie tylko pola figury, ale także liczby π. Pozwoli na to oszacowanie użycie koła o środku w środku tego kwadratu i promieniu $\frac{1}{2}$.

Od początków obcowania ucznia z doświadczeniami losowymi należy używać do opisu przebiegu tych doświadczeń drzewek.

Drzewka te można traktować później jako labirynty. Przebieg doświadczenia interpretuje się wówczas jako błądzenie przypadkowe po tymże drzewku-labiryncie od startu, do któregoś z jego wierzchołków, na którym "wisi"(niby owoc) zakodowany w specyficzny sposób wynik tego doświadczenia.

Błądzenia przypadkowe, jako specyficzne przykłady doświadczeń, odgrywają w nauce rachunku prawdopodobieństwa ogromną rolę. Błądzeniami przypadkowymi są - tak przecież bliskie uczniowi - gry losowe. Przy grze w Chińczyka pionek gracza przemieszcza się z jednego pola w inne w zależności od przypadku.

Dyskusja nad prostymi błądzeniami przypadkowymi pozwala wprowadzać prosty algorytm służący do znajdowania wartości prawdopodobieństwa dla zdarzeń związanych z przestrzeniami dyskretnymi /co najwyżej przeliczalnymi/. Algorytm ten stanowi istotę abaku probabilistycznego Engla. Bez tego abaku trudno dziś wyobrazić sobie nowoczesny program szkolnej probabilistyki.

Użycie drzewek i zajmowanie się błądzeniami przypadkowymi i abakiem w początkach nauczania rachunku prawdopodobieństwa pozwala omawiać już bardzo wcześnie, tak zdawałoby się na pozór trudne schematy doświadczalne, jak schemat Bernoulliego, jak powtarzanie danej próby Bernoulliego do momentu pierwszego zajścia sukcesu itd. Schemat Bernoulliego staje się przy odpowiedniej interpretacji błądzeniem przypadkowym po labiryncie będącym kopią deski Galtona.

Zmienna losowa może /i powinna!/ towarzyszyć na lekcji rachunku prawdopodobieństwa od samych początków. Zmienna losowa - jako prosty i naturalny sposób kodowania wyników danego doświadczenia z pomocą liczb - powinna być w nauce o funkcji ciekawym przykładem funkcji o wartościach liczbowych.

Wygrana w grze, w której zdobywa się, lub przegrywa punkty, liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego, czas trwania błądzenia przypadkowego, czas oczekiwania na pierwszy sukces, liczba sztuk wadliwych w próbie - to naturalne przykłady zmiennych losowych, które powinien uwzględniać szkolny rachunek prawdopodobieństwa.

Czas oczekiwania na pierwszy sukces - to zmienna losowa o nieskończonym zbiorze wartości. Wprowadzenie przestrzeni przeliczalnych w szkole bezpośrednio po wprowadzeniu w analizie ciągów nieskończonych należy uważać za wręcz konieczne.

Przestrzenie nieskończone spotyka uczeń wokół siebie zbyt często, by je zlekceważyć. Wiadomości z teorii ciągów nieskończonych pozwolą jednocześnie na wykorzystanie ciekawego aparatu matematycznego do rozwiązywania problemów probabilistycznych. Przestrzenie przeliczalne dadzą okazję do podkreślenia na lekcji naturalnej korelacji wielu dziedzin matematyki.

Fragmenty teorii estymacji, takie, jak np. szacowanie liczebności populacji dzikich zwierząt żyjących na wolności metodą pojmanie-uwalnianie Lincolna /próba losowana bez zwracania/, czy szacowanie liczby sztuk wadliwych w partii towaru metodą największej wiarogodności /próba losowana ze zwracaniem/, proste przykłady weryfikowania hipotez statystycznych /np. budowa testu weryfikującego hipotezę, że prawdopodobieństwo wyrzucenia konkretną kostką sześcienną ścianki z sześcioma oczkami wynosi $\frac{1}{6}$/ - oto hasła, które mogą znaleźć się także w programie szkolnego rachunku prawdopodobieństwa, niekoniecznie w programie przeznaczonym na lekcję, ale np. w programie zajęć ze zdolnym uczniem, w programie zajęć fakultatywnych lub kółka matematycznego.

3. Co w programie dla nauczyciela? Jaka literatura probabilistyczna dla nauczyciela?

Po kilku latach obecności wykładów z probabilistyki na sekcji nauczycielskiej bardzo interesujące wydają się być następujące problemy:

a/ Czy koncepcja tego wykładu pomogła późniejszemu nauczycielowi w prowadzeniu lekcji z rachunku prawdopodobieństwa w szkole, a także w pracy z uczniem zdolnym, a więc w pracy na zajęciach fakultatywnych, czy też na kółku matematycznym?

b/ Czy wykład ten przygotował go należycie do trudnego zadania, jakim stało się nauczanie rachunku prawdopodobieństwa w jego obecnym kształcie?

c/ Czy wykład ten dostarczył przyszłemu nauczycielowi wystarczająco wielu przykładów problemów probabilistycznych ważnych z praktycznego punktu widzenia, a ciekawych z punktu widzenia matematyki? Czy na wykładzie tym znalazła się okazja do podkreślenia kiedy i jak można kształtować intuicje probabilistyczne. Doświadczenie pokazuje, że ludziom brak tego typu intuicji. Szacowanie "na oko" okazuje się często zdumiewająco błędne. Czy było w tym wykładzie miejsce na omówienie typowych pomocy naukowych, na zwracanie uwagi na typowe błędy towarzyszące nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa na każdym etapie?

d/ Czy przygotowano specjalnie adresowaną do nauczyciela literaturę probabilistyczną?
Czy nauczyciel znajdzie obecnie w witrynach księgarskich literaturę probabilistyczną specjalnie do niego adresowaną?
Czy są dla niego specjalnie napisane książki z rachunku prawdopodobieństwa, książki, które uwzględniałyby specyfikę jego zawodu i wszelkie trudności typowe dla dydaktyki rachunku prawdopodobieństwa?

Odpowiedź ze strony środowiska nauczycielskiego na takie i im podobne pytania będzie na pewno nie bez znaczenia przy układaniu nowej koncepcji wykładu rachunku prawdopodobieństwa dla nauczyciela.

Obecny program wykładu probabilistyki na sekcji nauczycielskiej uniwersytetów i wyższych szkół pedagogicznych niewiele różni się od programu dla matematyków teoretyków, czy nawet inżynierów, bądź ekonomistów. Jest tam miejsce na procesy stochastyczne i funkcje charakterystyczne, ale brakło go na tak ważne dla nauczyciela hasła, jak liczby losowe, symulacja probabilistyczna, błądzenia przypadkowe, gry losowe itp.

Wiele książek z rachunku prawdopodobieństwa (różnych co do treści i rozmaitych co do interpretacji tych treści) jest obecnie dostępnych dla nauczyciela. Żadna jednak z nich nie jest książką, na jaką liczy, na jaką czeka nauczyciel matematyki. Brak w tych książkach przede wszystkim komentarza na temat trudności w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa, na temat specyficznych błędów towarzyszących uczeniu i nauczaniu probabilistyki na każdym etapie, brak wzmianki o ewentualnych pomocach naukowych, brak wszelkich notek natury dydaktycznej.

Nauczyciel w żadnej z dostępnych mu książek w języku polskim nie znajdzie nic na temat różnorakich form symulacji i jej roli kształcącej. Brak w tej literaturze tematyki opracowanej pod kątem szkoły, brak propozycji tematów na zajęcia z uczniem zdolnym i zainteresowanym rachunkiem prawdopodobieństwa. Brak w obecnej literaturze probabilistycznej haseł komentowanych pod kątem zajęć szkolnego kółka matematycznego. Rachunek prawdopodobieństwa dostarcza na tego typu zajęcia z uczniem, wielu ciekawych tematów, jak choćby łańcuchy Markowa, teoria estymacji, błądzenia losowe itp. Zestaw przystępnie opracowanych fragmentów zastosowań rachunku prawdopodobieństwa w praktyce /w biologii, fizyce, językoznawstwie, socjologii, astronomii itp./ stanowiłby cykl - jakże pięknych - tematów dla kółka matematycznego. Trzeba krótkiej rozmowy z nauczycielem matematyki by się przekonać jaki ogromny głód panuje obecnie na taką literaturę z tematyką problemów nadających się do realizacji na kółku.

Zarówno koncepcja programu, jak i koncepcja podręcznika dla nauczyciela musi się zasadniczo różnić od koncepcji wykładu i podręcznika dla inżyniera, ekonomisty, czy nawet matematyka-teoretyka. Inne są bowiem potrzeby, inna tematyka interesuje każdego z nich. Nauczycielowi nie wystarczy kurs rachunku prawdopodobieństwa, w którym to kursie pozna mnóstwo definicji i twierdzeń ułożonych w poprawną pod względem formalnym teorię matematyczną. Nauczyciel musi każdą z tych definicji umieć zilustrować ciekawym, prostym - acz niebanalnym przykładem. Dla każdego wprowadzonego twierdzenia musi mieć argumentację, po co to twierdzenie zostało wprowadzone. Wszelkie wzory musi umieć uzasadnić rozumowaniem nadającym się w większości przypadków do powtórzenia w szkole. Nauczycielowi nie wystarcza podanie gotowych wzorów i recept postępowania, które to wzory i recepty będzie powielał, jak to często robi inżynier, rolnik, czy ekonomista i statystyk w swej pracy zawodowej, zupełnie nie potrzebując dla nich uzasadnienia.

Ilustracje i przykłady muszą dotyczyć konkretnych problemów wziętych z otaczającej nas rzeczywistości. Inaczej rachunek prawdopodobieństwa w szkole nie znajdzie uzasadnienia swej racji bytu w programie szkolnej matematyki. Właśnie na przykładzie rachunku prawdopodobieństwa ma nauczyciel przekonywać ucznia co matematyka naprawdę jest warta.

W obecnej literaturze probabilistycznej przeważająca większość problemów i zadań dotyczy stereotypowych rzutów kostkami i losowań kul, względnie kart. Językiem tych rzutów i losowań kometuje się cały prawie materiał zawarty w programie. Zlekceważona została w ten sposób ogromna rola probabilistyki w rozwiązywaniu problemów natury praktycznej.

Nauczaniu każdego fragmentu matematyki - zwłaszcza w szkole - winna towarzyszyć świadomość, że jest to matematyka nie tylko piękna, ale i użyteczna.

Jasno i wyraźnie powinno się podkreślać w nauce rachunku prawdopodobieństwa, że rzuty i losowania - to tylko proste modele zjawisk losowych bardziej skomplikowanych, ale ważniejszych z praktycznego punktu widzenia.

Problem dziedziczności dla cech podlegających prawom

Mendla - to jeden z przykładów zastosowań metod probabilistycznych w rozwiązywaniu problemów z genetyki oraz przykład na to, jak skomplikowane zjawisko dziedziczenia można zmodelować za pomocą losowań i rzutów. Przy tym modelowaniu znajduje się prosty sposób konstrukcji systemu probabilistycznego opisującego losowe kojarzenie, efektem którego jest ukonstytuowanie się genotypu potomka.

Populacja matek i ojców - to dwie urny z trzema gatunkami krążków. Geny z tej samej pary alleli oznaczmy tą samą literą, jeden literą dużą, drugi literą małą. Genotyp osobnika - to jakby krążek, który zachowuje się jak symetryczna moneta. Każda ze stron owego krążka - to jeden z genów wchodzących w skład genotypu danego osobnika. W urnach są zatem krążki z literą A na obu stronach, bądź z literą a na każdej ze stron, bądź wreszcie krążki, których jedna strona zawiera literę A, druga - literę a /geny A i a stanowią tu parę alleli/. Krążki te można oznaczyć odpowiednio AA, aa i Aa.

Wylosowany krążek z urny-populacji matek jest genotypem losowo wybranej matki do kojarzenia. Podobnie - wylosowany krążek z populacji-urny ojców jest genotypem wylosowanego do kojarzenia ojca. Wylosowana para krążków - to para rodziców /dokładnie ich genotypów!/ przypadkowo dobranych do kojarzenia.

Rzucanie każdym z tych krążków jak monetą - to losowanie genu, który każdy z rodziców przekaże potomkowi. Ten wylosowany gen - to ten, który widnieje na górnej ściance wyrzuconego krążka. Zlepianie krążków ściankami, którymi one upadły na dół daje w efekcie genotyp potomka ukształtowanego poprzez takie losowe kojarzenie. Taki model - przystępny dla ucznia - pozwala znajdować prawdopodobieństwa, z jakimi - przy odpowiednich założeniach eliminujących selekcję i mutację - losowo wybrany osobnik pokolenia potomków rodziców danej populacji mieć będzie odpowiednio genotyp AA, Aa, aa. Łatwo tym samym wykazać prawdziwość znanego prawa Hardy'ego-Weinberga.

Ciekawej matematyki należy szukać w otaczającej nas rzeczywistości. Rachunek prawdopodobieństwa dostarcza znakomitych okazji do tego typu poszukiwań. Zarówno program probabilistyki na sekcji nauczycielskiej, jak i książka z rachunku prawdopodobieństwa dla nauczyciela powinny to uwzględniać.

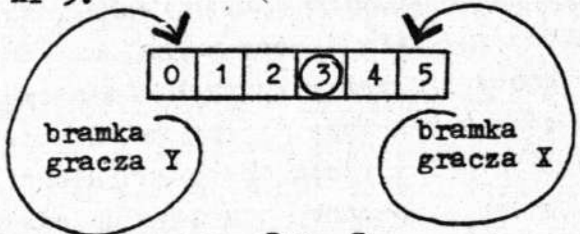
Należy wątpić, czy absolwent obecnej szkoły średniej miał okazję w szkole /na lekcji, czy na zajęciach pozalekcyjnych/ poznać choćby fragmenty ważnych zastosować rachunku prawdopodobieństwa w praktyce. A czy świadom jest tychże zastosowań probabilistyki w życiu absolwent sekcji nauczycielskiej po wykładach z rachunku prawdopodobieństwa w uniwersytecie, względnie w wyższej szkole pedagogicznej?

W obecnym kształcie zarówno szkolnej, jak i uniwersyteckiej probabilistyki /wykładanej wg programu i literatury obowiązującej na specjalności nauczycielskiej/ zbagatelizowano także ogromny aparat matematyczny, jaki towarzyszy wszelkim dociekaniom w rachunku prawdopodobieństwa. To wina przede wszystkim literatury, w której brak tzw. zadań otwartych, zadań, w których bardzo wiele ciekawej, różnorodnej matematyki. W zbiorach zadań prezentuje się z uporem godnym lepszej sprawy zadania, w których występują wyłącznie wzory kombinatoryczne. W tych zadaniach po prostu tylko się rzuca kostkami i losuje kule z urn. Znajomość kilku wzorów wystarcza do rozwiązania większości z tych zadań.

Wykład i książka z probabilistyki dla nauczyciela ma dostarczyć przyszłemu nauczycielowi przykładów zadań, ciekawych z matematycznego punktu widzenia. Nie ma drugiego działu matematyki, w którym w sposób tak bardzo naturalny ingerowałaby cała prawie matematyka. Takich przykładów zadań otwartych potrzebuje nauczyciel. Takich zadań powinien ten nauczyciel doszukać się w specjalnie do niego adresowanej literaturze z rachunku prawdopodobieństwa. Takie zadania nie interesują inżyniera, są bez większego znaczenia dla ekonomisty i innych, którzy korzystają w swej pracy z rachunku prawdopodobieństwa.

Oto jeden przykład takiego zadania otwartego.

Na rys. 3 przedstawione jest boisko, na którym rozgrywać się będzie mecz pomiędzy dwiema drużynami. Rolę tych drużyn może pełnić dwu graczy. Nazwijmy ich X i Y. Rolę piłki niech pełni pionek warcabowy. Pole nr 0 - to bramka Y-ka, pole nr 5 - to bramka X-sa. Załóżmy, że na starcie piłka stoi w polu nr 3.

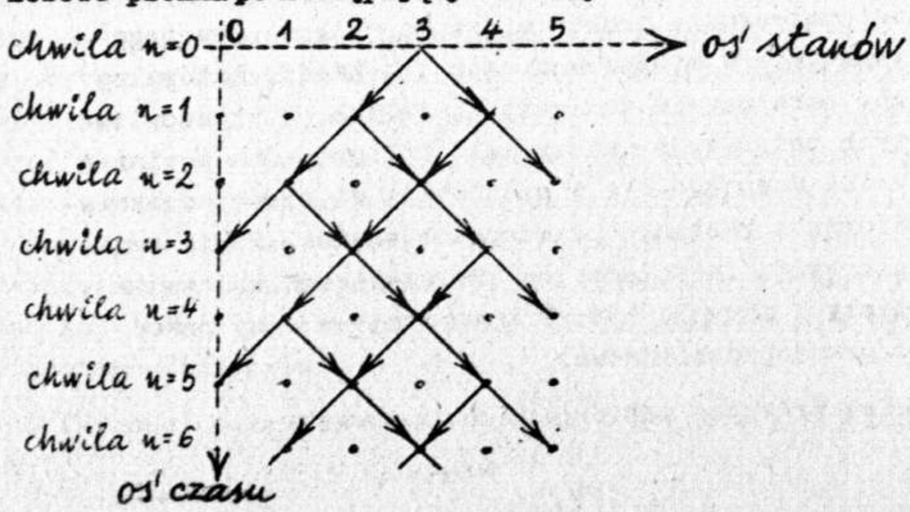


Rys. 3

Wynik pewnej próby Bernoulliego niech decyduje o tym, w które z sąsiednich pól przemieści się piłka. Przejmijmy terminologię od gracza Y. Sukcesem nazwijmy ten wynik, który decyduje o przemieszczeniu się piłki w sąsiednie pole na prawo. Oznaczmy przez p i q odpowiednio prawdopodobieństwo sukcesu i porażki /$p + q = 1$ oraz $0<p<1$/. Mecz kończy się dotarciem piłki do jednej z bramek /a więc golem/. Gdy pionek-piłka dotrze do bramki Y - to wygrywa gracz X i na odwrót.

Warto sałożyć, że kolejne próby wykonywane są w kolejnych jednostkach czasu, np. w minutach. Mech, o którym tu mowa stanie się prostym przykładem procesu stochastycznego.

Ruch piłki po boisku można zinterpretować jako błądzenie losowe pionka po następującym labiryncie:



Dotarcie do punktu na prostej $x = 5$ - to wygrana gracza Y. Gdy pionek dotrze do któregokolwiek punktu na prostej $x = 0$ - wygrywa gracz X. Każdy mecz można w sposób jednoznaczny zakodować odpowiednią trasą w labiryncie, albo - co na jedno wychodzi - pewnym ciągiem sukcesów i porażek.

Każdemu meczowi, a więc wynikowi pewnego doświadczenia losowego wieloetapowego można przypisać czas jego trwania.

Zadanie można uogólnić. Niech boisko ma $m+1$ pól, a start niech rozpoczyna się z pola nr k $/0<k<m/$. Zapytajmy o prawdopodobieństwo zdarzenia W_k, że gracz Y wygra, a także o prawdopodobieństwo zdarzenia R_k, że gracz ten przegra ów mecz. Prawdopodobieństwa te zależą od pola startowego. Oznaczmy

$$p_k = P(W_k) \text{ oraz } q_k = P(R_k).$$

Niech A_1 oznacza zdarzenie, że pierwsza próba zakończyła się sukcesem, A_2 - zdarzenie, że pierwsza próba dała w wyniku porażkę. Jest $A_1 \cup A_2$ zdarzeniem pewnym oraz $A_1 \cap A_2$ - zdarzeniem niemożliwym. Wreszcie - wobec założeń - $P(A_1)$ i $P(A_2)$ są dodatnie.

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym wynika, że

$$P(W_k) = P(A_1)P(W_k|A_1) + P(A_2)P(W_k|A_2),$$

co przy przyjętych oznaczeniach oznacza, że zachodzi związek:

$$/1/ \qquad p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}.$$

Wydaje się być naturalne przyjęcie warunków brzegowych

$$/2/ \qquad p_0 = 0 \quad \text{i} \quad p_m = 1.$$

Problem sprowadzony został do rozwiązania prostego równania funkcyjnego /1/ przy zadanych warunkach brzegowych /2/. Poszukiwaną funkcją jest ciąg $p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_m$.

Niech najpierw $p = q = \frac{1}{2}$. Próbą Bernoulliego jest wówczas np. rzut monetą. Równanie /1/ przyjmuje wtedy postać

$$/3/ \qquad p_k = \frac{1}{2}\left(p_{k+1} + p_{k-1}\right).$$

Związek /3/ orzeka, że poszukiwany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Znany jest jego wyraz pierwszy /to p_0/ oraz $(m+1)$-szy /to p_m/. Wiadomości ucznia o ciągach arytmetycznych pozwalają na wyznaczenie przepisu na p_k.

Niech teraz $p \neq q$. Ponieważ $p + q = 1$, zatem mamy

$$(p + q)p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1},$$

skąd dostajemy, że

$$\frac{p_k - p_{k-1}}{p_{k+1} - p_k} = \frac{p}{q} .$$

Przyjmując ozaczenia $a_k = p_k - p_{k-1}$ i biorąc pod uwagę, że p i q - to stałe, dostajemy, iż

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_m \text{ - to ciąg geometryczny.}$$

Z własności ciągów geometrycznych dostajemy wzór na p_k i q_k.

Interpretując ten mecz, jako błądzenie przypadkowe po labiryncie pojawiają się problemy kombinatoryczne. Łatwo z labiryntu odczytać na ile sposobów możliwa jest wygrana każdego z graczy po n minutach. Uczeń spotka tu znany trójkąt Pascala. Liczby tras prowadzących w danej chwili do kolejnych punktów labiryntu tworzą do pewnego n znany uczniowi trójkąt Pascala. Od pewnego n trójkąt ten zostaje obcięty i w pewien sposób degenerowany.

Nie jest to pełna lista problemów, które towarzyszą temu jednemu tylko zadaniu.

Zadanie to jest okazją do spotkania prostego łańcucha Markowa. Przy analizowaniu problemu wygranej i przegranej w języku łańcuchów Markowa pojawiają się ciekawe problemy algebraiczne, takie jak mnożenie wektora przez macierz, znajdowanie wektora niezmienniczego, a więc rozwiązywanie układów równań liniowych itp.

Rachunek prawdopodobieństwa jest integralną częścią współczesnej matematyki. I szkolny rachunek prawdopodobieństwa powinien być razem z geometrią, arytmetyką, algebrą i analizą stopiony w jedną szkolną matematykę. Problemy probabilistyczne powinny być w sposób naturalny związane z problemami analizy, algebry i geometrii. Już obecne wykłady na specjalności nauczycielskiej powinny przyszłemu nauczycielowi ten fakt uprzytamniać. Rachunek prawdopodobieństwa nie powinien być przecież w szkole oddzielnym przedmiotem matematycznym i to z oddzielnym podręcznikiem.

Oto lista wniosków, jakimi wypada podsumować niniejsze rozważania:

a/ Rachunek prawdopodobieństwa może i powinien znaleźć się w szkole o wiele wcześniej, niż ma to obecnie miejsce. Te wczesne, bo już od lat 10-11, spotkania ucznia z problemami probabilistycznymi mają kształtować intuicje probabilistyczne ucznia.

b/ Przy każdej okazji trzeba podkreślać naturalny związek rachunku prawdopodobieństwa z resztą matematyki.

c/ Wskazywać trzeba w kursie probabilistyki dla przyszłego nauczyciela a także na lekcjach z rachunku prawdopodobieństwa w szkole ogromny związek probabilistyki z rzeczywistością, jej rolę w rozwiązywaniu tylu problemów praktycznych /i to tak różnorodnych/.

d/ Nie lekceważyć ani w wykładzie na sekcji nauczycielskiej, a tym bardziej na lekcji w szkole ogromnej roli kształcącej symulacji probabilistycznej. Wykorzystać różnorakie gry losowe, które dostarczają wielu problemów matematycznych.

e/ Podkreślać przy każdej okazji jak to skomplikowane procesy losowe można modelować z pomocą rzutów i losowań.

f/ Formalizacja szkolnego rachunku prawdopodobieństwa może się odbyć dopiero po wieloletnich, luźnych kontaktach ucznia z problemami probabilistycznymi.

g/ Wykład z rachunku prawdopodobieństwa powinien - przynajmniej w początkowej jego fazie - być prowadzony pod kątem takich właśnie luźnych, intuicyjnych rozważań i dociekań o charakterze probabilistycznym. Rachunek prawdopodobieństwa - z uwagi na specyfikę probabilistyki i specyfikę zawodu nauczycielskiego - mógłby być na studiach na sekcji nauczycielskiej tym fragmentem matematyki wyższej, którego wykład jest prowadzony "trochę mniej ściśle" niż analiza czy algebra. Ta rezygnacja ze zbytniej pedantyczności w wykładzie probabilistyki wyszłaby na pewno na korzyść właściwemu zrozumieniu jej istoty, istoty jej specyficznych metod i jej znaczenia.

h/ W tematyce zadań i problemów wykorzystać okazję do systematyzowania i integrowania wiadomości z całej matematyki. To ważne dla nauczyciela i dla szkoły.

i/ Wypracowanie ciekawej tematyki do pracy ze zdolnym uczniem, a więc tematyki zajęć fakultatywnych i zajęć kółka matematycznego o profilu probabilistycznym wydaje się być obecnie sprawą pilną.

j/ Pilną staje się potrzeba dostosowania programu z rachunku prawdopodobieństwa na sekcji nauczycielskiej do potrzeb nauczyciela i szkoły. Brak w tym programie haseł, które dla szkoły są szczególnie ważne, zwłaszcza brak haseł, które sprzyjają kształceniu intuicji probabilistycznej.

k/ Pilną staje się potrzeba wypracowania dydaktyki rachunku prawdopodobieństwa.

l/ Brak odpowiedniej, adresowanej przede wszystkim do nauczyciela literatury probabilistycznej - to jeden z powodów obecnego stanu rachunku prawdopodobieństwa w szkole.

PROBABILITY THEORY FOR PUPIL AND TEACHER

Summary

This paper analises the specific difficulties which arise in the teaching of the theory of probability in secon-

dary schools, and presents the problems of probability which according to the author should be taught in schools and should form a part of the calculus of probability syllabus for mathematics students in the teacher training groups in universities and in higher schools of education.

Объём знаний по теории вероятностей для учеников и объём знаний для учителей

Содержание

Преподавание теории вероятностей в школе имеет ряд специфических трудностей. В данной работе анализируются причины этих трудностей. В статье предлагается ряд проблем, которые по мнению автора должны стать содержанием обучения теории вероятностей в школе, а также проблемы по теории вероятностей для студентов математики на секции учителей в университетах и в высших педагогических школах.