D. Nowicka (Bydgoszcz)

О решении некоторой системы сингулярных интегральных уравнений с интегралом Хадамарда .

1. К. Винер в публикациях [1] и [2] рассматривал сингулярные интегральные уравнения, с рядом особенности $\geqslant 1$ при чем, эти особенности находились на берегу промежутка интегрирования.

Используя понятие несобственного интеграла в смысле Хадамарда обобщил он определение Эйлеровых интегралов на отрицательные значения параметров и за одном получил следующие формулы:

$$\Gamma(-n-\alpha)=(-1)^{n+1}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma^{-1}(n+\alpha+1)$$

$$(0<\alpha<1, \quad n=0,1,\ldots,) \tag{1.1}$$

$$\Gamma(-n)=(-1)^{n}[n!]^{-1}\left\{\Gamma'(1)+\beta_n\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{-1}\right\}$$

$$(n=0,1,\ldots, \quad \beta_0=0, \quad \beta_n=1 \quad \text{для } n=1,2,\ldots,) \tag{1.2}$$

$$(-n)\Gamma(-n)=\Gamma(-n+1)+(-1)^{n-1}[n!]^{-1} \quad \text{где } n=0,1,\ldots,) \tag{1.3}$$

Благодаря этому, ему удалось предотавить методами классического анализа решения некоторых типов сингулярных интегральных уравнений в замкнутом виде.

Для уравнения:

$$\Gamma\int_a^x (x-t)^{-\kappa-\alpha}\varphi(t)\,dt = (x-a)^{-l-\beta}, \text{ где } a < x \leqslant b,$$

$$0<\alpha,\beta<1\ ,\quad \kappa, l = 0,1\ ,\ \ldots,\quad \alpha\neq\beta \text{ для } \kappa\leqslant l \tag{1.4}$$

получил он в работе [1] следующее решение:

$$\varphi(x) = \Gamma(1-l-\beta)\Gamma^{-1}(1-\kappa-\alpha)\Gamma^{-1}(\kappa+\alpha-l-\beta)$$

$$(x-a)^{\kappa+\alpha-l-\beta-1} + \sum_{\nu=2}^{N} c_\nu (x-a)^{\kappa+\alpha-\nu};$$

где $2\leqslant N<\infty$; c_ν - произвольные постоянные. (1.5)

2. Рассмотрим некоторую систему n интегральных уравнений, которая при $n = 1$ сводится к уравнению (1.4):

$$\Gamma\int_a^x \left[(x-t)^{-\kappa-\alpha-i-j}\right]_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}} \left[\varphi_j(t)\right]_{j\leqslant n}\,dt$$

$$= \left[(x-a)^{-l-\beta-i-1}\right]_{i\leqslant n} \tag{2.1}$$

где $\kappa, l = -2, -1, \ldots,\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,$

$\kappa - l + n \leqslant 0$ если $\alpha\neq\beta$ (2,2)

При $z > a$ из (2.1) следует, что

$$ {}^{\Gamma}\!\int_a^z \left[(z-x)^{k+\alpha+n+i-1}\,\delta_{ri}\right]_{\substack{r<n\\ i<n}} dx\; {}^{\Gamma}\!\int_a^x \left[(x-t)^{-k-\alpha-i-j}\right]_{\substack{i<n\\ j<n}} \left[\varphi_j(t)\right]_{j<n} dt = $$

$$ = {}^{\Gamma}\!\int_a^z \left[(z-x)^{k+\alpha+n+i-1}\,\delta_{ri}\right]_{\substack{r<n\\ i<n}} \left[(x-a)^{-l-\beta-i-1}\right]_{i<n} dx \qquad (2.3) $$

(δ_{ri} - обозначает символ Кронекера).

Отсюда на основании формулы о преобразовании Дирихлета получаем, что

$$ {}^{\Gamma}\!\int_a^z \left\{ {}^{\Gamma}\!\int_t^z \left[(z-x)^{k+\alpha+n+i-1}\,\delta_{ri}\right]_{\substack{r<n\\ i<n}} \left[(x-t)^{-k-\ -i-j}\right]_{\substack{i<n\\ j<n}} dx \right\} \left[\varphi_j(t)\right]_{j<n} dt $$

$$ {}^{\Gamma}\!\int_a^z \left[(z-x)^{k+\alpha+n+i-1}(x-a)^{-l-\beta-i-1}\right]_{i<n} dx \qquad (2.4) $$

$$ {}^{\Gamma}\!\int_a^z \; {}^{\Gamma}\!\int_t^z \left[(z-x)^{k+\alpha+n+i-1}(x-t)^{-k-\alpha-i-j}\right]_{\substack{i<n\\ j<n}} dx \left[\varphi_j(t)\right]_{j<n} dx = $$

$$ {}^{\Gamma}\!\int_a^z \left[(z-x)^{k+\alpha+n+i-1}(x-a)^{-l-\beta-i-1}\right]_{i<n} dx \qquad (2.5) $$

При (1.4) и (2.2) получаем

$$ {}^{\Gamma}\!\int_a^z \left[\Gamma(k+\alpha+n+i)\,\Gamma(-k-\alpha-i-j+1)\,\Gamma^{-1}(n-j+1)\right. $$

$$\cdot\left[(z-t)^{n-j}\right]_{\substack{i<n\\ j<n}} \cdot \left[\varphi_j(t)\right]_{j<n} \, dt = \Big[\Gamma(+\kappa+\alpha+n+i)$$

$$\Gamma(-l-\beta-i)\Gamma^{-1}(\kappa+\alpha-l-\beta+n)\,.\,(z-a)^{\kappa+\alpha-l-\beta+n-1}\Big]_{i<n} \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что

$$\left[\Gamma(\kappa+\alpha+n+i)\Gamma(-\kappa-\alpha-i-j+1)\Gamma^{-1}(n-j+1)\right]_{\substack{i<n\\ j<n}}$$

$$\int_a^z\left[(z-t)^{n-j}\,.\quad \varphi_j(t)\right]_{j<n} dt = \Big[\Gamma(\kappa+\alpha+n+i)$$

$$\Gamma(-l-\beta-i)\Gamma^{-1}(\kappa+\alpha-l-\beta+n)(z-a)^{\kappa+\alpha-l-\beta+n-1}\Big]_{i<n}\,. \tag{2.7}$$

Используя свойства детерминантов и Эйлеровых интегралов нетрудно проверить, что

$$\det\left[\Gamma(\kappa+\alpha+n+i)\Gamma(-\kappa-\alpha-i-j+1)\Gamma^{-1}(n-j+1)\right]_{\substack{i<n\\ j<n}} =$$

$$= \prod_{r=1}^{n}(r-1)!(-1)^{\kappa+\alpha+r}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma^{-1}(n-r+1)\,,$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\kappa = -2-1, 0, \ldots,$ $\quad 0<\alpha<1$ (2.8)

а также, что

$$\det\Big[\Gamma(\kappa+\alpha+n+i)\Gamma(-\kappa-\alpha-i-j+1)\Gamma^{-1}(n-j+1)$$

для $j\neq r\ \wedge$

$$\wedge\ \Gamma(\kappa+\alpha+n+i)\Gamma(-l-\beta-i)\Gamma^{-1}(\kappa+\alpha-l-\beta+n)$$

$$(z-a)^{\kappa+\alpha-l-\beta+n-1} \quad \text{для } j=r\Big]_{\substack{i<n\\ j<n}} =$$

$$= \Gamma(-l-\beta-n)\prod_{s=1}^{n}(k+\alpha+n+s)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{n}\Gamma(-k-\alpha-n-s+1)$$

$$\Gamma^{-1}(k+\alpha-l-\beta+n)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{n}\Gamma^{-1}(n-s+1)(z-a)^{k+\alpha-l-\beta+n-1}.$$

$$\mathcal{T}_r^n \tag{2.9}$$

где

$$\mathcal{T}_r^n = \Big((-l-\beta-n-1)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{n}(-k-\alpha-n-s)\Big)^{-1}\det\Big[\prod_{s=0}^{n-u}(-k-\alpha-n-v+ \atop v\neq r$$

$$+s)\wedge\prod_{s=0}^{n-u}(-l-\beta-n+s-1)_{v=r}\Big]_{\substack{u<n\\ v<n}}, \quad \text{для } k,l=-2,-1,\ldots,$$

$$0<\alpha,\beta<1, \quad \text{и} \quad z>a \tag{2.10}$$

Следовательно получаем

$$\int_a^z\Big[(z-t)^{n-j}\varphi_j(t)\Big]_{j<n}dt = \Big[\Gamma(-l-\beta-n)\Gamma(n-j+1)$$

$$\Gamma^{-1}(k+\alpha-l-\beta+n)\Gamma^{-1}(-k-\alpha-n-j+1).$$

$$.(z-a)^{k+\alpha-l-\beta+n-1}\ .\ \mathcal{T}_j^n\cdot(\mathcal{O}^n)^{-1}\Big]_{j<n} \tag{2.11}$$

где $\mathcal{T}_j^n$ определено в (2.10) и

$$\mathcal{O}^n = \Big(\prod_{v=1}^{n}(-k-\alpha-n-v)\Big)^{-1}\det\Big[\prod_{s=0}^{n-u}(-k-\alpha-n-v+s)\Big]_{\substack{u<n\\ v<n}} \tag{2.12}$$

Пользуясь формулой Коши получаем

$$\Big[\Gamma(n-j+1)\underbrace{\int_a^z dt\ldots\int_a^z}_{(n-j+1)}\varphi_j(t)\,dt\Big]_{j<n} = \Big[\Gamma(n-j+1)\Gamma(-l-\beta-n)$$

$$\Gamma^{-1}(k+\alpha-l-\beta+n)\Gamma^{-1}(-k-\alpha-n-j+1).(z-a)^{k+\alpha-l-\beta+n-1}.$$

$$\cdot\, \mathcal{B}_j^n \cdot (\mathfrak{A}^n)^{-1} \Big]_{j<n} \tag{2.13}$$

где $\mathfrak{A}^n$, $\mathcal{B}_j^n$ определены в (2.10) и (2.12)

Для матрицы $A(t) = \left[a_{ij} \quad (t) \right]_{\substack{i<n \\ j<n}}$ такой, что для всех $i, j = 1,2,\dots n$, существуют

$$\frac{d^{n-i+1} a_{ij} \; (t)}{dt}$$

определим следующую матрицу

$$\frac{d^{\downarrow} A \; (t)}{dt} = \left[\frac{d^{n-i+1} a_{ij} \; (t)}{dt} \right]_{\substack{i<n \\ j<n}} \tag{2.14}$$

Непосредственно из этого определения получаем равенство

$$\frac{d^{\downarrow} \left[a_{ij} \; (t) \right]_{\substack{i<n \\ j<n}}}{dt} = \frac{d^{\downarrow} \left[c_{ij} \; (t) \right]_{\substack{i<n \\ j<n}}}{dt} \quad \text{если}$$

$$\left[a_{ij} \; (t) \right]_{\substack{i<n \\ j<n}} = \left[c_{ij} \; (t) \right]_{\substack{i<n \\ j<n}} \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что

$$\left[\varphi_j \; (z) \right]_{j<n} = \Big[\Gamma(-l-\beta-n)\Gamma^{-1}(\kappa+\alpha-l-\beta+j-1)$$

$$\Gamma^{-1}(-\kappa-\alpha-n-j+1) \cdot (z-a)^{\kappa+\alpha-l-\beta+j-2}\, \mathcal{B}_j^n \cdot$$

$$\cdot\, (\mathfrak{A}^n)^{-1} \Big]_{j<n} \tag{2.16}$$

Используя свойства интеграла Хадамарда легко доказать, что

$$\Gamma\!\int_a^x \left[(x-t)^{-\kappa-\alpha-i-j}\right]_{\substack{i<n\\ j<n}} \left[\lambda_j (t-a)^{\kappa+\alpha+j-r}\right]_{j<n} dt = \left[0\right]_{i<n}$$

где $0<\alpha<1$, $r = 1,2,\ldots,$ $\kappa = -2,-1,\ldots,$

и λ_j - произвольные постоянные. (2.17)

Таким образом справедлива ТЕОРЕМА:

Интегральное уравнение

$$\Gamma\!\int_a^x \left[(x-t)^{-\kappa-\alpha-i-j}\right]_{\substack{i<n\\ j<n}} \left[\varphi_j(t)\right]_{j<n} dt$$
$$= \left[(x-a)^{-\ell-\beta-i-1}\right]_{i<n}$$

где

$\kappa, \ell = -2,-1,0,\ldots,$ $0<\alpha, \beta<1,$

$\kappa-\ell+n \leqslant 0$ для $\alpha \neq \beta$

имеет следующее решение:

$$\Phi(t) = \left[\varphi_j(t)\right]_{j<n} + \sum_{r=1}^{N} c_r \left[\psi_j(t)\right]_{j<n} \qquad (2.18)$$

где

$$\varphi_j(t) = \Gamma(-\ell-\beta-n)\Gamma^{-1}(-\kappa-\alpha-j-n+1)\Gamma^{-1}(\kappa+\alpha-\ell-\beta+j-1)$$
$$(t-a)^{\kappa+\alpha-\ell-\beta+j-2} \cdot \mathcal{T}_j^n \cdot (\mathfrak{A}^n)^{-1},$$

$$\mathfrak{A}^n = \left(\prod_{v=1}^{n}(-\kappa-\alpha-n-v)\right)^{-1} \det\left[\prod_{s=0}^{n-u}(-\kappa-\alpha-n-v+s)\right]_{\substack{u<n\\ v<n}},$$

$$\tau_j^n = \Big((-\ell-\beta-n-1) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq j}}^{n} (-\kappa-\alpha-n-\nu) \Big)^{-1} \det \Big[\prod_{\substack{s=0 \\ \nu\neq j}}^{n-u} (-\kappa-\alpha-n-\nu+s) \wedge \prod_{\substack{s=0 \\ \nu=j}}^{n-u} (-\ell-\beta-n+s-1) \Big]_{\substack{u<n \\ \nu<n}} ,$$

$\Psi_j(t) = \lambda_j (t-a)^{\kappa+\alpha+j-r}$, и λ_j – произвольные постоянные.

Методом математической индукции можно показать, что при всяком решение системы (2.1) имеет вид (2.18).

Литература

1. Klaus Wiener, Über Integralgleichungen mit singulären rechten Seiten und Hadamard - Integralen mit variablen Singularitäten. Beiträge zur Analysis 2 /1971/.

2. Klaus Wiener, Zur Lösung der Abelschen Integralgleichung mit einem Hadamard - Integral. Wiss. Zeitschrift Martin Luther Univ. Halle - Wittenberg, XV/4, 1966.

3. Klaus Wiener, Lineare Integralgleichungen mit Hadamard - Integralen. Wiss. Zeitschrift Martin Luther Univ. Halle - Wittenberg, XI/5, 1962.