ZESZYTY NAUKOWE
WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY
Studia Techniczne z. 19

JAN KOCHAŃSKI
JÓZEF KUBIK

RUCH HARMONICZNY W TECHNICE I PRZYRODZIE PODSTAWOWE CECHY I PRZYKŁADY DRGAŃ UKŁADÓW DRUGIEGO RZĘDU

1. Wstęp

Spośród wielu różnych rodzajów ruchu, z którymi mamy do czynienia w technice i przyrodzie na szczególną uwagę zasługuje ruch harmoniczny. Znane są liczne, choć bardzo różniące się od siebie fizyczne zjawiska np. drgania masy zawieszonej na sprężynie, drgania ładunku przepływającego tam i z powrotem w obwodzie elektrycznym, drgania widełek stroikowych, będące źródłem fal dźwiękowych, analogiczne do nich drgania elektronów w atomie powodujące powstawanie fal świetlnych, drgania plazmy lub pływającej boi, ruch niewyważonego cylindra, ruchy wahadła itp., których wspólną cechą jest to, że są one opisywane przy pomocy tego samego liniowego równania różniczkowego (rzędu drugiego - dla wymienionych układów) o stałych współczynnikach [1].

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = f(t) \qquad (1)$$

gdzie: a_0, a_1, a_2 są stałymi współczynnikami; $\ddot{x}$, $\dot{x}$ oznaczają pochodne względem czasu odpowiednio drugiego i pierwszego rzędu funkcji x(t); f(t) jest funkcją wymuszającą.

Układy, których ruch opisany jest równaniem (1) nazywamy układami fizycznymi drugiego rzędu. Ze względu na powszechność występowania takich układów w technice i przyrodzie w niniejszej pracy omówiono charakterystyczne cechy układów drugiego rzędu oraz wykorzystanie liczb zespolonych do analizy drgań. Rozważania zilustrowano przykładami zjawisk wskazujących na fakt, że ten sam typ ruchu ma miejsce zarówno w świecie "mikro" - zjawisk, jak też układach "makro".

W zależności od przyjmowanych wartości funkcji f(t) rozróżniamy dwa przypadki: gdy f(t)=0 w układzie wystąpią przebiegi swobodne, natomiast, gdy f(t)≠0 wystąpią przebiegi wymuszone. Ponadto w obu przypadkach, gdy współczynnik $a_1=0$ - drgania będą nietłumione, gdy $0<a_1<2\sqrt{a_0 \cdot a_2}$ drgania będą tłumione, zaś gdy $a_1 \geq 2\sqrt{a_0 \cdot a_2}$ drgania nie wystąpią.

Poniżej rozpatrzymy kolejno własności drgań swobodnych i wymuszonych układów nietłumionych. Następnie przedyskutujemy układy z tłumieniem wykorzystując wygodne narzędzie w postaci liczb zespolonych.

2. Nietłumione układy drugiego rzędu

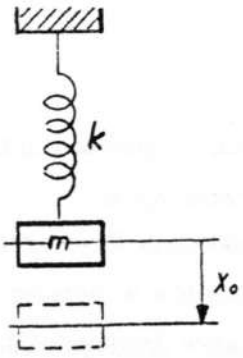
2.1. Drgania swobodne. Oscylator harmoniczny

Równanie drgań swobodnych, nietłumionych układu drugiego rzędu ma postać ($a_1=0$, f(t)=0):

$$a_2\ddot{x} + a_0 x = 0 \qquad (2.1)$$

a układ taki nazywamy oscylatorem harmonicznym.

Przykładem takiego oscylatora jest najprostszy układ mechaniczny złożony z masy zawieszonej na sprężynie (rys. 1). Na jego podstawie przeanalizujemy własności drgań swobodnych.



Rys. 1. Prosty oscylator mechaniczny

Po zawieszeniu ciążarka o masie m sprężyna rozciągnie się i układ przyjmie stan równowagi w położeniu 0. Odciągając następnie ciężarek na odległość x_0 od stanu równowagi i puszczając bez nadania prędkości początkowej, ciężarek pod wpływem siły powrotnej sprężyny doznaje przyspieszenia

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

które określa drugie prawo Newtona:

$$m\ddot{x} = F_s \qquad (2.2)$$

gdzie F_s jest siłą sprężyny.

Zakładając, że siła sprężyny jest proporcjonalna do wielkości jej rozciągnięcia czyli

$$F_s = -k \cdot x \qquad (2.3)$$

gdzie k oznacza współczynnik sprężystości sprężyny, równanie (2.2) przyjmie postać

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \qquad (2.4)$$

lub postać standardową

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \qquad (2.5)$$

w której występuje dodatnio określona stała

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2.6)$$

Jest widoczne, że równanie (2.4) jest identyczne z równaniem (2.1) jeśli jego współczynniki przyjmą postać $a_2=m$, $a_0=k$

Łatwo można sprawdzić wykonując różniczkowanie a następnie podstawienie, że równanie (2.5) jest spełnione przez wyrażenie

$$x(t) = A \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \qquad (2.7)$$

gdzie A jest pewną stałą o wymiarze długości, natomiast φ jest pewnym stałym kątem.

Jeśli jakaś wielkość zmienia się w czasie wg zależności (2.7) to mówimy, że zmienia się harmonicznie w czasie.

Drgania, w których położenie x(t) zmienia się harmonicznie w czasie nazywamy drganiami harmonicznymi; z takimi właśnie mamy do czynienia dla układu masy i sprężyny, pod warunkiem, że siła sprężyny określona jest wzorem (2.3).

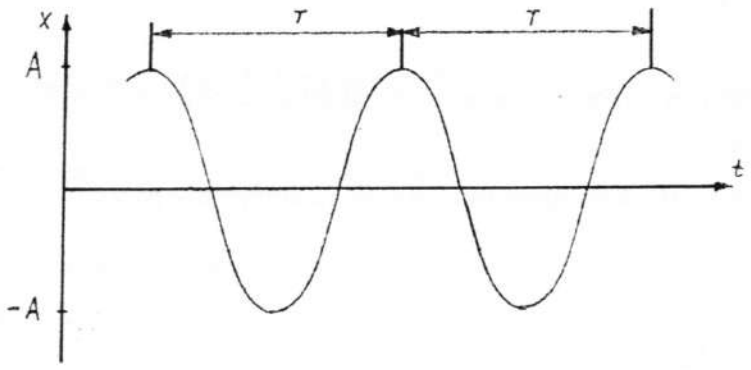
Wielkością, którą możemy sterować w równaniu (2.7) jest wyrażenie $\omega_0 \cdot t + \varphi$ nazywane często fazą, zaś wielkość φ jest fazą początkową. Faza zmienia się liniowo ze zmianą czasu i wartości dla dowolnego kąta różniącego się o całkowitą krotność 2π są fizycznie nie rozróżnialne. Tak więc, ruch harmoniczny jest periodyczny o powtarzających się identycznych

cyklach. Pełny cykl nastąpi wówczas, gdy kąt zmieni się o 2π (rys. 2), wtedy wszystkie mierzalne wielkości (przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie) powtórzą się. Przyrostowi fazy o wartość 2π odpowiada przyrost czasu równy T zwany okresem drgań.

$$\omega_0 \cdot (t+T) + \varphi - (\omega_0 \cdot t + \varphi) = 2\pi$$

stąd

$$\omega_0 \cdot T = 2\pi \qquad (2.8)$$



Rys. 2. Harmoniczne zmiany x w czasie

Spośród dwóch stałych występujących w kącie fazowym, tylko stała ω_0 jest określona przez związek (2.6); będziemy ją nazywali częstością kątową, natomiast faza początkowa φ może być dobierana dowolnie. W czasie jednego pełnego cyklu drgań zmienna x przyjmie wszystkie wartości pomiędzy $\pm A$, gdzie A będziemy nazywali amplitudą.

2.2. Warunki brzegowe (początkowe)

Wyrażenie (2.7) będące rozwiązaniem równania różniczkowego 2-go rzędu (2.5) zawiera dwie dowolne stałe A i φ. Stałe te wyznacza sposób w jaki ruch się rozpoczął. Jeżeli zaczniemy jedynie od pewnego małego odchylenia od stanu równowagi, mamy jeden typ drgań; jeżeli odchylimy ciężarek i puszczając popchniemy go mamy inny typ ruchu. Tak więc stałe A i φ będą każdorazowo wyznaczone przez sposób w jaki ruch się rozpoczął, czyli przez tzw. warunki brzegowe, które w tym przypadku są warunkami początkowymi.

Ponieważ w rozważanym układzie ciężarka i sprężyny przyjęliśmy, że w chwili t=0 mamy:

$$x(0) = A\cos\varphi = x_o$$
$$\dot{x}(0) = -\omega_o A \sin\varphi = 0 \qquad (2.9)$$

zatem

$$\varphi = 0;\ A = x_o \qquad (2.10)$$

i rozwiązanie (2.7) ma ostatecznie postać

$$x(t) = x_o \cdot \cos \omega_o \cdot t \qquad (2.11)$$

Z przytoczonej wyżej analizy ruchu harmonicznego masy i sprężyny nasuwają się następujące spostrzeżenia:

Spostrzeżenie 1°

Na podstawie zależności (2.8) to jest $T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

większej masie zajmuje więcej czasu przejście tam i z powrotem na sprężynie. Dzieje się tak, ponieważ ma ona większą bezwładność i pozostającym bez zmiany siłom trzeba więcej czasu na wprowadzenie jej w ruch. Jeżeli natomiast sprężyna będzie mocniejsza (sztywniejsza) ruch będzie szybszy - okres jest wtedy krótszy.

Spostrzeżenie 2°

Okres drgań masy na sprężynie nie zależy w żaden sposób od tego jak zaczął się ruch (jak daleko odciągnęliśmy masę od położenia równowagi).
Równanie ruchu (2.5) wyznacza okres a nie amplitudę. Amplituda natomiast jest wyznaczona przez sposób w jaki puszczamy w ruch ciężarek, czyli przez tzw. warunki początkowe.

2.3. Energia układu drgającego swobodnie

Ponieważ w rozważanym układzie nie ma strat na tarcie, jego całkowita energia powinna być zachowana. Aby stwierdzić ten fakt, obliczamy kinetyczną i potencjalną energię układu. Poruszająca się masa posiada energię kinetyczną równą

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad (2.12)$$

Natomiast napięta lub ściśnięta o wielkość x sprężyna posiada energię potencjalną równą

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2.13)$$

Wykorzystując następnie wyrażenie (2.7) oraz rezultat różniczkowania

$$\dot{x} = -\omega_o \cdot A \sin(\omega_o \cdot t+\varphi)$$

Możemy napisać

$$E_k = \frac{1}{2} m\omega_o^2 A^2 \sin^2(\omega_o \cdot t+\varphi) \qquad (2.14)$$

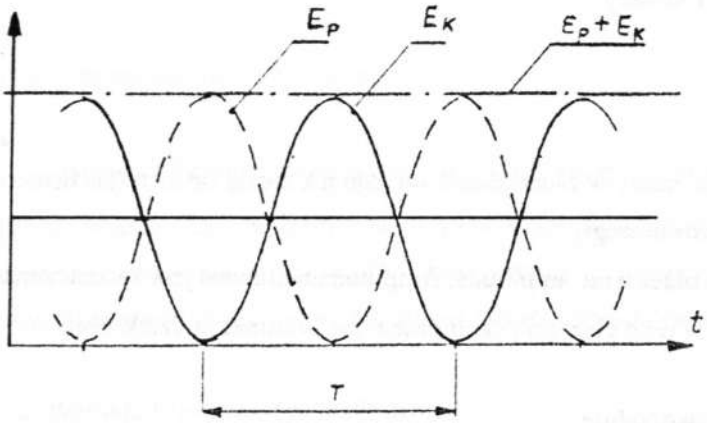
$$E_p = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_o \cdot t+\varphi) \qquad (2.15)$$

Skąd zauważymy, że

Spostrzeżenie 3°

Energia kinetyczna równa sie zeru gdy x przybiera wartość maksymalną; wtedy znika prędkość. Jest natomiast maksymalna gdy x przechodzi przez zero, gdyż ruch wtedy jest najszybszy.

Ta zmiana energii kinetycznej odbywa się przeciwnie do zmiany energii potencjalnej rys. 3.



Rys. 3. Przebiegi energii kinetycznej E_k i potencjalnej E_p układu drgającego

Biorąc pod uwagę (2.14) i (2.15) energia całkowita układu jest

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} A^2 [k \cos^2(\omega_o \cdot t+\varphi) + m\omega_o^2 \sin^2(\omega_o \cdot t+\varphi)]$$

zaś po uwzględnieniu zależności (2.6) w postaci

$$k = m \cdot \omega_o^2$$

otrzymujemy

$$E = \frac{1}{2} m \omega_o^2 A^2 \qquad (2.16)$$

co potwierdza, że energia całkowita układu jest stała.

Spostrzeżenie 4°

Dla danej masy i własności sprężyny układu całkowita energia układu jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy, nie zależy natomiast od fazy początkowej.

3. Alternatywne opisy ruchu harmonicznego

Istnieje kilka alternatyw przedstawiających w odmienny sposób rozwiązanie równania (2.5); pierwszą jest rozwiązanie przedstawione w postaci (2.7) - sposób A. Poniżej podamy trzy inne możliwości: B, C, D zapisu rozwiązania równania (2.5).

Sposób B

Rozkładając funkcję cosinus w wyrażeniu (2.7) otrzymamy

$$x(t) = A\cos\varphi \cos \omega_o \cdot t - A\sin\varphi \sin \omega_o \cdot t = B_p \cos \omega_o \cdot t + B_q \sin \omega_o \cdot t \qquad (2.17)$$

gdzie:

$$B_p = A \cos \varphi$$

$$B_q = -A \sin \varphi$$

są nowymi stałymi, które mogą być dodatnie lub ujemne.

Stałe te zdeterminowane są (podobnie jak w wyrażeniach (2.9) i (2.10)) przez warunki brzegowe i wynoszą:

$B_p = x_o$, $B_q = 0$

Porównanie wyrażeń (2.11) i (2.17) daje ten rezultat bezpośrednio.

Sposób C

Równanie różniczkowe (1) można próbować rozwiązać przez podstawienie wyrażenia

$$x(t) = C \cdot e^{pt}$$

Przy czym w odniesieniu do równania (2.5) rozwiązanie to może być zaakceptowane jedynie wtedy, gdy spełniony jest związek:

$$p^2 + \omega_o^2 = 0$$

co zachodzi dla dwóch wartości p tzn. dla $p=\pm i\omega_0$. W związku z tym, rozwiązaniem ogólnym równania (2.5) jest liniowa kombinacja

$$x(t) = C \exp(i\omega_0 t) + C' \exp(-i\omega_0 t) \qquad (2.18)$$

w której stałe C i C' są liczbami zespolonymi.

Rozwiązanie (2.18) jest zbyt ogólne, posiada bowiem cztery dowolne stałe (Re C, Im C, Re C', Im C') podczas gdy warunki brzegowe mogą określić tylko dwie; spostrzegamy jednak, że aby opisać konkretne, pojedyncze przemieszczenie fizyczne, x(t) może być albo rzeczywiste albo urojone, ale nie może być zespolone. Wyrażenie (2.18) może być zapisane w postaci rzeczywistej przez przyjęcie, że oba wyrazy są zespolone, sprzężone z sobą, tj.:

$$[C' \exp(-i\omega_0 t)]^* = C \exp(i\omega_0 t)$$

Ponieważ sprzężenie iloczynu jest równe iloczynowi wielkości sprzężonych, więc

$$[C' \exp(-i\omega_0 t)]^* = (C')^* [\exp(-i\omega_0 t)]^* = (C')^* \exp(i\omega_0 t)$$

stąd na podstawie przyjętego założenia

$$(C')^* = C, \text{ a ponieważ } (C^*)^* = C \text{ więc } C' = C^*$$

zatem

$$x(t) = C \exp(i\omega_0 t) + C^* \exp(-i\omega_0 t) \qquad (2.19)$$

W wyrażeniu tym występują już tylko dwie stałe nieznane: Re C oraz Im C. Stosując do zależności (2.19) wzór Moivre'a-Eulera

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

otrzymamy

$$x(t) = 2(\text{Re } C)\cos\omega_0 t - 2(\text{Im } C)\cdot\sin\omega_0 t \qquad (2.20)$$

Po porównaniu wyrażeń (2.17) i (2.20) znajdujemy

$$\text{Re } C = \frac{1}{2} B_p = \frac{1}{2} A\cos\varphi$$

$$\text{Im } C = -\frac{1}{2} B_q = \frac{1}{2} A\sin\varphi \qquad (2.21)$$

Sposób D

Ponieważ ustalono, że wyrażenie (2.19) (patrz również wyrażenie (2.20)) jest rzeczywiste, można je zapisać następująco

$$x(t) = \text{Re}[C \exp(i\omega_0 t)] + \text{Re}[C^* \exp(-i\omega_0 t)] = 2\,\text{Re}[C \exp(i\omega_0 t)] \qquad (2.22)$$

Wprowadzając nową wielkość zespoloną D=2C otrzymamy rozwiązanie w postaci

$$x(t) = \mathrm{Re}[D \exp(i\omega_0 t)] \qquad (2.23)$$

gdzie D jest zespoloną amplitudą drgań. Podobnie jak C - D zawiera informacje o stałej fazie. Dowolne stałe występujące w rozwiązaniach typu A i D są związane relacjami

$$\mathrm{Re}\, D = A \cos\varphi$$
$$\mathrm{Im}\, D = A \sin\varphi \qquad (2.24)$$

co wynika bezpośrednio z (2.21). Dla drgań rozpoczynających się przy $\varphi=0$, D jest tylko rzeczywiste; dla drgań z fazą $\varphi = \pm\frac{1}{2}\pi$ D jest urojone.

Postać typu D jest bardzo użyteczna w analizie ruchu harmonicznego głównie dlatego, że w sposób prosty może być różniczkowana i całkowana. Na przykład aby znaleźć $\dot{x}(t)$, możemy zróżniczkować (2.19) względem t i postąpić tak jak w (2.22) i (2.23). Otrzymamy wynik

$$\dot{x}(t) = \mathrm{Re}[i\omega_0 D \exp(i\omega_0 t)] \qquad (2.25)$$

identyczny z tym jaki otrzymalibyśmy różniczkując zmienną zespoloną D exp (i ω_0 t), biorąc następnie tylko część rzeczywistą.

To samo dotyczy przyspieszenia.

$$\ddot{x}(t) = \mathrm{Re}[-\omega_0^2 D \exp(i\omega_0 t)] \qquad (2.26)$$

Ponieważ

$$D = A\cos\varphi + i A \sin\varphi = A \exp(i\varphi)$$

zatem

$$D \exp(i\omega_0 t) = A \exp[i(\omega_0 t+\varphi)]$$

Podsumowanie

Powyżej przedstawiono cztery różniące się zapisem formy (A...D) rozwiązania równania (2.5); oto one:

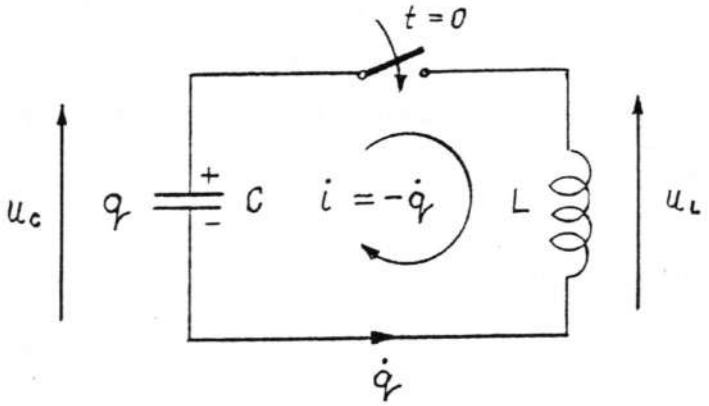
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t+\varphi)$$
$$x(t) = B_p \cos\omega_0 t + B_q \sin\omega_0 t$$
$$x(t) = C \exp(i\omega_0 t) + C^* \exp(-i\omega_0 t) \qquad (2.27)$$
$$x(t) = \mathrm{Re}\,[D \exp(i\omega_0 t)]$$

Zależności (2.27) opisują ruch harmoniczny, a występujące w tych zależnościach stałe łączą następujące związki:

$$A\cos\varphi = B_p = 2\,\mathrm{Re}\,C = \mathrm{Re}\,D$$
$$A\sin\varphi = -B_q = 2\,\mathrm{Im}\,C = \mathrm{Im}\,D \tag{2.28}$$

4. Przykłady układów fizycznych drgających swobodnie

Elektryczny oscylator harmoniczny LC



Rys. 4. Prosty elektryczny układ drgający

W chwili początkowej t=0 naładowany do napięcia U_{co} kondensator C łączymy z indukcyjnością L. Zgodnie z drugim prawem Kirchoffa napięcia U_L oraz U_C odpowiednio na indukcyjności i pojemności równoważą się, w związku z tym [4]

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (4.1)$$

Porównując równania (4.1) i (2.1) stwierdzamy, że są one tożsamościowo równe gdy:

$$a_2 = L \quad \text{oraz} \quad a_o = \frac{1}{C}$$

Sprowadzając równanie (4.1) do postaci standardowej otrzymamy

$$\ddot{q} + \omega_o^2 q = 0 \qquad (4.2)$$

przy czym

$$\omega_o = \left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.3)$$

określa częstość kątową drgań własnych obwodu.

Rozwiązaniem równania (4.2) może być jedna z form (2.27) np. pierwsza, tzn.:

$$q(t) = A\cos\left[\left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t + \varphi\right]$$

Stałe A i φ można wyznaczyć z warunków początkowych: $q(0)=CU_{co}$ oraz $i(0)=-\dot{q}(0)=0$, przy czym na podstawie zależności (2.9) otrzymamy:

$$CU_{co} = A\cos\varphi$$

$$0 = -A\,\omega_o \sin\varphi$$

stąd

$$A = CU_{co} \quad \text{oraz} \quad \varphi = 0$$

i ostatecznie

$$q(t) = CU_{co}\cos\left[\left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] \qquad (4.4)$$

a ponadto

$$i(t) = -\dot{q}(t) = U_{co}\left(\frac{C}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left[\left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] \qquad (4.5)$$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \cdot q(t) = U_{co} \cdot \cos\left[\left(\frac{1}{LC}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot t\right] \qquad (4.6)$$

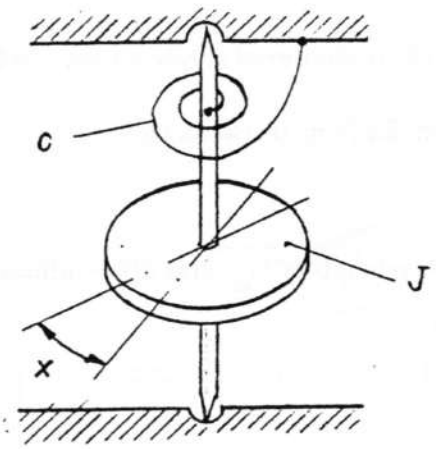
Jak wynika z zależności (4.5) amplituda oscylacji natężenia prądu zależy bezpośrednio od wartości początkowej U_{co} napięcia kondensatora; ponadto wzrost wartości pojemności C powoduje wzrost amplitudy prądu, natomiast wzrost indukcyjności L - jej spadek. W rozpatrywanym obwodzie drgającym LC całkowita energia E(t) w danej chwili jest równa sumie energii $E_c = \frac{1}{2}CU_c^2(t)$ kondensatora oraz $E_L = \frac{1}{2}Li^2(t)$ pola magnetycznego w indukcyjności

L. Po prostych przekształceniach z uwzględnieniem zależności (4.5) i (4.6) otrzymamy:

$$E(t)=E_L(t)+E_C(t)=\frac{1}{2}CU_{co}^2=\text{const.} \qquad (4.7)$$

Całkowita energia rozpatrywanego oscylatora harmonicznego LC nie zmienia się w czasie, choć energie na poszczególnych elementach tego obwodu zmieniają się w czasie.

Wibrator harmoniczny skrętny



Rys. 5. Oscylator skrętny

Pomijając tarcie w łożyskach, przedstawiony na rys. 5. wibrator można opisać równaniem:

$$J\ddot{x} = -cx \qquad (4.8)$$

gdzie: x - kąt obrotu

J - moment bezwładności masy względem osi obrotu

c - współczynnik sprężystości sprężyny

Przyjmując warunki początkowe $x(0)=x_o$ i $\dot{x}(0)=0$ rozwiązanie równania (4.8) jest następujące:

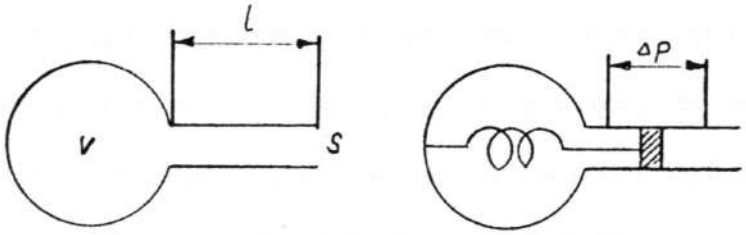
$$x(t) = x_o \cos \omega_o t \qquad (4.9)$$

przy czym

$$\omega_o = (\frac{c}{J})\frac{1}{2} \qquad (4.10)$$

Mając na uwadze związki (4.9) (4.10) można twierdzić, że masy ruchome układu przedstawionego na rys. 5. oscylują wokół położenia równowagi ruchem harmonicznym z częstością kątową ω_0.

Drgania akustyczne



Rys. 6. Wibrator akustyczny

Na rys. 6. przedstawiono akustyczny układ drgający znany pod nazwą rezonatora Helmholtza.

Pod wpływem różnicy ciśnień Δp działających na powierzchnię tłoka, masa powietrza m zawartego wewnątrz szyjki naczynia doznaje przyspieszeń zgodnie z równaniem:

$$\rho l s \ddot{x} = -s \cdot \Delta p \qquad (4.11)$$

gdzie: ρ - gęstość powietrza,

l - długość szyjki

s - przekrój szyjki

x - przesunięcie

Δp - różnica ciśnień

Dla małych wychyleń od położenia równowagi słuszna jest zależność [6]:

$$\frac{\Delta v}{v} = -k \cdot \Delta p \qquad (4.12)$$

gdzie: k - ściśliwość objętościowa powietrza przy stałej temperaturze.

Ponieważ $-\Delta v = x \cdot s$, więc

$$\ddot{x} + \frac{s}{lvk\rho} x = 0 \qquad (4.13)$$

Rozwiązanie równania (4.13) jak już wiemy - to ruch harmoniczny z częstością kątową równą

$$\omega_o = (\frac{s}{lvk\rho})^{\frac{1}{2}} \qquad (4.14)$$

Częstotliwość drgań akustycznych emitowanych przez rezonator jest równa $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$.

Proces rozchodzenia się dźwięku w powietrzu tj. zagęszczenia i rozrzedzenia powietrza, ma charakter adiabatyczny (bez wymiany ciepła z otoczeniem). Równanie adiabaty dla gazu doskonałego ma postać pV^{γ}=const., gdzie $\gamma=C_p/C_v$. Współczynniki C_p i C_v oznaczają ciepło właściwe odpowiednio przy stałym ciśnieniu i stałej objętości. Dla gazu doskonałego gęstość jest równa $\rho = \frac{M}{V}$ (M - masa jednego mola gazu, V - jego objętość), oraz spełnione jest równanie stanu pV=RT, gdzie R jest uniwersalną stałą gazową. Uwzględniając ponadto, że w procesie adiabatycznym $k = \frac{1}{\gamma \cdot p}$, „niewygodny" iloczyn $\rho \cdot k$ w zależności (4.14) można wyrazić następująco: $\rho \cdot k = \frac{M}{\gamma RT}$

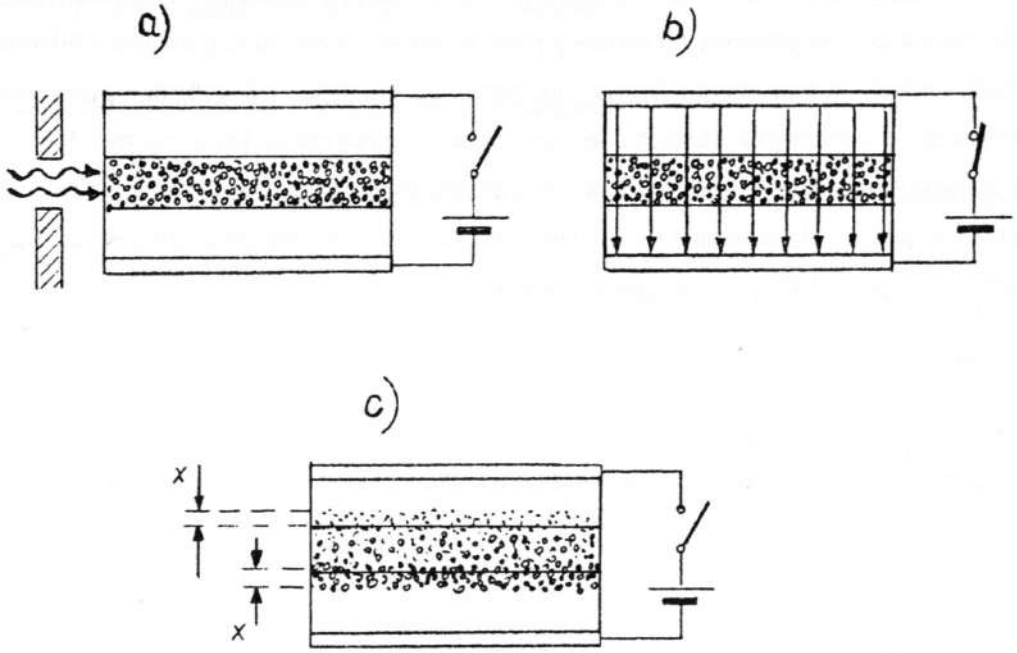
w związku z tym częstość kątowa drgań będzie równa:

$$\omega_o = (\frac{C_p}{C_v}\frac{RT}{M}\frac{s}{lv})^{\frac{1}{2}} \qquad (4.15)$$

Jak wynika z tej zależności częstość kątowa drgań wzrasta proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego z temperatury bezwzględnej; natomiast ciśnienie nie ma żadnego wpływu na częstość emitowanych drgań akustycznych.

Poniżej wykonano przykładowe obliczenia przyjmując, że w naczyniu znajduje się powietrze; dane:
$v=10^{-3}m^3$, $s=2\cdot10^{-4}m^2$, $l=2.5\cdot10^{-2}m$, $C_p/C_v=1.4$; $R=8.3\ J\cdot mol\cdot K^{-1}$, $T=300\ K$, $M=0.029\ kg\cdot mol^{-1}$.
Zgodnie z zależnością (4.15) częstość kątowa jest równa $\omega_o \approx 980\ s^{-1}$, a odpowiadająca jej częstotliwość drgań akustycznych emitowanych przez rezonator wynosi $f_o \approx 156$ Hz.

Drgania plazmy



Rys. 7. a) wytworzenie plazmy światłem ultrafioletowym, b) wytworzenie krótkiego impulsu pola elektrycznego, c) drgania plazmy

Jak wiadomo plazma - to całkowicie lub częściowo zjonizowany gaz, który jako całość jest elektrycznie obojętny, a ruch zjonizowanych cząstek jest całkowicie chaotyczny. Jeśli na krótką chwilę wytworzyć w plazmie pole elektryczne (impuls pola), to nastąpi rozsunięcie ładunków różnoimiennych w kierunkach przeciwnych powodując zagęszczenie ładunków jednoimiennych po przeciwnych stronach. Wynikiem tego rozsunięcia jest wytworzenie pola elektrycznego o natężeniu [5]

$$E = \frac{N \cdot e}{\varepsilon_o} x \qquad (4.16)$$

gdzie: N - koncentracja swobodnych elektronów (liczba swobodnych elektronów w jednostce objętości)

e - ładunek elektronu

ε_o - przenikalność dielektryczna próżni

x - przesunięcie

E - natężenie pola elektrycznego

Pod działaniem tego pola na każdy elektron wewnątrz pola (jak również na elektrony w warstwie) działa siła równa –E·e powodując ich ruch ku warstwie dodatniej; następstwem tego jest krótkotrwałe zobojętnienie tej warstwy przez elektrony, które do niej dotarły; elektrony te mając jednak pewną energię kinetyczną poruszają się dalej; tak powstaje nowe pole elektryczne o odwróconym niż poprzednio kierunku. Rozpoczyna się ponowny ruch elektronów (powrót) i sytuacja powtarza się. Mechanizm ten zwany drganiem plazmy jest nierozerwalnie związany z ekranującym działaniem elektronów [6] w położeniu równowagi. Ruch elektronów w polu elektrycznym opisuje równanie [5]

$$m_e \cdot \ddot{x} + \frac{N \cdot e^2}{\varepsilon_o} \cdot x = 0 \qquad (4.17)$$

gdzie: m_e - masa elektronu.

Określony równaniem (4.17) ruch harmoniczny charakteryzuje częstość kątowa

$$\omega_o = \left(\frac{N \cdot e^2}{m_e \cdot \varepsilon_o}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.18)$$

Ponieważ czynnik $\frac{e^2}{m_e \cdot \varepsilon_o} = 3.18 \cdot 10^3 \frac{m^3}{s^2}$ występujący we wzorze (4.18) ma wartość stałą, częstość kątowa drgań plazmy jak widać zależy od koncentracji elektronów w plazmie (ściśle od pierwiastka kwadratowego z koncentracji). Zjawisko drgania plazmy występuje w przyrodzie w warstwie jonosfery. Koncentracja elektronów w plazmie jonosfery jest funkcją wysokości nad powierzchnią ziemi. W niższej warstwie jonosfery (tzw. warstwa D) koncentracja w godzinach południowych wynosi [5] $N \approx 10^9\ m^{-3}$, co odpowiada częstości kątowej $\omega_o = 2 \cdot 10^6\ s^{-1}$ (częstość drgań $f_o \approx 300kHz$). W warstwach wyższych (tzw. warstwa F_2) koncentracja jest równa $N \approx 10^{12} m^{-3}$; odpowiada jej częstość kątowa $\omega_o = 6 \cdot 10^7 s^{-1}$ ($f_o \approx 10MHz$). Jak widać są to typowe częstotliwości fal radiowych. Obecność plazmy w jonosferze i możliwość pobudzania jej do drgań ma zasadniczy wpływ na propagację krótkich fal radiowych; zwłaszcza warstwa F_2 powoduje odbicie fal z powrotem w kierunku ziemi co umożliwia ich transmisję i odbiór na znaczne odległości.

Zjawisko drgań elektronów w paśmie przewodnictwa w metalach sprawia, że metale połyskują. Liczba atomów w jednostce objętości [5] $N = 1000 \frac{N_A \rho}{A}$, przy czym N_A - stała Avogadro równa $6.02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$, A - ciężar atomowy, ρ - gęstość. Stosowne obliczenia dla miedzi (A=63.5; $\rho = 8900 \frac{kg}{m^3}$) dają wartość koncentracji równą $N \approx 8.4 \cdot 10^{28}\ m^{-3}$ (przy założeniu, że na jeden atom

przypada choćby jeden elektron), której odpowiada częstość kątowa $\omega_o=2.10^{16}s^{-1}$ ($f_o\approx3\cdot10^{15}$ Hz) charakterystyczna dla fal infraczerwonych.

5. Dragania wymuszone w układach bez tłumienia

Oscylator harmoniczny na który działa wymuszenie zewnętrzne można opisać równaniem $a_2\ddot{x} + a_o x = f(t)$ (5.1)

Celem bliższego rozpoznania tego problemu załóżmy, że funkcja wymuszająca ma charakter cosinusoidalny

$f(t) = F_o \cos \omega\cdot t$ (5.2)

Załóżmy dalej, że rozwiązanie równania (5.1) ma w związku z wymuszeniem cosinusoidalnym również charakter cosinusoidalny, czyli

$x(t)=A \cos \omega\cdot t$ (5.3)

Podstawiając wyrażenie (5.2) i (5.3) do równania (5.1) otrzymamy

$-a_2A\cdot\omega^2\cdot\cos \omega\cdot t + a_oA\cdot\cos \omega\cdot t = F_o \cos \omega\cdot t$

a uwzględniając, że $\omega_o^2 = \frac{a_o}{a_2}$ można wyznaczyć amplitudę drgań

$$A = \frac{F_o}{a_2}(\omega_o^2 - \omega^2) \qquad (5.4)$$

Jak widać funkcja (5.3) jest rozwiązaniem równania (5.1) jeśli amplituda A przyjmie wartość określoną przez związek (5.4); stwierdzenie to dotyczy oczywiście tylko ustalonego stanu drgań. Drgania te jak wynika z zależności (5.3) mają taką samą częstotliwość co wymuszenie (5.2), natomiast amplituda drgań jak wynika z zależności (5.4) jest funkcją częstości wymuszenia ω; dla $\omega<\omega_o$ amplituda $A>0$, co oznacza zgodność (faz) drgań x(t) z wymuszeniem f(t); dla częstości $\omega>\omega_o$ amplituda $A<0$, co oznacza przeciwność faz. Z zależności (5.4) wynika, że dla częstości wymuszenia bliskich częstości własnych układu ($\omega\approx\omega_o$) amplituda drgań może osiągać duże wartości; zmianie częstości wymuszenia ω od wartośći $\omega_o - \Delta\omega$ do $\omega_o + \Delta\omega$ towarzyszy wzrost amplitudy A - teoretycznie do nieskończoności - i gwałtowna zmiana fazy drgań o $-\pi$ w punkcie $\omega\approx\omega_o$. W praktyce dla dużych wartości amplitudy (dla $\omega\approx\omega_o$) w równaniu (5.1) pojawiają się dodatkowe człony związane z wytracaniem energii (np. tarcia), co powoduje zahamowanie dalszego wzrostu amplitudy, a wyrażenia

(5.3) i (5.4) przestają obowiązywać. Zagadnienie to zostanie dokładniej rozpatrzone w następnym rozdziale.

6. Drgania w układach drugiego rzędu z tłumieniem

Omówione poprzednio układy charakteryzowały się brakiem tłumienia. W praktyce jednak mamy do czynienia z rozpraszaniem (stratą) energii np. tarcie w układach mechanicznych, czy wydzielanie ciepła na rezystorach w układach elektrycznych. Fakt ten należy uwzględnić w równaniu opisującym układ. Problem ten z uwagi na złożoność zagadnienia jest zwykle trudny do rozwiązania. Pewnym ułatwieniem jest jednak to, że w wielu przypadkach siły związane z wytracaniem energii są w pewnym zakresie proporcjonalne do pierwszej pochodnej funkcji; tak np. siła tarcia jest w pewnym zakresie proporcjonalna do szybkości z jaką ciało przemieszcza się; podobnie spadek napięcia elektrycznego na rezystorze jest proporcjonalny do pochodnej ładunku elektrycznego względem czasu (tzn. do natężenia prądu). Układ w którym występuje tłumienie opisuje równanie (1); wartość współczynnika a_1 w tej zależności ma zasadniczy wpływ na charakter zmian funkcji x(t). W szczególnym przypadku gdy $a_1=0$, równanie (1) sprowadza się do postaci (5.1), a dodatkowo dla f(t)=0 jest to omówiony już poprzednio przypadek drgań swobodnych bez wymuszania. Powstaje pytanie jaki jest wpływ współczynnika a_1 na przebieg funkcji x(t)? Na wstępie należy zaznaczyć, że współczynniki a_2, a_1 oraz a_o w równaniu (1) powinny być dodatnie gdyż jest to warunek konieczny (a dla układu drugiego rzędu również wystarczający) stabilności układu [2]. Rozwiązanie równań (2.1) i (5.1) metodą tradycyjną jest mało atrakcyjne a w dodatku trudno je wyrazić w formie ogólnej. Zagadnienie to staje się dużo prostsze gdy do jego rozwiąznia zastosujemy liczby zespolone.

6.1. Liczby zespolone w analizie układów drgających

Przebieg cosinusoidalny zgodnie ze wzorem Moivre'a jest częścią rzeczywistą liczby zespolonej $\exp(i\omega t)$ tzn.:

$$\cos \omega t = \mathrm{Re}[\exp(i\omega t)] \qquad (6.1)$$

Jeśli więc jakiś przebieg fizyczny np. siłę z wyrażenia (5.2) przedstawimy (ze względów praktycznych, czysto rachunkowych) w postaci funkcji zespolonej, należy mieć na uwadze zawsze to, że prawdziwa (rzeczywista) siła jest częścią rzeczywistą tej funkcji (por. wyrażenia

(2.22) i (2.23)); w związku z tym siłę z wyrażenia (5.2) można przedstawić w postaci zespolonej:

$$f(t)=F_o\exp(i\omega t) \qquad (6.2)$$

Podobnie funkcję x(t) określoną przez wyrażenie (5.3) można przedstawić następująco:

$$x(t)=A\exp(i\omega t) \qquad (6.3)$$

Łatwo zauważyć, że stosując taką konwencję zapisu można w prosty sposób uwzględnić ewentualne przesunięcie fazowe; dla przykładu w zapisie:

$$f(t) = F_o\exp[i(\omega t+\delta)] = F_o\exp(i\delta)\cdot\exp(i\omega t) = \overline{F}\cdot\exp(i\omega t) \qquad (6.4)$$

liczba zespolona $\overline{F}$ równa

$$\overline{F}=F_o\exp(i\delta) \qquad (6.5)$$

uwzględnia przesunięcie fazowe δ siły f(t) względem umownie przyjętej fazy równej zero. Podobnie funkcję x(t) można przedstawić

$$x(t) = \overline{X}\exp(i\omega t) \qquad (6.6)$$

gdzie

$$\overline{X} = A\exp(i\varphi) \qquad (6.7)$$

φ - oznacza przesunięcie fazowe funkcji x(t) względem fazy równej zero.

Dogodność takiego zapisu uwidacznia się jeszcze bardziej w przypadku różniczkowania funkcji

$$\dot{x} = \frac{d}{dt}[\overline{x}\cdot\exp(i\omega t)] = i\omega\cdot\overline{x}\cdot\exp(i\omega t) \qquad (6.8)$$

$$\ddot{x} = (i\omega)^2\overline{x}\cdot\exp(i\omega t) = -\omega^2\cdot\overline{x}\cdot\exp(i\omega t) \qquad (6.9)$$

Kolejne różniczkowania funkcji x(t) można sprowadzić do mnożenia tej funkcji przez czynnik $i\omega$. Stosując tę regułę do równań różniczkowych można zauważyć, że przekształcają się one w równania algebraiczne, a występujący w równaniu wspólny czynnik $\exp(i\omega t)$ można skrócić. W odniesieniu do równania (5.1) zapis będzie następujący:

$$(i\omega)^2\cdot a_2\cdot\overline{x} + a_o\overline{x} = \overline{F} \qquad (6.10)$$

skąd

$$\overline{x} = \frac{\overline{F}}{a_2(\omega_o - \omega^2)} \qquad (6.11)$$

przy czym

$$\omega_o^2 = \frac{a_o}{a_2}$$

We wzorze (6.11) wymuszenie $\bar{F}$ jest liczbą zespoloną, która dla cosinusoidalnej funkcji wymuszającej (np. zależność (5.2)) z fazą początkową równą zero będzie miała postać $\bar{F}=F_o \exp(i\cdot 0)$. Zależność (6.11) w porównaniu z wyrażeniem (5.4) zawiera dodatkowo informację o ewentualnym przesunięciu fazowym funkcji x(t) wynikającym z fazy początkowej wymuszenia oraz fazy wprowadzonej przez czynnik $\frac{1}{a_2(\omega_o^2-\omega^2)}$. W rozpatrywanym przypadku czynnik ten dla $\omega<\omega_o$ nie wprowadza żadnego przesunięcia; natomiast dla $\omega>\omega_o$ jest ujemny, co oznacza wprowadzenie przesunięcia $-\pi$ funkcji x(t) względem wymuszenia f(t) (na płaszczyźnie liczb zespolonych oznacza to obrót wektora odpowiadającego liczbie $\bar{x}$ o kąt $-\pi$ względem wektora $\bar{F}$). Moduł liczby $\bar{x}$ określa amplitudę oscylacji, która podobnie jak w wyrażeniu (5.4) osiąga duże wartości dla wartości ω bliskich wartości ω_o. Zastosowanie liczb zespolonych do analizy wymuszonego oscylatora harmonicznego z tłumieniem jeszcze bardziej uwidacznia zalety metody. Równanie (1) określające ten przypadek można niemal natychmiast przekształcić i przedstawić w następującej formie:

$$[(i\omega)^2\cdot a_2\cdot\bar{x} + (i\omega)\cdot a_1\cdot\bar{x} + a_o\cdot\bar{x}]\cdot\exp(i\omega t) = \bar{F}\cdot\exp(i\omega t) \qquad (6.12)$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$\omega_o^2 = \frac{a_o}{a_2} \text{ oraz } \xi = \frac{a_1}{2(a_o\cdot a_2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (6.13)$$

gdzie ξ oznacza względny współczynnik tłumienia [2], otrzymamy

$$\bar{x}\cdot a_2[\omega_o^2 - \omega^2 + i(2\cdot\xi\cdot\omega_o\cdot\omega)] = \bar{F} \qquad (6.14)$$

skąd

$$\frac{\bar{x}}{\bar{F}} = \frac{1}{a_2[\omega_o^2 - \omega^2 + i(2\cdot\xi\cdot\omega_o\cdot\omega)]} \qquad (6.15)$$

Ogólnie, iloraz zespolonej funkcji wyjściowej $\bar{x}$ do zespolonej funkcji wymuszającej $\bar{F}$ tzn.:

$$W(i\omega) = \frac{\bar{x}}{\bar{F}} \qquad (6.16)$$

nazywany jest zespolonym współczynnikiem wzmocnienia układu [2]; iloraz ten będący funkcją zmiennej zespolonej, można w literaturze spotkać pod inną nazwą: częstotliwościowa charakterystyka amplitudowo-fazowa układu [2] lub zespolony współczynnik przenoszenia. Z zależności (6.15) wynika, że dla rozpatrywanego układu drugiego rzędu funkcja $W(i\omega)$ ma

postać:

$$W(i\omega) = \frac{1}{a_2[\omega_0^2 - \omega^2 + i(2\cdot\xi\cdot\omega_0\cdot\omega)]} \qquad (6.17)$$

Funkcję W(iω) można w przyypadku ogólnym zapisać następująco:

$$W(i\omega) = P(\omega) + iQ(\omega) = |W(i\omega)|\cdot\exp[i\theta(\omega)] \qquad (6.18)$$

przy czym moduł |W(iω)| i argument θ(ω) funkcji W(iω) są równe:

$$|W(i\omega)| = \left\{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (6.19)$$

$$\theta(\omega) = \arg W(i\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \qquad (6.20)$$

Porównując wyrażenia (6.16) i (6.18) można zauważyć, że:

$$|W(i\omega)| = \frac{|\bar{x}|}{|\bar{F}|} \qquad (6.21)$$

oraz

$$\theta(\omega) = \arg \bar{x} - \arg \bar{F} \qquad (6.22)$$

Z zależności (6.21) i (6.22) wynika bezpośrednio sens fizyczny modułu i argumentu zespolonej funkcji W(iω); mianowice:

- moduł funkcji W(iω) równy ilorazowi amplitud funkcji: $x(t)=\bar{x}\cdot\exp(i\omega t)$ oraz $f(t)=\bar{F}\cdot\exp(i\omega t)$ określa wzmocnienie układu w funkcji częstości; i jest to tzw. amplitudowa charakterystyka częstotliwościowa układu [2].
- argument funkcji W(iω) określa (zgodnie z wyrażeniem (6.22)) przesunięcie fazowe θ(ω) między funkcjami x(t) i f(t); przesunięcie w czasie między tymi funkcjami jest równe: $\Delta t = \frac{\theta(\omega)}{\omega}$. Zależność θ(ω) nazywa się fazową charakterystyką częstotliwościową układu.

Zgodnie z zależnością (6.21) moduł wyrażenia (6.15) jest równy:

$$|W(i\omega)| = \frac{1}{a_2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad (6.23)$$

Zależność (6.23) określa wzmocnienie układu drugiego rzędu z tłumieniem, przy czym względny współczynnik tłumienia ξ jest parametrem. Ilustracją graficzną zależności (6.23) jest rodzina charakterystyk - krzywych rezonansowych - posiadających maksima dla częstości ω_r określonych zależnością:

$$\omega_r = \omega_0(1-2\cdot\xi^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (6.24)$$

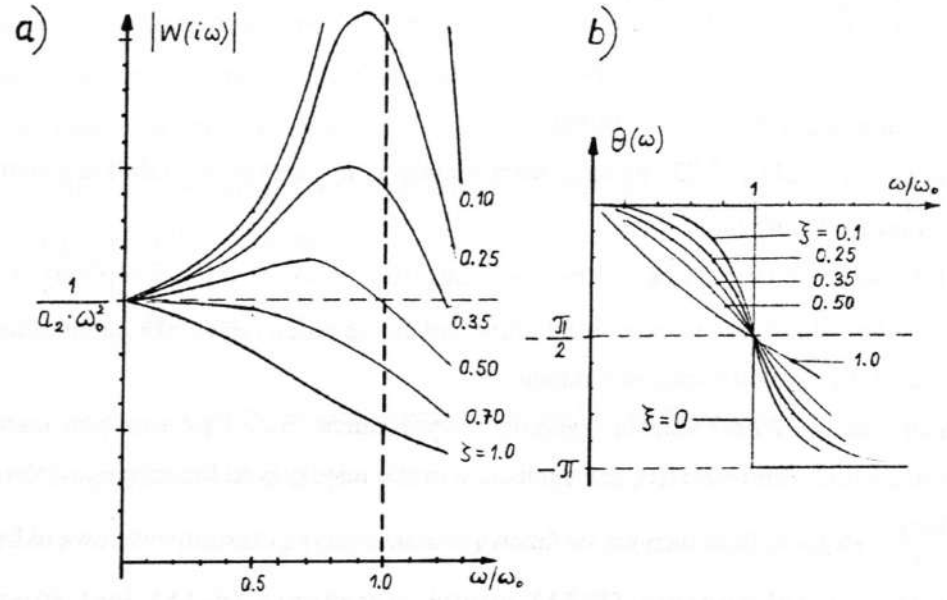
Zgodnie z tą zależnością funkcja $|W(i\omega)|$ posiada maksima tylko dla $\xi<\frac{\sqrt{2}}{2}$. Przebieg krzywych rezonansowych według zależności (6.23) przedstawia rys. 8a. Wzmocnienie układu dla częstości $\omega=\omega_r$ (maksymalne wartości według zależności (6.23) jest równe:

$$\max|W(i\omega)|_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{2\cdot a_2\cdot\xi\cdot\omega_o^2(1-\xi^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (6.25)$$

natomiast argument $\theta(\omega)$ rozpatrywanego układu wyznaczony bezpośrednio z zależności (6.15) jest równy:

$$\theta(\omega) = \arg W(i\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{2\cdot\xi\cdot\omega_o\cdot\omega}{\omega_o^2-\omega^2} \qquad (6.26)$$

a jego ilustrację graficzną przedstawiono na rys. 8b.



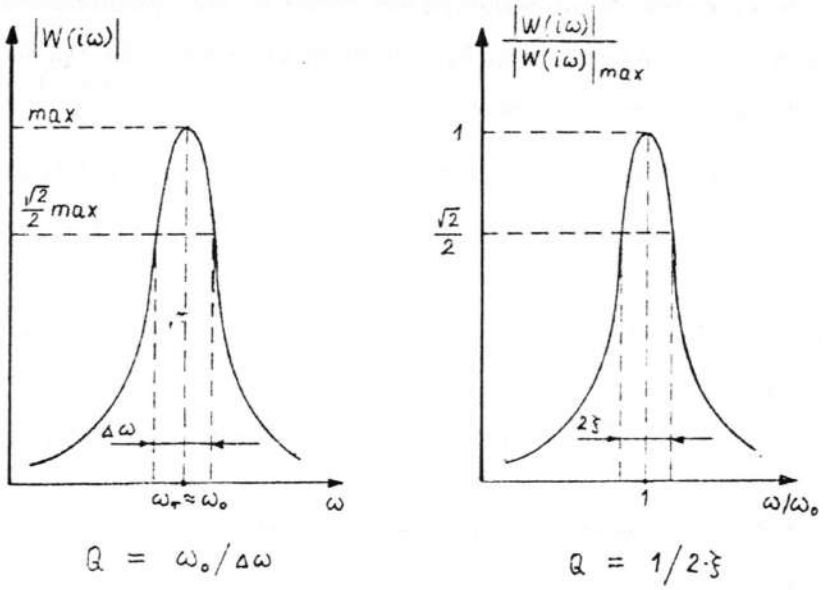
Rys. 8. Charakterystyki modułu (a) oraz argumentu (b) funkcji W(iω) według zależności (6.15)

Krzywe rezonansowe przedstawione na rys. 8a są tym węższe i wyższe im mniejszy jest współczynnik tłumienia ξ. Miarą szerokości krzywej jest tzw. współczynnik dobroci Q określający ile razy częstość rezonansowa ω_r jest większa od przedziału $\Delta\omega$ (szerokość krzywej rezonansowej) odpowiadającego modułowi o wartości $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\max|W(i\omega)|_{\omega=\omega_r}$ w pobliżu punktu $\omega=\omega_r$ [1]; dla takiej wartości modułu energia układu drgającego (proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań tzn. do kwadratu modułu funkcji $W(i\omega)$) jest równa połowie energii

maksymalnej [1]. Po wykonaniu prostych przekształceń otrzymamy:

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{(a_0 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}}}{a_1} = \frac{1}{2 \cdot \xi} \qquad (6.27)$$

Na rys. 9. przedstawiono ilustrację graficzną współczynnika Q.



Rys. 9. Ilustracja graficzna współczynnika dobroci Q

7. Uwagi końcowe

Porównując równania (2.1) (2.4) (4.1) (4.8) (4.13) (4.17) stwierdzamy, że choć dotyczą one różnych zagadnień to jednak mając na uwadze typ równania - są one bardzo podobne, by nie rzec identyczne. Rozwiązaniem tych równań jest funkcja opisująca ruch harmoniczny o chrakterystycznej częstości drgań własnych ω_0 zależnej jedynie od parametrów układu; warunki początkowe nie mają żadnego wpływu na wartość ω_0, natomiast zależą od nich: amplituda i faza początkowa drgań.

Energia drgań harmonicznych nietłumionych jak wynika z zależności (2.16) jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy A i kwadratu częstości własnej ω_0 układu i nie zależy od czasu. W punkcie 6.1. opracowania przedstawiono możliwość zastosowania liczb zespolonych (i korzyści z tego płynące) do analizy układów drgających , zwłaszcza wtedy, gdy są to układy z tłumieniem w obecności zewnętrznej siły wymuszającej. Podane w opracowaniu zależności mają charakter ogólny i z tego względu mogą być stosowane do analizy tych wszystkich układów, które opisane są równaniem różniczkowym typu (1).

LITERATURA

[1] Feynman Richard P., Leighton Robert B., Sands Matthew, Feynmana wykłady z fizyki t.1, cz. 1. PWN Warszawa 1971

[2] Krasowski A. A., Pospiełow G. S. Podstawy automatyki i cybernetyki technicznej. WNT Warszawa 1965

[3] Krysicki W., Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach cz. 1 i cz. 2. PWN Warszawa 1987

[4] Kurdziel R., Podstawy elektrotechniki. WNT Warszwa 1967

[5] Main Iain G., Vibrations and Waves in Physics. Cambridge University Press 1978

[6] Praca zbiorowa, Encyklopedia fizyki współczesnej. PWN Warszawa 1983

ON HARMONIC MOTION IN NATURE AND TECHNOLOGY

Summary

The paper concerns the theoretical presentation of the basic concepts of vibrations (free and forced vibrations, damping) of the model which possesses properties which are necessary for vibrational behaviour.

The equation of harmonic motion (a second – order differential equation) and the alternative mathematics (including complex) for its particular solutions are dissussed in detail. By considering some representative physical systems it is shown that the mathematics of harmonic motion can be applied in the wide variety of circumstances in nature and technology.