ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Problemy Matematyczne 1980 z. 2

Stanisław Fudali
Uniwersytet Wrocławski

# ZWIĄZKI MIĘDZY WYKŁADEM ALGEBRY LINIOWEJ A WYKŁADEM ANALIZY MATEMATYCZNEJ NA KIERUNKU NAUCZYCIELSKIM

Związek wykładu algebry liniowej z wykładem analizy matematycznej na kierunku nauczycielskim nie jest związkiem w pełni wzajemnym, ale w pewnym sensie ukierunkowanym, od algebry w stronę analizy. Mam tu na myśli fakt przejawiania się pojęć jednego przedmiotu w materiale nauczania drugiego. Wykład algebry liniowej można bowiem prowadzić w sposób prawie zupełnie zadowalający bez odwoływania się do pojęć analizy. Natomiast wykład analizy unikający pojęć i metod algebry liniowej byłby nieco sztuczny, trudniejszy dla wykładającego, nie zawsze w pełni zrozumiały dla słuchającego, a ponadto chyba nie spełniałby w pełni swojego zadania.

Ten nie całkiem wzajemny związek algebry i analizy znajduje swój wyraz w programach nauczania tych przedmiotów. W celach nauczania algebry liniowej, mówi się: "pożądane jest ilustrowanie omawianego materiału przykładami z analizy matematycznej". Natomiast w programie analizy czytamy: "wybór materiału pozwala na uwypuklenie związku analizy z innymi działami matematyki, takimi jak algebra, geometria", etc. W treściach nauczania, oczywiście, nie wskazuje się tych partii materiału, które mogłyby lub powinny by być powiązane z innym przedmiotem. Chcę przeto wskazać na niektóre zagadnienia analizy, mogące stanowić ilustrację pojęć algebry, a także na pojęcia algebry liniowej przejawiające się i wykorzystywane w wykładzie analizy.

Przy okazji wprowadzania pojęcia przestrzeni liniowej zwykle mówimy o przestrzeni R(R) jako ważnym przykładzie. Warto dodać przy tym, że ważność ta wypływa z faktu, iż jest to przestrzeń liczb rzeczywistych, na której bazuje analiza. Wszystko, co dzieje się w analizie w zakresie funkcji jednej zmiennej, dzieje się właśnie w tej przestrzeni. Podobną uwagę można zrobić o przestrzeni C(C) liczb zespolonych, a także o produkcie n egzemplarzy przestrzeni R(R) .

Trudniejsza do gruntownego objaśnienia byłaby, na przykład, uwaga o zbiorze funkcyj ciągłych określonych na przedziale $\langle a,b \rangle$, oczywiście, z odpowiednimi działaniami, jako przestrzeni liniowej. Trudność związana jest nie z pojęciem funkcji ciągłej ani z pojęciem działań w zbiorze takich funkcyj, bo to studenci powinni w jakimś stopniu wynieść ze szkoły średniej. Trudne na tym etapie, a nawet niemożliwe, jest wskazanie bazy tej przestrzeni. Niemniej napomknięcie o przestrzeni funkcyj ciągłych na przedziale, jako przykładzie przestrzeni liniowej, z zasygnalizowaniem wskazanych trudności, wydaje mi się pożyteczne, bo może stanowić zaczyn określonego myślenia u studentów i kojarzenia ze sobą pojęć algebry i analizy. Zwłaszcza, gdy na tym tle wskażemy na przestrzeń wielomianów stopnia n, o której z obowiązku mówimy, i o której można wszystko do końca opowiedzieć i uzasadnić.

Podając rozmaite przykłady przekształcenia liniowego dobrze jest wskazać, że różniczkowanie, a także całkowanie, jest operacją liniową na przestrzeni funkcyj różniczkowalnych, względnie całkowalnych. Pojęcie przekształcenia liniowego w wykładzie algebry pojawia się na ogół wcześniej niż różniczkowanie i całkowanie w wykładzie analizy, ale o różniczkowaniu i całkowaniu studenci mają jakie takie pojęcie. Na pewno jest to niezbyt wyraziste pojęcie, bo tylko takie, jakie wyniesione zostało ze szkoły, ale nawet taka znajomość wystarczy do zilustrowania przekształcenia liniowego. Wskazane jest, aby w wykładzie analizy w odpowiednim czasie zwrócić uwagę na to, że różniczkowanie i całkowanie są operacjami liniowymi.

Wprowadzając pojęcie przestrzeni metrycznej jako przestrzeni liniowej z funkcjonałem dwuliniowym, symetrycznym i nieosobliwym, dobrze jest zwrócić uwagę na fakt, że w wykładzie analizy pojęcie przestrzeni metrycznej wprowadza się nieco inaczej za pomocą nieujemnej symetrycznej funkcji dwóch zmiennych spełniającej warunek trójkąta. Ustalenie związku między pojęciem przestrzeni metrycznej w algebrze i w analizie jest trochę kłopotliwe i chyba, ze względu na ograniczony czas, trudne do zrealizowania w wykładzie zarówno jednego jak i drugiego przedmiotu. Zasygnalizowanie wskazanego faktu, z jakąś zachętą do przemyślenia przez studentów, jest dydaktycznie celowe, bo może stanowić zaczyn jakichś przemyśliwań, z czasem być może twórczych. Gdy czas pozwoli można to zrobić na ćwiczeniach.

To byłyby, z grubsza biorąc, wszystkie "analityczne wycieczki" w wykładzie algebry liniowej. Są to uzupełnienia, a ściślej - ilustracje, wykładu algebry i nie przyczyniają się w zasadzie do łatwiejszego opanowania algebry przez studentów ani nie stanowią ułatwienia w prowadzeniu wykładu. Nie należy jednak unikać tych dygresyj analitycznych, bo występowanie ich w wykładzie algebry przeszkadza w "szufladkowaniu" wiedzy przez studenta, a tym samym wpływa na wzrost poziomu ogólnego wykształcenia matematycznego.

Zjawiskiem, które powszechnie można zaobserwować, a szczególnie na kierunkach nauczycielskich, gdzie mimo wszystkich wysiłków rekrutacja dokonuje się przez negatywną selekcję, jest nieumiejętność globalnego przyswajania wiedzy matematycznej, czyli właśnie "szufladkowanie" poznawanego materiału. Dla przeciętnego studenta na przykład, operacja liniowa pozostaje pojęciem algebry liniowej, a różniczkowanie - pojęciem wybitnie analitycznym, bez związku jednego z drugim. Student uczy się bowiem "do algebry" i uczy się "do analizy", a jeżeli nawet uczy się algebry i uczy się analizy, to najczęściej każdego przedmiotu z osobna i nad związkami między nimi zastanawia się tylko bardziej rozgarnięty albo ten, któremu myśl o takim związku się podsunie. Uważam, że naszym zadaniem, zarówno na wykładzie jak i na ćwiczeniach, jest podsuwanie takich myśli, nie tylko zresztą w relacji algebra-analiza, ale i w innych też. Wykształcenie matematyczne naszych absolwentów, a przynajmniej ich części, będzie wówczas pełniejsze, absolwenci będą mogli lepiej widzieć M a t e m a t y k ę (przez duże M), a nie zlepek przedmiotów matematycznych nazywany "matematyką", a w konsekwencji lepsza powinna stać się ich działalność zawodowa, o co nam wszystkim szczególnie chodzi.

Elementy algebry liniowej w wykładzie analizy, jak już wspomniałem, odgrywają inną rolę. Nie stanowią ilustracji pojęć analizy, ale stają się tłem, na którym specjalizuje się określone pojęcie tego przedmiotu. Tak będzie z pojęciem przestrzeni, a także z różniczkowaniem i całkowaniem jako przekształceniem liniowym. Ale gdy mówi się o wektorze stycznym do powierzchni bądź o hiperpłaszczyźnie stycznej do rozmaitości, to znane już z algebry pojęcie kombinacji liniowej jest konkretnym instrumentem, którym posługuje się analityk. I nie jest dobrze z dydaktycznego punktu widzenia, gdy w wykładzie analizy przy tej okazji zaczynamy opowiadać o kombinacji liniowej wektorów, o liniowej zależności i niezależności. Należy bowiem przypomnieć tutaj te pojęcia, ale wyraźnie powoływać się na algebrę, aby w umysłach studentów nie powstały (bo i to się zdarza u niektórych) odrębne pojęcia liniowej zależności w algebrze i odrębne w analizie.

Prowadząc wykład funkcji wielu zmiennych w duchu książki R. Sikorskiego jest szczególnie dużo okazji do wykorzystania aparatu algebraicznego, a wykład tego rozdziału prowadzony tradycyjnie też nie musi unikać pojęć algebry liniowej. Przy wprowadzaniu pochodnej kierunkowej wykorzystuje się pojęcie przestrzeni liniowej przejawiające się w traktowaniu punktów przestrzeni jako końców wektorów o początku w punkcie odniesienia układu współrzędnych. Zakładana liniowość zbioru pochodnych kierunkowych w punkcie (liniowość względem kierunku różniczkowania) pozwala wprowadzić pojęcie pochodnej, czyli gradientu funkcji. Pierwsza pochodna, czyli gradient, funkcji jest wektorem, druga pochodna jest macierzą, pochodne wyższych rzędów są macierzami wielowskaźnikowymi. Różniczka funkcji jest formą liniową, różniczki wyższych rzędów są formami odpowiedniego stopnia. Aparat algebraiczny jest tu szeroko reprezentowany i z powodzeniem dość mocno wykorzystywany; nawet nieco wykracza poza materiał wykładany na I roku w ramach algebry liniowej (macierze wielowskaźnikowe). Nie służy tutaj do ilustracji pojęć, ale do wykrywania własności, bądź do ich uzasadniania. To samo, i w takim samym stopniu, można zauważyć w różniczkowaniu odwzorowań.

Ten rozdział wykładu analizy, mimo swojej atrakcyjności, nie może stanowić ilustracji w wykładzie algebry, bo z reguły jest realizowany już po wykładzie algebry liniowej. Algebraik nie może się nim posłużyć w tym celu, bo byłby zupełnie niezrozumiały.

Aparat algebry liniowej okazuje się bardzo pomocny również w wykładzie różniczkowych równań liniowych. Jest on tam wprost nieodzowny do pełnego zrozumienia wykładanych zagadnień. Liniowa niezależność szczególnych rozwiązań równania, znikanie wrońskianu, rozwiązanie ogólne równania jako kombinacja liniowa niezależnych liniowo rozwiązań szczególnych - są pojęciami analizy, w których nie tylko metoda, ale i terminologia algebry liniowej stosowana jest bez większych zmian. Pojęcie układu fundamentalnego rozwiązań równania, wyznaczanie rozwiązania odpowiadającego zespolonemu pierwiastkowi równania charakterystycznego, wyznaczanie rozwiązania ogólnego równania niejednorodnego - są to pojęcia i metody przeniesione wprost z algebry. Gdyby nie te metody i pojęcia, to teoria rozwiązania równania liniowego o stałych współczynnikach byłaby trudna do wyłożenia i do zrozumienia. Można śmiało powiedzieć, że teoria różniczkowych równań liniowych jest jednym z rozbudowanych zastosowań algebraicznej teorii układu równań liniowych. Z faktu tego algebraik nie może zrobić większego użytku z takiego samego powodu, o jakim była mowa przy okazji funkcji wielu zmiennych. Jednakże przy okazji omawiania metod rozwiązywania układu równań liniowych napomknienie o tym, że cała niemal ta teoria, w nieco zmienionym aspekcie, pojawi się w analizie przy okazji równań różniczkowych, nie byłaby pozbawiona sensu. Prawdopodobnie część studentów odniosłaby z tego jakiś pożytek.

Wykładając liniowe równania różniczkowe czy też funkcje wielu zmiennych nie wystarczy wskazać lub w odpowiednim miejscu powołać się na algebrę liniową, ale należy przypomnieć coś niecoś w szczegółach z teorii algebraicznej, i to w języku algebry, aby u słuchaczy nastąpiło skojarzenie treści analitycznych z pojęciami algebraicznymi, aby powołanie się na algebrę odniosło pożądany skutek. Student słuchając wykładu z równań różniczkowych czy z funkcji wielu zmiennnych jest już po egzaminie z algebry liniowej i przeważnie przemiot ten w jego świadomości jest przesunięty na dalszy plan jako sprawa już załatwiona. Napomknienie odsyłające ogólnie do algebry ześlizgnie się gdzieś w kanałach ogólnej świadomości i nie wywoła oczekiwanej reakcji. Parę potrzebnych szczegółów, czasem może już częściowo zapomnianych, pozwoli wywołać w świadomości pewien niepokój, obudzić uśpione komórki pamięci i zawarte w nich informacje skojarzyć z nowo poznanymi faktami.

## LES RELATIONS ENTRE LES COURS D'ALGÈBRE LINÉAIRE ET LES COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE À LA DIRECTION DE MAÎTRE


### Résumé

Dans cet article l'auteur montres les relations entre les contenus des cours d'algèbre linéaire et d'analyse mathématique, en parcourant les contanus des programmes.