

Julian Polański
WSP w Bydgoszczy

WERYFIKACJA HIPOTEZ WYTEŻENIA MATERIAŁÓW ANIZOTROPOWYCH Z UWZGLĘDNIENIEM PRĘDKOŚCI OBCIĄŻENIA

1. Wstęp

Rozwój nowoczesnych materiałów kompozytowych zapoczątkowany został w latach czterdziestych w bieżącym stuleciu. Materiały te z każdym rokiem znajdują coraz szersze zastosowanie w najróżniejszych dziedzinach techniki. Jednym ze współcześnie szeroko stosowanych materiałów konstrukcyjnych jest tworzywo warstwowe, otrzymywane z żywicy poliestrowej lub epoksydowej z różnymi włóknami, najczęściej szklanymi. Optymalne zaprojektowanie konstrukcji z tworzywa sztucznego wzmocnionego włóknami wysokiej wytrzymałości wymaga znajomości warunków wytrzymałości w złożonych stanach naprężenia. Trudności w jednoznacznym określeniu warunku wytrzymałości polegają się ze względu na to, iż tworzywa te są lepkosprężystymi materiałami anizotropowymi.

Kryteriom wytrzymałości stawia się szereg wymagań:

- kryterium powinno określać wytrzymałość elementu znajdującego się w dowolnym złożonym stanie naprężenia,
- w analityczne wyrażenie warunku wytrzymałości razem z tensorem naprężeń, charakteryzującym stan naprężenia powinny wchodzić jeszcze niektóre skalarne lub tensorowe wielkości charakteryzujące własności materiału,
- kryterium powinno określać wytrzymałość w dowolnym układzie współrzędnych; w szczególności z tego warunku powinny wynikać wzory wytrzymałości materiałów anizotropowych przy czystym rozciąganiu, czystym ścinaniu itp. w dowolnym układzie współrzędnych,

- kryterium wytrzymałości powinno mieć formę niezmiennika sformowanego ze składowych tensorów naprężeń i składowych tensorów charakteryzujących własności wytrzymałościowe materiału,
- aby teoria nie była wewnętrznie sprzeczna, wszystkie wynikające z niej stosunki pomiędzy stałymi materiałowymi powinny być kowariantnymi (tj. nie zależeć od układu współrzędnych),
- każdy złożony stan naprężeń elementu powinien być w warunkach prostego obciążenia scharakteryzowany jednym parametrem np. jedną składową działającego tensora naprężeń; w granicznym stanie (punkt niszczenia) ten parametr powinien być funkcją wytrzymałościowych stałych materiałowych (granice wytrzymałości na rozciąganie, ściskanie, ścinanie),
- kryterium wytrzymałości winno uwzględniać takie szczegóły własności mechanicznych materiału, jak różnicę granic wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie, zależność granicy wytrzymałości na ścinanie od kierunku naprężeń tnących itp.; w prostych przypadkach powinno prowadzić do zwykłych formuł wytrzymałości materiałów.

Brak jest dostatecznej liczby badań wytrzymałościowych wyżej wymienionego tworzywa produkcji krajowej, są natomiast fragmentaryczne publikacje na ten temat w literaturze zagranicznej.

Rozwiązanie tego problemu wymaga przeprowadzenia złożonych badań doświadczalnych oraz opracowania i wykonania nowych urządzeń badawczych. Urządzenia te winny zapewnić realizację złożonych stanów obciążenia próbek z możliwością pomiaru odkształceń.

Zupełnie brak jest badań wpływu prędkości obciążenia na wytrzymałość tworzyw wzmocnionych. Ponieważ badane tworzywa są materiałami lepkosprężystymi, a więc wrażliwymi na prędkość obciążenia, należy więc zbadać wpływ prędkości obciążenia na wytrzymałość tworzywa w złożonych stanach naprężenia. Należy też zaproponować próbę teoretycznego opisu wpływu prędkości naprężeń na granicę plastyczności (która w większości przypadków warunkuje użycie kompozytu do konstrukcji) materiałów lepkosprężystych w złożonych stanach naprężenia.

W literaturze technicznej ukazało się wiele publikacji z zakresu hipotez wyężenia materiałów. Obszerny krytyczny przegląd hipotez wyężeniowych do lat dwudziestych obecnego wieku oraz własną koncepcję oceny wyężenia materiału przedstawił W. Burzyński [1]. Przegląd do lat osiemdziesiątych wraz z podziałem na hipotezy dla materiałów izotropowych i anizotropowych przedstawili J. J. Goldenblat i V. A. Kopnow [2]. Autorzy tej monografii podali własne interesujące kryterium wyężenia materiałów anizotropowych [3].

$$\sum A_{ik}\sigma_{ik} + \left(\sum_{p,q,r,s} A_{pqrs}\sigma_{pq}\sigma_{rs} \right)^{0,5} = 1$$

dla płaskiego stanu równanie przybierze postać

$$A_{11}\sigma_{11} + A_{22}\sigma_{22} + (A_{1111}\sigma_{11}^2 + A_{2222}\sigma_{22}^2 + 2A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4A_{1212}\sigma_{12}^2)^{0,5} = 1$$

$$\text{gdzie: } A_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{11R}^{pl}} + \frac{1}{\sigma_{11C}^{pl}} \right) \quad A_{1111} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_{11R}^{pl}} + \frac{1}{\sigma_{11C}^{pl}} \right)^2$$

$$A_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{22R}^{pl}} - \frac{1}{\sigma_{22C}^{pl}} \right) \quad A_{2222} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_{22R}^{pl}} + \frac{1}{\sigma_{22C}^{pl}} \right)^2$$

$$A_{1122} = \frac{1}{4} \left[8A_{2222} - \left(\frac{2}{\sigma_{S45}^{pl}} \right)^2 \right] \quad A_{1212} = \frac{1}{4(\sigma_{12S}^{pl})^2}$$

$\sigma_{11R}^{pl}; \sigma_{22R}^{pl}$ – granice plastyczności przy rozciąganiu w kierunku 1 i 2

$\sigma_{11C}^{pl}; \sigma_{22C}^{pl}$ – granice plastyczności przy ściskaniu w kierunku 1 i 2

σ_{12S}^{pl} – granica plastyczności przy skręcaniu

σ_{S45}^{pl} – granica plastyczności przy skręcaniu próbki, której oś tworzy z główną osią anizotropii kąt 45°

Kryterium to uwzględnia znaczną liczbę wymagań stawianych hipotezom dla materiałów anizotropowych. Również G. G. Pisarenko i A. A. Lebiediew [4] podali przegląd hipotez do lat osiemdziesiątych naszego wieku.

Interesującą hipotezę wyężenia przedstawił J. Zawadzki [5, 6], który przyjął za miarę wyężenia przyrost właściwej energii swobodnej.

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{kl}J_{ijkl} - \frac{1}{2}\alpha_{ij}\sigma_{ij}\theta - S_0\theta - \frac{C_\sigma}{T_0}\theta^2 = \frac{1}{2}\sigma_{red}J_I - \frac{1}{2}\alpha_I\sigma_{red}\theta_I - S_0\theta_I - \frac{C_\sigma}{T_0}\theta_I^2$$

gdzie: J_{ijkl} – podatności materiałowe

C_o – ciepło właściwe

T_0 – temperatura początkowa ciała

$S_0 = S(0)$ – entropia w stanie początkowym nieobciążonym i nieodkształconym

α_{ij} – współczynnik przewodzenia ciepła

θ – przyrost temperatury

I – indeks ten dotyczy stanów porównawczych (np. jednoosiowe rozciąganie)

W pracy [7] Z. Gabryszewski rozszerzył na ciała anizotropowe warunek Hubera-Misesa.

$$B_{1111}\sigma_{11}^2 + B_{2222}\sigma_{22}^2 + B_{1212}\sigma_{12}^2 + 2B_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} - B_{(i)(j)(i)(j)}\sigma_{o(i)(j)}\sigma_{o(i)(j)} = 0$$

$$\text{gdzie: } B_{1111} = a_{11} - \frac{1}{9}a_{qqpp} \quad B_{2222} = a_{22} - \frac{1}{9}a_{qqpp}$$

$$B_{1212} = a_{66} \quad B_{1122} = a_{12} - \frac{1}{9}a_{qqpp}$$

$$a_{qqpp} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2(a_{11} + a_{13} + a_{23})$$

$$a_{11} = \frac{1}{E_{11}}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_{22}}; \quad a_{33} = \frac{1}{E_{33}}$$

$$a_{66} = 2(a_{11} - a_{12}); \quad a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_{22}}; \quad a_{21} = \frac{\nu_{21}}{E_{11}}$$

$$a_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_{33}}; \quad a_{23} = -\frac{\nu_{12}}{E_{33}}$$

ν – liczba Poissona E – moduł Younga

Szerokie wykorzystanie znajduje warunek plastyczności Misesa-Hilla [8, 9, 10]:

$$H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2N\sigma_{12}^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 = 1$$

$$\text{gdzie: } H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{11pl}^2} + \frac{1}{\sigma_{22pl}^2} - \frac{1}{\sigma_{33pl}^2} \right); \quad N = \frac{1}{2\sigma_{12pl}^2}$$

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{22pl}^2} + \frac{1}{\sigma_{33pl}^2} - \frac{1}{\sigma_{11pl}^2} \right); \quad L = \frac{1}{2\sigma_{23pl}^2}$$

$$G = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{33pl}^2} + \frac{1}{\sigma_{11pl}^2} - \frac{1}{\sigma_{22pl}^2} \right); \quad M = \frac{1}{2\sigma_{31pl}^2}$$

W praktyce inżynierskiej często wykorzystywany jest dla materiałów ortotropowych warunek Marina [11] oparty na wielomianie kwadratowym:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \left(2 + \frac{\sigma_{11C} + \sigma_{22R} - \sigma_{11R} - \frac{\sigma_{11R}}{\sigma_{22R}} \sigma_{11C}}{\sigma_{12\varphi=45}} - \frac{\sigma_{11R} \sigma_{22C}}{\sigma_{12\varphi=45}} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} +$$

$$+ (\sigma_{11C} - \sigma_{11R}) \sigma_{11} + \left(\sigma_{11}^C \frac{\sigma_{11R}}{\sigma_{22R}} - \sigma_{22R} \right) \sigma_{22} - \sigma_{11R} \sigma_{11C} = 0$$

Podobnym do Hipotezy Marina jest warunek wytrzymałościowy Zacharowa [12], mający zastosowanie w przypadku zgodności kierunków naprężenia z głównymi osiami anizotropii. Uogólnienie hipotezy Hubera-Misesa dla materiałów ortotropowych w postaci warunku plastyczności przedstawili Hu i Marin [13]:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{11pl}^2} - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{11pl} \sigma_{22pl}} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22pl}^2} - \frac{\sigma_{22} \sigma_{33}}{\sigma_{22pl} \sigma_{33pl}} + \frac{\sigma_{33}^2}{\sigma_{33pl}^2} - \frac{\sigma_{11} \sigma_{33}}{\sigma_{11pl} \sigma_{33pl}} = 1$$

Również Prager przedstawił uogólnienie energii odkształcenia postaciowego dla przypadku płaskiego stanu naprężenia ciała ortotropowego [13]:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{11pl}^2} - \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{11pl} \sigma_{22pl}} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22pl}^2} \right)^3 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11pl}} + \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22pl}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11pl}} - \frac{2\sigma_{22}}{\sigma_{22pl}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22pl}} + \frac{2\sigma_{11}}{\sigma_{11pl}} \right)^2 = 1$$

Wstawiając do hipotezy Hubera-Misesa charakterystyki sprężyste i wytrzymałościowe materiału w kierunkach głównych osi anizotropii, Fischer [14] przedstawił warunek wytrzymałościowy dla materiałów ortotropowych:

$$\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{11R}^2} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22R}^2} + \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12S}^2} - K \frac{\sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{11R} \sigma_{22R}} = 1$$

gdzie:
$$K = \frac{E_{11}(1 + \nu_{21}) + E_{22}(1 + \nu_{12})}{2\sqrt{E_{11}E_{22}(1 + \nu_{21})(1 + \nu_{12})}}$$

W postaci wielomianu czwartego stopnia podała kryterium Aszkenazi [15]. Szerokie zastosowanie dla materiałów ortotropowych liniowo sprężystych ma hipoteza Hoffmana [16]:

$$\frac{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22}}{\sigma_{11R} \sigma_{11C}} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22R} \sigma_{22C}} + \left(\frac{\sigma_{11C} - \sigma_{11R}}{\sigma_{11R} \sigma_{11C}} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{\sigma_{22C} - \sigma_{22R}}{\sigma_{22R} \sigma_{22C}} \right) \sigma_{22} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12S}} \right)^2 = 1$$

Wymienione hipotezy wyteżenia materiałów anizotropowych można podzielić na następujące grupy:

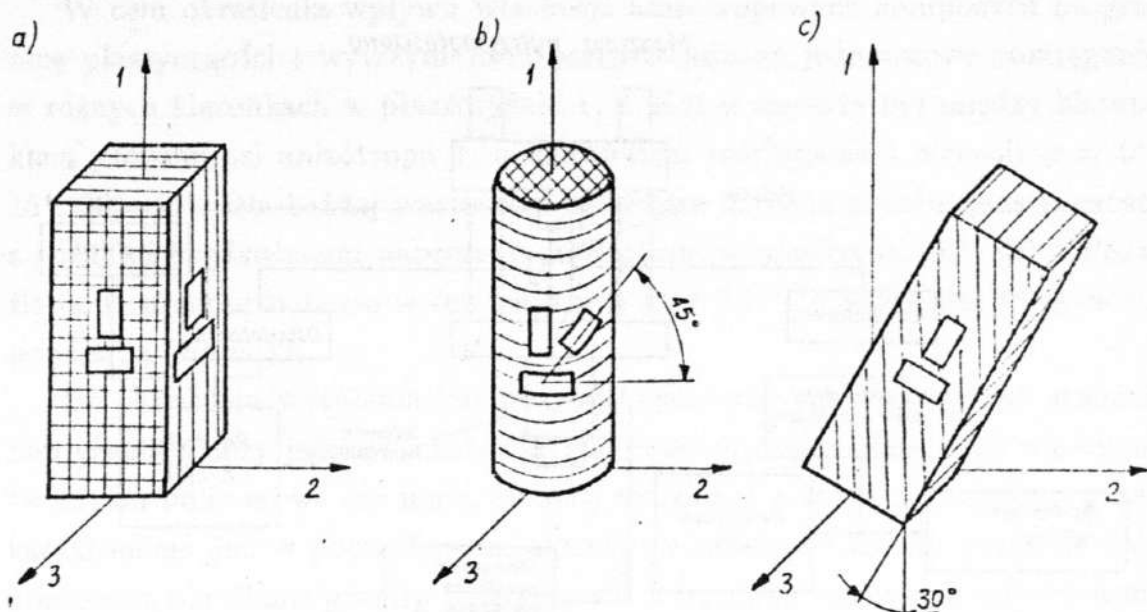
- hipotezy wyrażone przez granice wytrzymałości: Goldenblata, Kopnowa [3], Fischera [14], Hoffmana [16], Marina [11], Tsai-Wu [16], Zacharowa [12],
- hipotezy wyrażone przez granice plastyczności: Azzi-Tsai [1], Hilla [9, 10], Hu-Marina [13], Norrisa [16], Pragera [13],
- hipotezy wyrażone przez stałe sprężystości: Hubera-Misesa [7], Zawadzkiego [5],
- hipotezy dla materiałów o ogólnej anizotropii: Hubera-Misesa, Goldenblata-Kopnowa, Misesa-Hilla, Zawadzkiego,
- hipotezy dla materiałów ortotropowych: Aszkenazi, Azzi-Tsai, Fischera, Hoffmana, Hu-Marina, Norrisa, Pragera, Tsai-Wu, Zacharowa,
- hipotezy dla materiałów o równej granicy wytrzymałości przy rozciąganiu i ściskaniu: Aszkenazi, Azzi-Tsai, Fischera, Hubera-Misesa, Hilla, Hu-Marina, Norrisa, Pragera, Zawadzkiego,
- hipotezy dla materiałów o różnej granicy wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie: Goldenblata-Kopnowa, Hoffmana, Marina, Tsai-Wu, Zacharowa.

Do badań eksperymentalnych wyteżenia przyjęto lepkosprężysty kompozyt polimerowy otrzymany z żywicy E-53 i tkaniny rovingowej STR-58. Ponieważ tworzywo to jest wrażliwe na prędkość obciążenia, postanowiono zbadać jego wpływ na granicę plastyczności i wytrzymałości w zakresie małych prędkości naprężenia.

2. Metoda badań doświadczalnych

Tworzywo w postaci płyt otrzymano przez laminowanie na płycie szklanej. Kierunki osnowy i wążku wszystkich warstw tkaniny w płycie pokrywały się. Z płyt wycinano próbki pod różnymi kątami φ (kąt zawarty między osią próbki a kierunkiem osnowy), w postaci prostopadłościanów o różnych wymiarach. Technologię wytwarzania próbek w postaci rurek podano w pracy [17].

W przeprowadzonych badaniach układy współrzędnych prostokątnych 1, 2, 3 były na stałe związane z tworzywem i pokrywały się z głównymi osiami anizotropii. Kierunek 1 pokrył się z kierunkiem osnowy, 2 – z kierunkiem wążku, a 3 – kierunek prostopadły do warstw tkaniny w tworzywie. Tworzywo



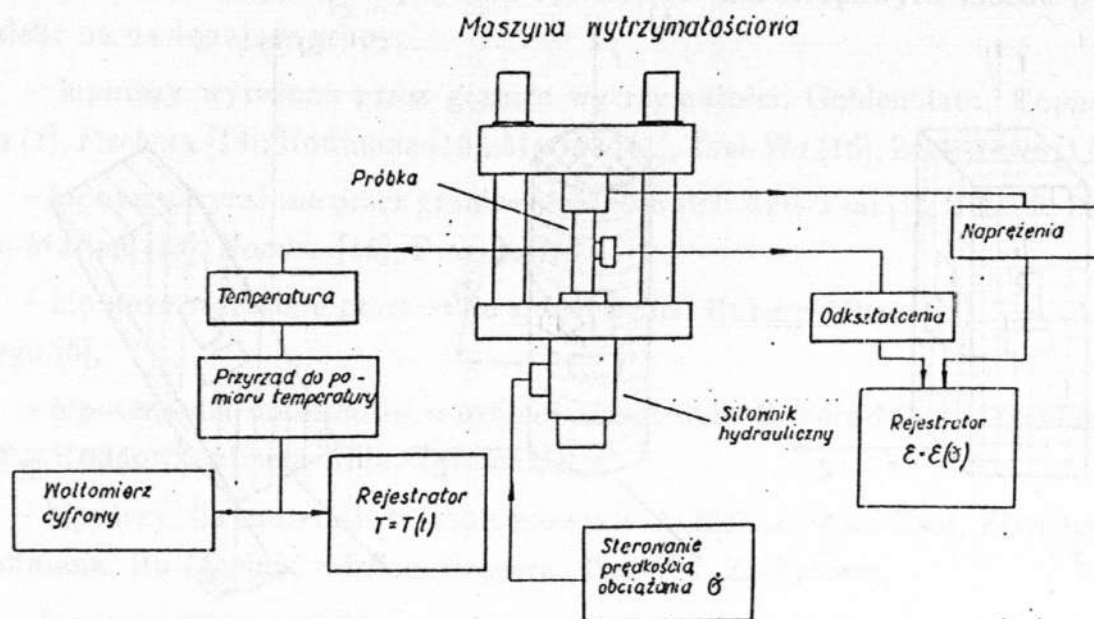
Rys. 1. Próbkki do określenia stałych sprężystych

jest ciałem ortotropowym, w którym liczba włókien osnowy i wątku w tkaninie jest równa, co powoduje, że jednakowe są właściwości mechaniczne tworzywa w kierunkach 1 i 2.

Moduły Younga, moduły sprężystości postaciowej oraz liczby Poissona dla poszczególnych kierunków określono w badaniach, w których mierzono przyrosty odkształcenia odpowiadające danym przyrostom obciążenia. Odkształcenia mierzono aparaturą elektrozrezystancyjną. Próbkki z rozmieszczonymi tensometrami przedstawia rys. 1. Określone stałe sprężyste dla badanego tworzywa wynoszą:

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= E_{22} = 13\,900 \text{ MPa}, & \nu_{12} &= \nu_{21} = 0,1628, \\
 E_{33} &= 6\,560 \text{ MPa}, & \nu_{13} &= \nu_{23} = 0,3459, \\
 G_{12} &= 1\,134 \text{ MPa}, & \nu_{31} &= \nu_{32} = 0,1630, \\
 G_{13} &= G_{23} = 1\,869 \text{ MPa}.
 \end{aligned}$$

Badania wytrzymałości kompozytu w złożonych stanach naprężenia przeprowadzono na wykonanym w tym celu urządzeniu, które składa się z zespołów: pełzarki DST-5000, zespołu realizującego skręcenie, rewersu i zasilacza hydraulicznego. Na rys. 2 przedstawiony jest schemat blokowy aparatury użytej do badań wpływu prędkości obciążenia na fizyczną granicę plastyczności w jednoosiowych stanach naprężenia. Stałe prędkości obciążenia utrzymywane



Rys. 2. Schemat blokowy aparatury do badań wpływu prędkości obciążenia na granicę plastyczności

są automatycznie lub sterowane ręcznie. Dokładny opis urządzenia przedstawiono w [18, 19].

Do pomiaru składowych tensora odkształceń podczas badań zastosowano kilka technik pomiarowych. Z powodzeniem zastosowano tensometryczną aparaturę elektrorezystancyjną z automatyczną rejestracją wyników [19], ze względu na małe odkształcenia względne otrzymane z części przeprowadzonych prób. Zastosowano też tensory mechaniczne, urządzenia optyczne i przetworniki indukcyjne.

Program badań obejmował złożone stany naprężenia uzyskane z realizacji jednoczesnego działania na próbkę ciśnienia wewnętrznego z udziałem siły osiowej i momentu skręcającego dla różnych prostych dróg obciążenia.

Granice plastyczności i wytrzymałości określono przy prędkości intensywności naprężeń równych $\dot{\sigma}_i = 0,11; 0,277; 1,0$ oraz $2,2$ Pa/s. Intensywność naprężeń określono według hipotezy Goldenblata-Kopnowa. Rozciąganie z jednoczesnym skręcaniem przeprowadzono dla stosunków naprężeń stycznych do normalnych równych $k = 0; 0,25; 1,0$ oraz ∞ . Natomiast obciążenie próbki ciśnieniem wewnętrznym i siłą osiową zrealizowano dla stosunku naprężeń $m = \sigma_{11}/\sigma_{22} = 0; 0,5$ oraz $1,0$.

W celu określenia wpływu własności anizotropowych kompozytu na granicę plastyczności i wytrzymałości przeprowadzono jednoosiowe rozciąganie w różnych kierunkach w płaszczyźnie 1, 2. Kąt φ zawarty był między kierunkiem głównej osi anizotropii 1, a kierunkiem rozciągania i wynosił $\varphi = 0^\circ$; 15° ; 30° ; 45° . Dla każdej wartości φ określono fizyczną granicę plastyczności z różnymi prędkościami naprężenia zawartymi w przedziale (0,1–26) MPa/s. Badania przeprowadzono w temperaturze $21 \pm 0,2$ °C i względnej wilgotności powietrza (40–50)%.

Do określenia wyężenia kompozytów polimerowych w złożonych stanach naprężenia należy jednoznacznie określić granicę plastyczności. Jak wiadomo, tworzywa polimerowe nie mają liniowej zależności między obciążeniem a odkształceniem już w początkowym okresie obciążenia. Fakt ten utrudnia jednoznaczne określenie granicy plastyczności z warunku umownych odkształceń. Tylko przy obciążeniach tworzywa wzdłuż kierunku włókien wzmacniających obserwuje się prawie liniową zależność między obciążeniami a odkształceniami. Tak więc celowe jest przyjęcie innej miary odkształceń niebezpiecznych ciała w złożonych stanach naprężenia.

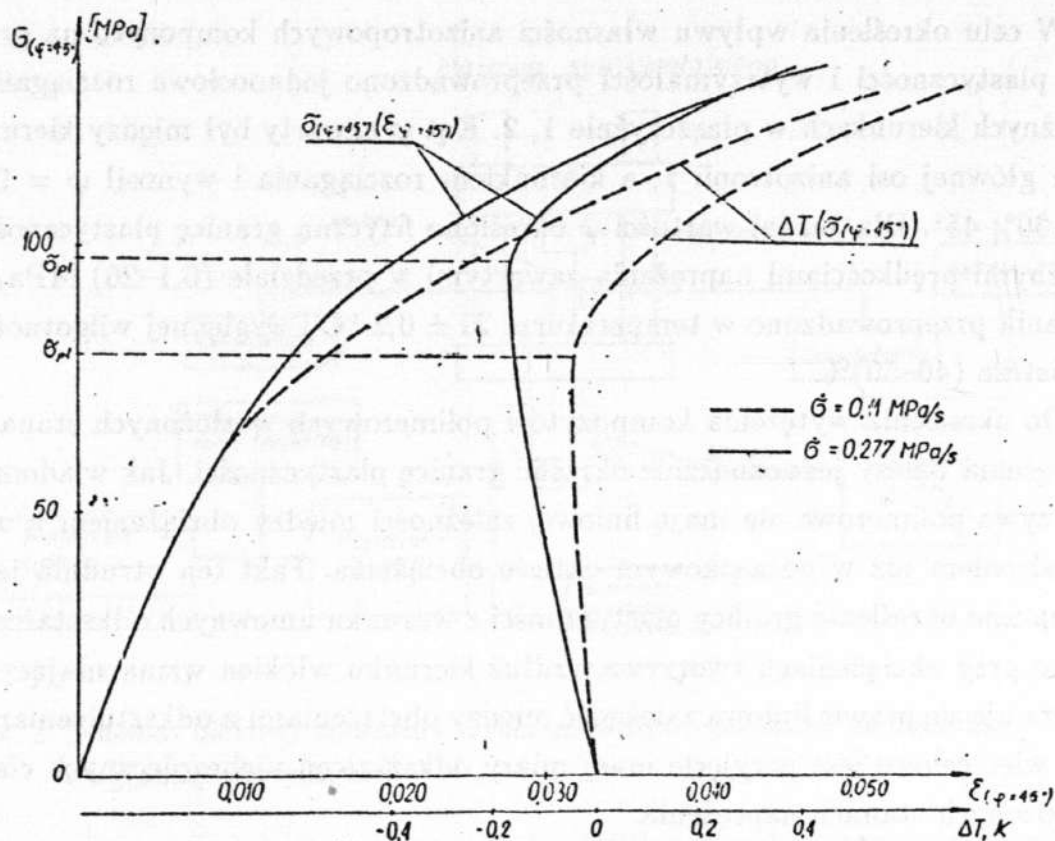
Wykorzystując zjawisko sprzężenia termomechanicznego w procesie adiabatycznym, w przypadku zmiany naprężenia w zakresie sprężystym, następuje zmiana temperatury według równania Kelvina [20].

$$(*) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{T}{\rho C_V} \alpha_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$$

gdzie T oznacza stałą temperaturę, t czas, α_{ij} termiczne współczynniki liniowej rozszerzalności, ε_{ij} składowe tensora odkształcenia, C_V ciepło właściwe przy stałej objętości oraz ρ gęstość.

Z równania (*) wynika, że przy adiabatycznym jednoosiowym rozciąganiu materiałów, gdy $\sigma_{ij} > 0$, przyrost temperatury jest ujemny, natomiast w przypadku jednoosiowego ściskania ($\sigma_{ij} < 0$) przyrost jest dodatni. Przy skręcaniu względem jednej z głównych osi anizotropii materiału ortotropowego ($\sigma_{ij} = 0$) przyrost temperatury w zakresie odkształceń sprężystych jest równy zeru. Tylko składowe tensora kulistego odkształceń biorą udział w zmianie entropii, a więc i zmianie temperatury ciała. Zależności te analitycznie opisane są między innymi w [22].

Podczas adiabatycznego rozciągania próbki w zakresie sprężystym obser-



Rys. 3. Zależność temperatury i odkształceń od naprężeń tworzywa rozciąganego w kierunku $\varphi = 45^\circ$

wuje się proporcjonalne do siły rozciągającej obniżenie temperatury próbki, następnie po pojawieniu się pierwszych odkształceń plastycznych temperatura wzrasta. W procesie deformacji plastycznej wywołanej rozciąganiem, ścisaniem, skręcaniem lub złożonym stanem naprężenia zawsze występuje wzrost temperatury. Jest to wynik zamiany na ciepło dysypowanej pracy plastycznej. Adiabatyczne nagrzewanie się deformowanego ciała jest sprzężeniem termodynamicznym w zakresie plastycznym ciała obciążonego. Tak więc miarą granicy plastyczności jest gwałtowny przyrost temperatury próbki (rys. 3). Ponieważ przy określeniu granicy plastyczności w przypadku obciążenia próbki ciśnieniem wewnętrznym trudno jest zrealizować proces adiabatyczny, dlatego w tym przypadku granicę plastyczności określono z odkształceń umownych. Dokładnego pomiaru temperatury próbki dokonywano za pomocą zestawu pomiarowego, składającego się z termistora, przetwornika, woltomierza cyfrowego oraz rejestratora. Zestaw ten dokładnie opisano w pracach [20, 23].

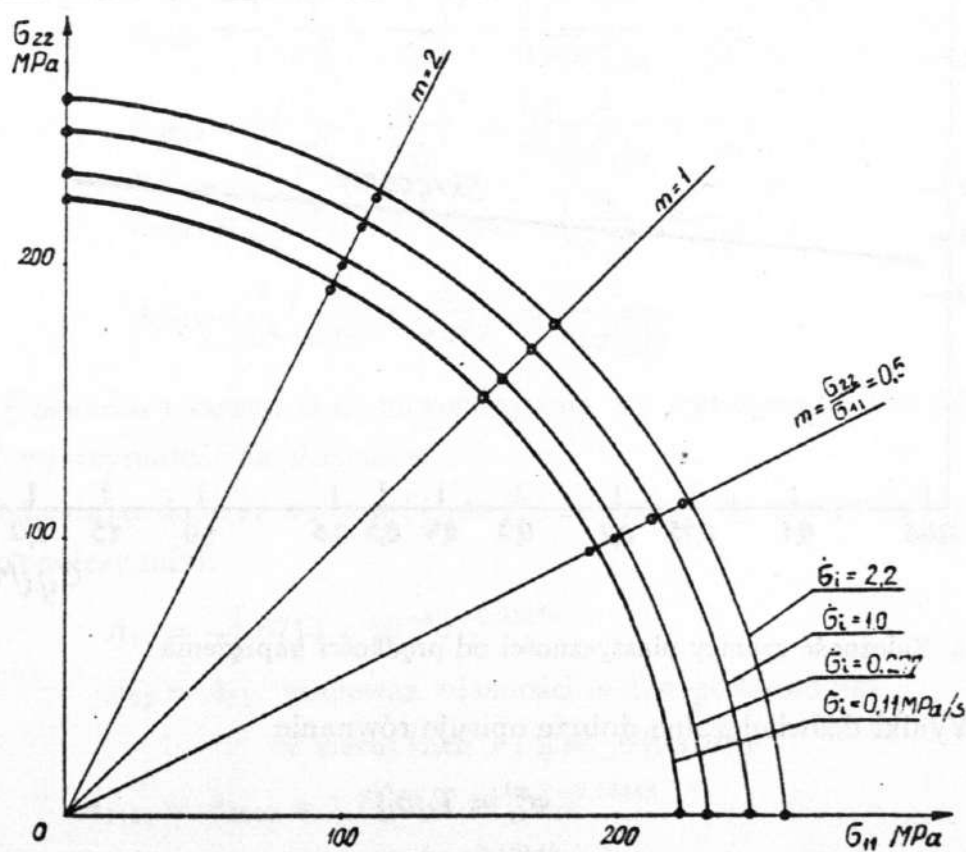
3. Modyfikacja wybranych hipotez wyężenia materiałów anizotropowych

W materiałach lepkosprężystych za stan krytyczny przyjmuje się osiągnięcie naprężenia równego granicy plastyczności. Brak jest publikacji dotyczących opisu wpływu prędkości naprężeń na granicę plastyczności materiałów lepkosprężystych w złożonych stanach naprężenia. W związku z tym podjęto próbę zmodyfikowania hipotez wyężenia, aby uwzględniły wpływ prędkości obciążenia. Po wstępnej analizie przeprowadzonej w punkcie 1 do modyfikacji wybrano hipotezy: Goldenblata-Kopnowa, Hubera-Misesa i Hoffmana.

3.1. Modyfikacja warunku wytrzymałościowego Goldenblata-Kopnowa.

Przyjmując dwa pierwsze wyrazy szeregu wyrażającego kryterium wytrzymałości ciał anizotropowych za [2] napiszemy:

$$(1) \sum_{i,k} A_{ik} \sigma_{ik} + \left(\sum_{p,q,r,s} A_{pqrs} \sigma_{rs} \right)^{0,5} = 1 \quad \text{dla } i, k = 1, 2, 3 \text{ i } p, q, r, s = 1, 2, 3,$$

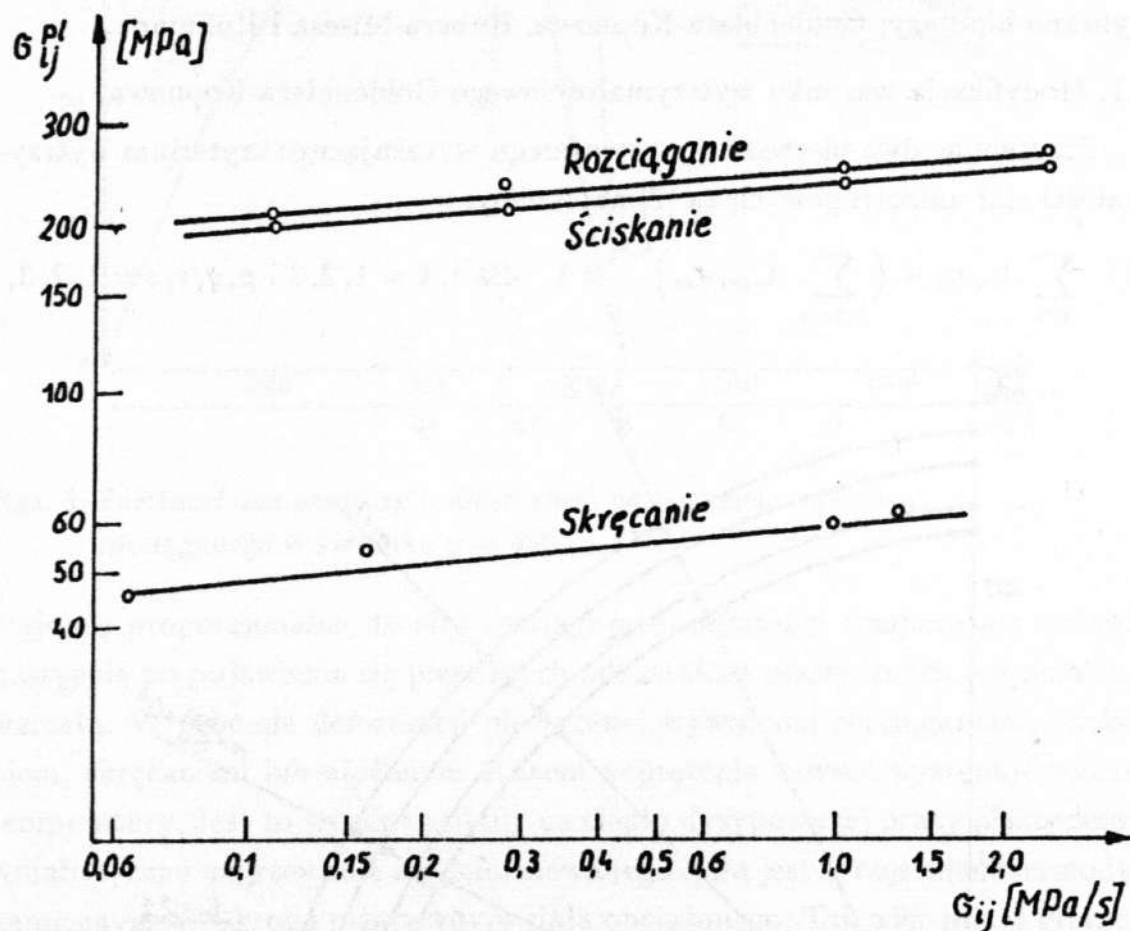


Rys. 4. Doświadczalne powierzchnie plastyczności określone przy jednoczesnym obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym i siłą osiową

gdzie A_{ik} , A_{pqrs} oznaczają stałe określone przez wytrzymałość przy rozciąganiu, ścisaniu i skręcaniu. Dla płaskiego stanu naprężenia równanie (1) w zapisie rozwiniętym przedstawia się następująco:

$$(2) \quad A_{11}\sigma_{11} + A_{22}\sigma_{22} + (A_{1111}\sigma_{11}^2 + A_{2222}\sigma_{22}^2 + 2A_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + 4A_{1212}\sigma_{12}^2)^{0,5} = 1$$

Doświadczalnie wyznaczone granice plastyczności kompozytu w zależności od prędkości naprężenia przy rozciąganiu, skręcaniu przedstawiono we współrzędnych i logarytmicznych na rys. 5.



Rys. 5. Zależność granicy plastyczności od prędkości naprężenia

Wyniki doświadczalne dobrze opisuje równanie

$$(3) \quad \sigma_{ij}^p = T_{ij} \dot{\sigma}_{ij}^{r_{ij}}$$

gdzie: T_{ij} – posiada wartość granicy plastyczności dla $\dot{\sigma}_{ij} = 1,0$ MPa/s

r_{ij} – stała wyznaczana doświadczalnie

Wyznaczone wielkości są następujące:

w przypadku rozciągania w kierunku głównej osi anizotropii:

$$(\sigma_{11}^{pl})_R = 249,38 \dot{\sigma}_{11}^{0,05274}$$

w przypadku ściskania: $(\sigma_{11}^{pl})_C = 230,19 \dot{\sigma}_{11}^{0,05274}$

$$(4) \quad \text{w przypadku skręcania: } (\sigma_{12}^{pl})_S = 60,64 \dot{\sigma}_{12}^{0,09245}$$

w przypadku skręcania próbki rurkowej, w której oś próbki tworzyła z kierunkiem głównej osi anizotropii kąt 45° :

$$(\sigma_{12}^{pl})_{\varphi=45^\circ} = 173,40 \dot{\sigma}_{12}^{0,05274}$$

W obliczeniach stałych A_{ij} i A_{pqrs} występujących w równaniu (2), zamiast wytrzymałości na rozciąganie, ściskanie przyjęto zależności wyrażone wzorami:

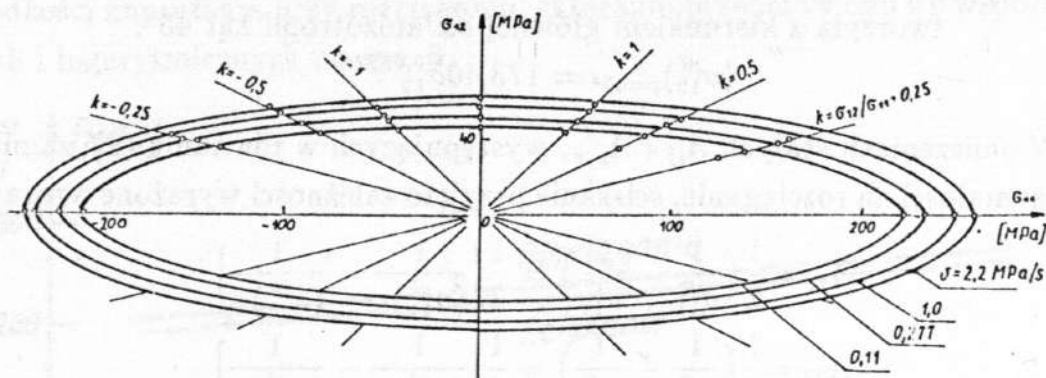
$$(5) \quad \begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{11}^R} - \frac{1}{\sigma_{11}^C} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\sigma_{11}^{pl})_R} - \frac{1}{(\sigma_{11}^{pl})_C} \right] \\ A_{22} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{22}^R} - \frac{1}{\sigma_{22}^C} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\sigma_{22}^{pl})_R} - \frac{1}{(\sigma_{22}^{pl})_C} \right] \\ A_{1111} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_{11}^R} + \frac{1}{\sigma_{11}^C} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(\sigma_{11}^{pl})_R} + \frac{1}{(\sigma_{11}^{pl})_C} \right]^2 \\ A_{2222} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_{22}^R} + \frac{1}{\sigma_{22}^C} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(\sigma_{22}^{pl})_R} + \frac{1}{(\sigma_{22}^{pl})_C} \right]^2 \\ A_{1122} &= \frac{1}{8} \left[4A_{1111} + 4A_{2222} - \left(\frac{1}{\sigma_{45}^{+S}} + \frac{1}{\sigma_{45}^{-S}} \right)^2 \right] \\ A_{1212} &= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{\sigma_{+S}} + \frac{1}{\sigma_{-S}} \right)^2 = \frac{1}{4(\sigma_{12}^{pl})_S^2} \end{aligned}$$

gdzie σ_{ii}^R oznacza wytrzymałość na rozciąganie, σ_{ii}^C wytrzymałość na ściskanie oraz σ^S wytrzymałość na skręcanie.

Podstawiając dane ze wzorów (4) do (5) otrzymuje się następujące zależności od $\dot{\sigma}_{ij}$ współczynniki:

$$(6) \quad \begin{aligned} A_{11} &= -1,6714 \times 10^{-4} \dot{\sigma}_{11}^{-0,05274} \\ A_{22} &= A_{11}, \text{ ponieważ własności badanego tworzywa} \\ &\quad \text{w kierunkach 1 i 2 są jednakowe} \\ A_{1111} &= A_{2222} = 1,7448 \times 10^{-5} \dot{\sigma}_{11}^{-0,10548} \\ A_{1122} &= -1,8461 \times 10^{-5} \dot{\sigma}_{11}^{-0,10548} \\ A_{1212} &= 6,7995 \times 10^{-5} \dot{\sigma}_{11}^{-0,18492} \end{aligned}$$

Po podstawieniu obliczonych współczynników (6) do równania (2) otrzymuje się wzór na granicę plastyczności w zależności od prędkości naprężenia dla płaskiego stanu naprężenia. Rys. 6 przedstawia wyniki obliczeń dla przypadku rozciągania i ściągania z jednoczesnym skręcaniem tworzywa dla stosunków naprężeń stycznych do normalnych $k = 0; 0,25; 0,5; \infty; -0,25; -0,5$ oraz $1,0$, a prędkości naprężeń były równe $\dot{\sigma}_i = 0,11; 0,277; 1,0$ oraz $2,2$ MPa/s.



Rys. 6. Wyniki obliczeń granicy plastyczności od prędkości naprężenia wg hipotezy Goldenblata-Kopnowa. Punkty – wyniki doświadczalne

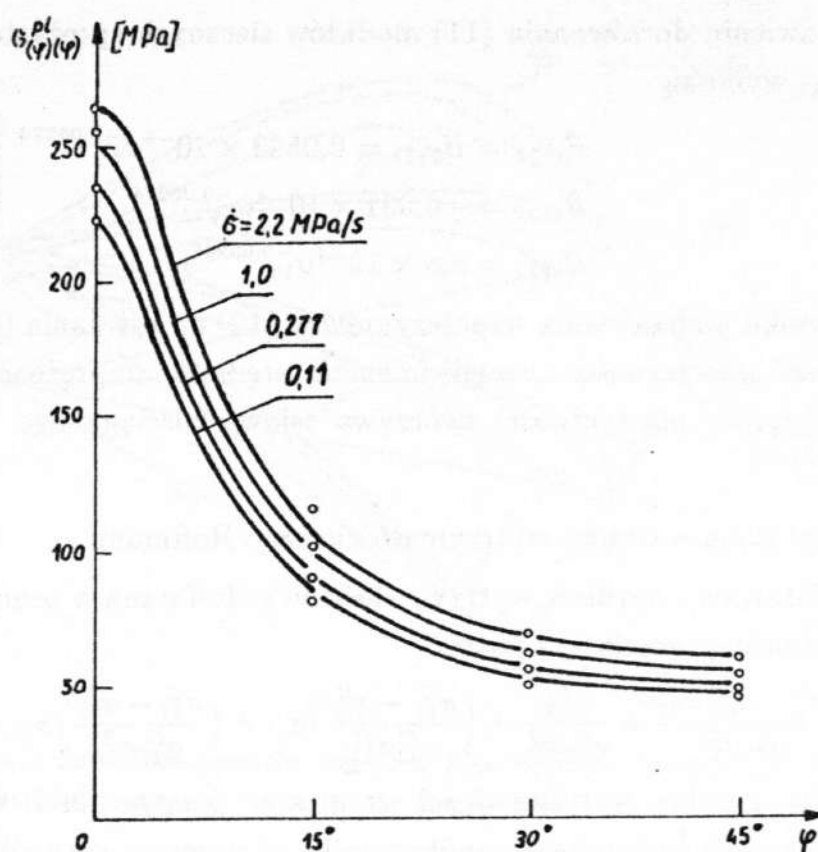
W przypadku rozciągania kompozytu w dowolnym kierunku φ , kryterium wytrzymałości [2] przy zmianie granicy wytrzymałości na granicę plastyczności ma postać

$$(7) \quad \sigma_{\varphi}^{pl} = \frac{1}{\left(\sum_{p,q} \alpha_{1p} \alpha_{1q} A_{qp} + \left(\sum_{p,q,r,s} \alpha_{1p} \alpha_{1q} \alpha_{1r} \alpha_{1s} A_{pqrs} \right)^{0,5} \right)^{0,5}}$$

Dla przypadku rozciągania w płaszczyźnie 1, 2 w kierunku φ (φ oznacza kąt zawarty między kierunkiem 1, a kierunkiem rozciągania) wzór napiszemy w postaci rozwiniętej:

$$(8) \quad \frac{1}{\sigma_{\varphi}^{pl}} = A_{11} \cos^2 \varphi + A_{22} \sin^2 \varphi + \left[A_{1111} \cos^4 \varphi + A_{2222} \sin^4 \varphi + \left(A_{1212} + \frac{1}{2} A_{1122} \right) \sin^2 2\varphi \right]^{0,5}$$

Podstawiając (3) do równania (8), otrzymamy granicę plastyczności jako funkcję prędkości naprężenia przy rozciąganiu tworzywa w kierunku φ . Dla badanego kompozytu rozciąganego w kierunkach $\varphi = 0^{\circ}; 15^{\circ}; 30^{\circ}$ i 45° wyniki doświadczalne i uzyskane z obliczeń przedstawia rys. 7. Ponieważ w rozpatrywanym tworzywie liczba włókien wążku i osnowy w tkaninie jest jed-



Rys. 7. Wyniki obliczeń granicy plastyczności od prędkości naprężenia wg hipotezy Goldenblata-Kopnowa tworzywa rozciąganego w kierunkach φ

nakowa, przyjęte kierunki są wystarczające do określenia tworzywa w przedziale $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

3.2. Modyfikacja warunku wytrzymałościowego Hubera-Misesa

Warunek plastyczności Hubera-Misesa rozszerzony na materiały anizotropowe w [7] ma postać

$$(9) \quad B_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - B_{(i)(j)(k)(l)}\sigma_{o(i)(j)}\sigma_{o(i)(j)} = 0$$

Dla płaskiego stanu naprężenia materiału ortotropowego warunek plastyczności w postaci rozwiniętej przedstawia się następująco:

$$(10) \quad B_{1111}\sigma_{11}^2 + B_{2222}\sigma_{22}^2 + B_{1212}\sigma_{12}^2 + B_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} - B_{(i)(j)(k)(l)}\sigma_{o(i)(j)}\sigma_{o(i)(j)} = 0$$

gdzie

$$(11) \quad B_{ijkl} = a_{ijkl} - \frac{1}{9}a_{qqpp}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

Po podstawieniu do równania (11) modułów siecznych sprężystości określone stałe B_{ijkl} wynoszą

$$(12) \quad \begin{aligned} B_{1111} &= B_{2222} = 0,0523 \times 10^{-5} \dot{\sigma}_{11}^{-0,05274} \\ B_{1122} &= -0,031 \times 10^{-4} \dot{\sigma}_{11}^{-0,05274} \\ B_{1212} &= 8,8 \times 10^{-4} \dot{\sigma}_{11}^{-0,09246} \end{aligned}$$

W wyniku podstawienia współczynników (12) do równania (10) otrzymuje się warunek plastyczności z uwzględnieniem prędkości naprężenia. Jako $\sigma_{\alpha(i)(j)}$ przyjęto granicę plastyczności tworzywa osiowo rozciąganego w kierunku 1 przy $\dot{\sigma}_{11}^{-0,05274}$.

3.3. Modyfikacja warunku wytrzymałościowego Hoffmana

Przedstawiony warunek wytrzymałościowy Hoffmana w pracy [16] dla płaskiego stanu naprężenia ma postać

$$(13) \quad \frac{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}}{\sigma_{11}^C \sigma_{11}^R} + \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^C \sigma_{22}^R} + \left(\frac{\sigma_{11}^C - \sigma_{11}^R}{\sigma_{11}^C \sigma_{11}^R} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{\sigma_{22}^C - \sigma_{22}^R}{\sigma_{22}^C \sigma_{22}^R} \right) \sigma_{22} + \left(\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^S} \right)^2 = 1$$

Zastępując granice wytrzymałości granicami plastyczności w postaci (4) i wprowadzając uzmiennione współczynniki, otrzymano warunek plastyczności uwzględniający prędkość naprężeń:

$$(14) \quad H_{1111}(\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) + H_{2222}\sigma_{22}^2 + H_{11}\sigma_{11} + H_{22}\sigma_{22} + H_{1122}\sigma_{12}^2 = 1$$

gdzie: $H_{11} = 3,3429 \times 10^{-4} \dot{\sigma}_{11}^{-0,05274}$

$$H_{1111} = 1,7420 \times 10^{-5} \dot{\sigma}_{11}^{-0,10548}$$

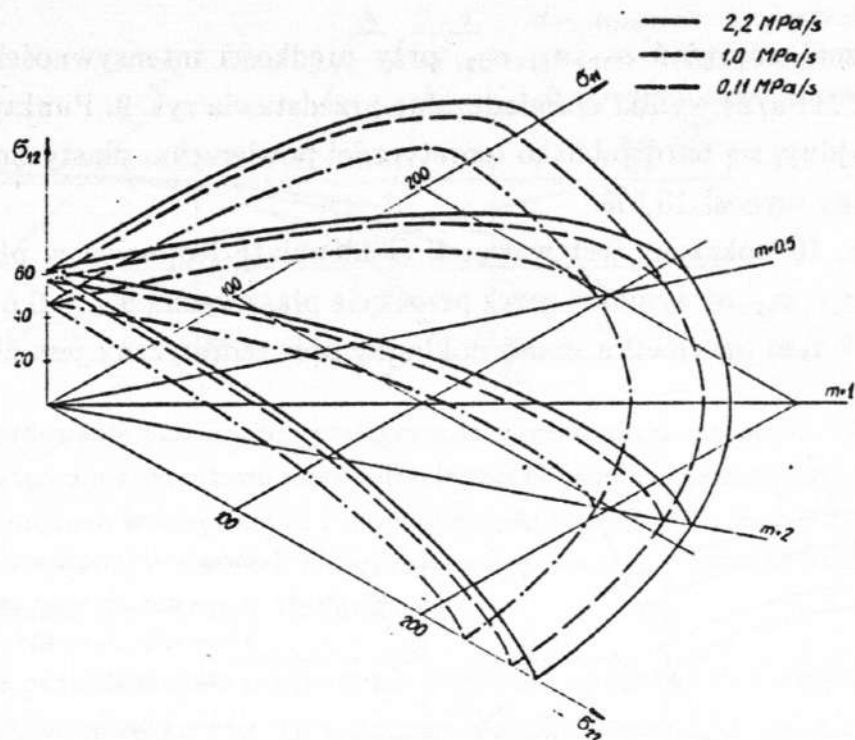
$$H_{1122} = 2,7198 \times 10^{-4} \dot{\sigma}_{12}^{-0,10548}$$

$$H_{11} = H_{22}, \quad H_{1111} = H_{2222}$$

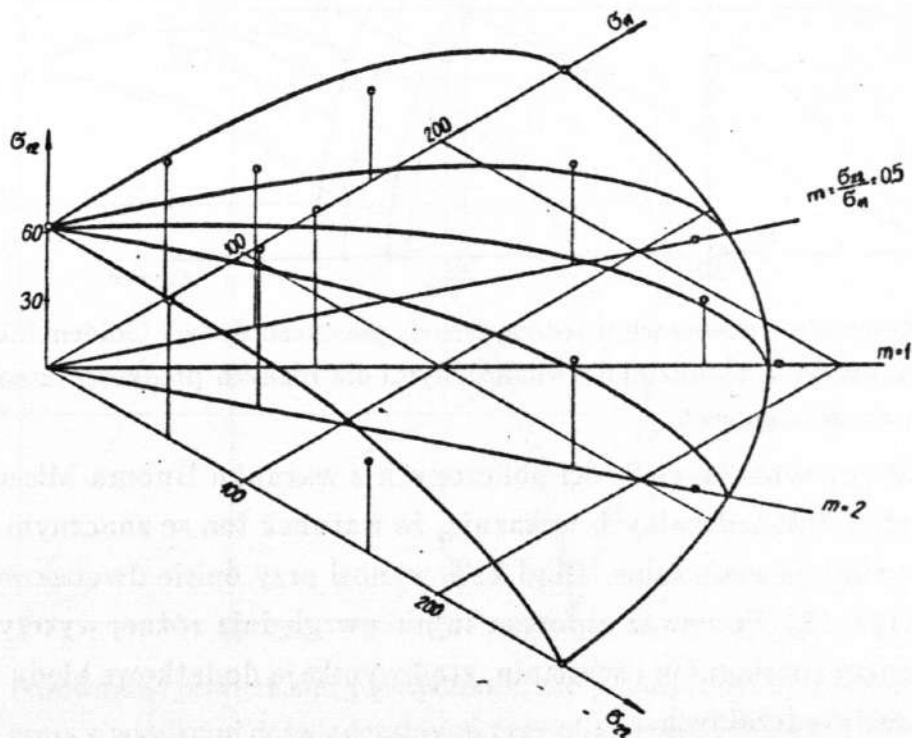
ponieważ liczba włókien wążku i osnowy w badanym tworzywie jest taka sama.

4. Weryfikacja zmodyfikowanych hipotez wyciężenia materiałów anizotropowych

Doświadczalną weryfikację hipotezy Goldenblata-Kopnowa, uwzględniającą wpływ prędkości naprężenia, przy ciśnieniu wewnętrznym z jednoczesnym rozciąganiem i skręcaniem, przedstawiają rys. 8-12. Na rys. 8 przedstawiono teoretyczne powierzchnie plastyczności w przestrzeni naprężeń σ_{12} , σ_{11} , σ_{22} dla trzech prędkości naprężenia. Teoretyczną powierzchnię plastyczności



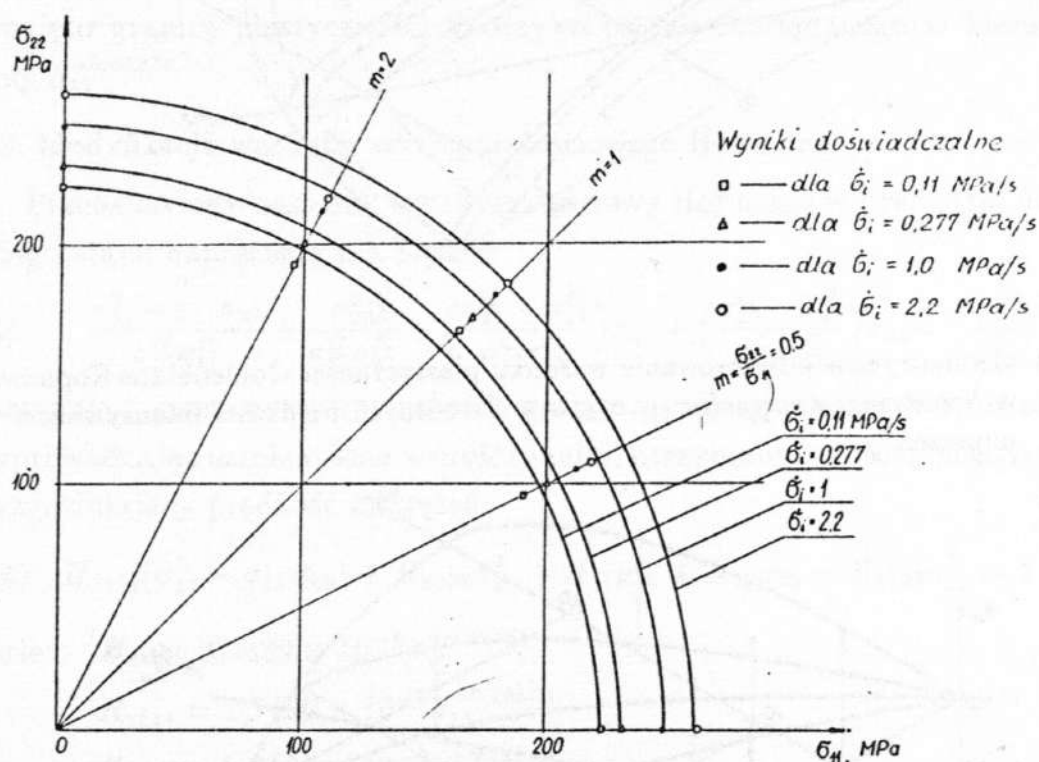
Rys. 8. Geometryczne odwzorowanie warunku plastyczności Goldenblata-Kopnowa w przestrzeni naprężeń σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} dla różnych prędkości intensywności naprężeń



Rys. 9. Doświadczalna weryfikacja warunku plastyczności Goldenblata-Kopnowa w przestrzeni naprężeń dla $\dot{\sigma}_i = 2,2$ MPa/s. Punkty - wyniki doświadczalne

w przestrzeni naprężeń $\sigma_{12}, \sigma_{11}, \sigma_{22}$, przy prędkości intensywności naprężeń równej 2,2 MPa/s i wyniki doświadczalne przedstawia rys. 9. Punkty doświadczalne znajdują się bardzo blisko teoretycznej powierzchni plastyczności. Błąd maksymalny wynosi 15,5%.

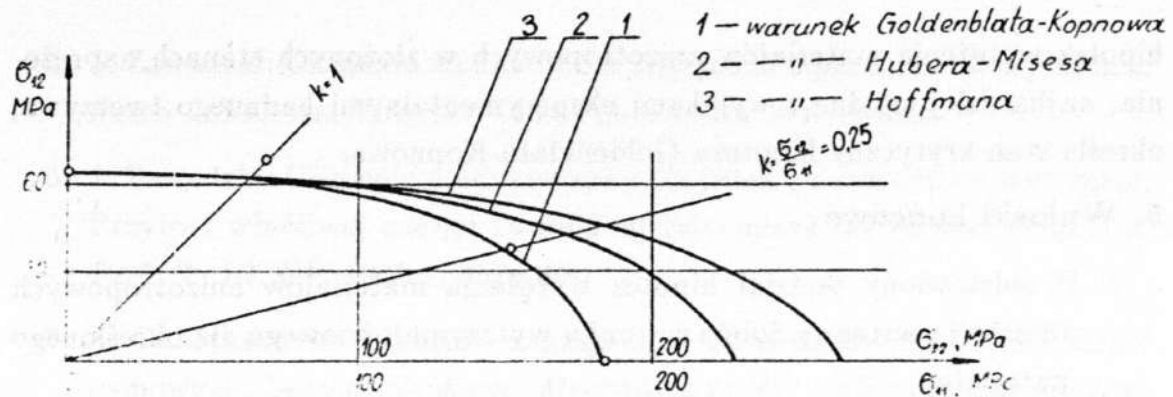
Na rys. 10 pokazany jest warunek Goldenblata-Kopnowa w płaszczyźnie naprężeń σ_{11}, σ_{12} , otrzymanej przez przecięcie płaszczyzną $\sigma_{12} = 0$ powierzchni z rys. 8. W tym przypadku mniej dokładny opis teoretyczny jest dla $m = 0,5$ i $m = 2,0$.



Rys. 10. Porównanie powierzchni teoretycznych plastyczności wg Goldenblata-Kopnowa z wynikami doświadczalnymi dla różnych prędkości intensywności naprężeń

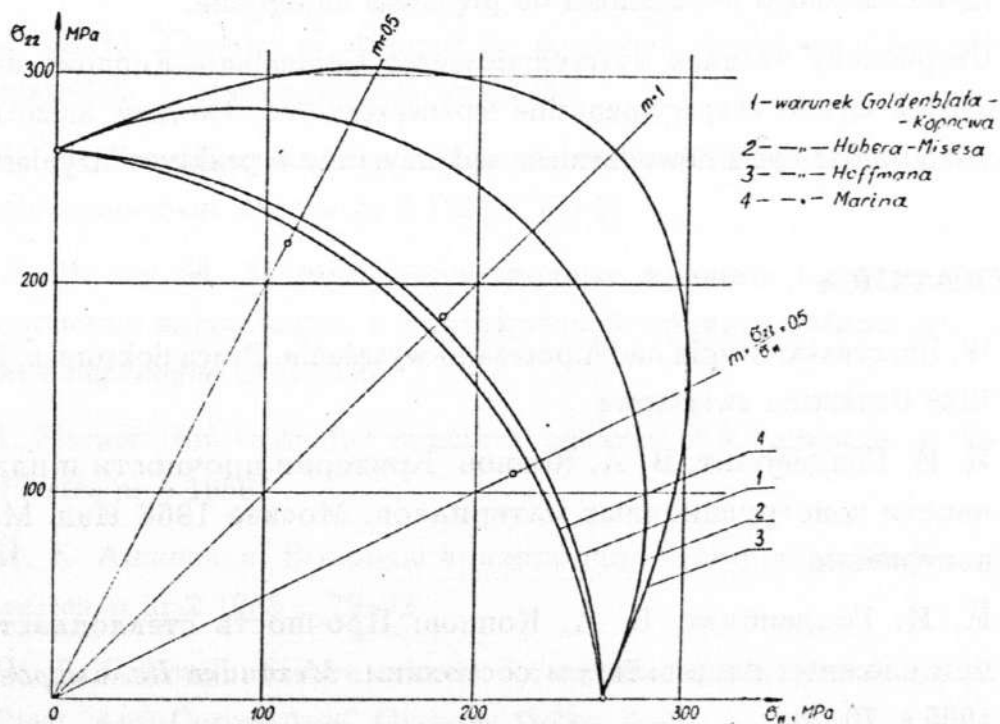
Wyniki porównania wielkości obliczonych z warunku Hubera-Misesa z wynikami badań doświadczalnych wskazują, że warunek ten ze znacznym błędem opisuje wyniki doświadczalne. Błąd 21% wynosi przy opisie dwuosowego rozciągania (rys. 12). Ponieważ hipoteza ta nie uwzględnia różnej wytrzymałości tworzywa przy rozciąganiu i ściskaniu, stąd wynikają dodatkowe błędy w opisie wyników doświadczalnych.

Hipoteza Hoffmana opisuje wyteżenie materiału z dużymi błędami, na przykład dla drogi obciążenia $m = 0,5$ i $k = 0$ błąd ten wynosi 44,22%. Na



Rys. 11. Porównanie powierzchni plastyczności otrzymanych z różnych hipotez wyciężenia z wynikami doświadczalnymi przy jednoczesnym obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym i momentem skręcającym dla $\dot{\sigma}_i = 2,2$ MPa/s i $m = 0,5$. 1 - warunek Goldenblata-Kopnowa, 2 - warunek Hubera-Misesa, 3 - warunek Hoffmana

rys. 11 i 12 przedstawiono porównanie wielkości obliczonych z rozpatrywanych hipotez. Dodatkowo na rys. 12 pokazano wyniki weryfikacji hipotezy Marina, która dobrze opisuje tylko dwuosiowe rozciąganie i ściskanie. Z weryfikowanych



Rys. 12. Porównanie powierzchni plastyczności otrzymanych z różnych hipotez wyciężenia z wynikami doświadczalnymi przy obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym i siłą osiową dla $\dot{\sigma}_i = 2,2$ MPa/s. 1 - warunek Goldenblata-Kopnowa, 2 - warunek Hubera-Misesa, 3 - warunek Hoffmana, 4 - warunek Marina

hipotez wyężenia materiałów anizotropowych w złożonych stanach naprężenia, najbardziej zgodne z wynikami eksperymentalnymi badanego tworzywa, określa stan krytyczny hipoteza Goldenblata-Kopnowa.

5. Wnioski końcowe

1. Przedstawiony podział hipotez wyężenia materiałów anizotropowych umożliwia wstępny dobór warunku wytrzymałościowego dla określonego materiału.
2. Wykorzystując sprzężenie termomechaniczne podczas obciążenia adiabaticznego określa się jednoznacznie fizyczną granicę plastyczności nieliniowych tworzyw lepkosprężystych.
3. Doświadczalne badania wykazały duży wpływ prędkości naprężenia na granicę plastyczności już przy małych prędkościach naprężenia.
4. Zaproponowana metoda opisu matematycznego wpływu prędkości naprężenia na granicę plastyczności dobrze opisuje stan krytyczny tworzywa badanego w zależności od prędkości naprężenia.
5. Uzupełniony warunek wytrzymałościowy Goldenblata-Kopnowa dobrze opisuje wyniki eksperymentalne lepkosprężystych tworzyw anizotropowych i może być z powodzeniem wykorzystany w praktyce inżynierskiej.

LITERATURA

1. W. Burzyńska: Studia nad hipotezami wyężenia. Praca doktorska. Lwów 1928 Drukarnia związkowa
2. Й. Й. Голденблат, В. А. Копнов: Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. Москва 1968 Изд. Машиностроение
3. Й. Й. Голденблат, В. А. Копнов: Прочность стеклопластиков при сложном напряжённом состоянии. *Механика Полимеров* nr 2 1965 s. 70–78
4. Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев: Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряжённом состоянии. Киев 1969 Изд. Наукова Думка

5. J. Zawadzki: Ciśnienie zredukowane jako jeden z parametrów wyężenia. Praca doktorska. Wrocław 1954 Politechnika Wrocławska
6. J. Zawadzki: Ciśnienie zredukowane jako jeden z parametrów wyężenia. Przyrost właściwej energii swobodnej jako miara wyężenia. *Rozp. Inż. PAN* T. LXXIII 1952 s. 357–398
7. Z. Gabryszewski: Wybrane zagadnienia teorii plastyczności ciał anizotropowych. *Zeszyty Naukowe. Mechanika* nr 203 1968 Politechnika Wrocławska
8. R. Mises: Mechanik der plastischen Formenderung für Kristallen. *Z. Angew. Math. Mech.* B.8H.3.1928
9. R. Hill: The mathematical theory of plasticity. Oxford 1959 Clarendon Press
10. R. Hill: A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. R. Soc.* nr 1033 Series A vol. 193
11. J. Marin: Theories of strength for combined stresses and nonisotropic materials. *J. Astronaut. Sci.* nr 4 1957
12. К. В. Захаров: Критерии прочности для слоистых пластмасс. *Пластическое Массы* nr 8 1961 s. 61–67
13. Л. В. Ху, Ё. Марин: Анизотропные функции нагружения при сложном нагружении в пластической области. *Механика. Сборник переводов* nr 2 1956
14. L. Fischer: How to predict structural behavior of R Laminates. *I. Modern Plastes* nr 6 1960
15. Ё. К. Ашкенази: Вопросы анизотропии прочности. *Механика полимеров* nr 2 1965 s. 79–92
16. W. S. Carewell: Failure criteria for reinforced plastics. Symp. Reinf. Plast. Anti-Corros Appl. Glasgow 1979 s. 1–8
17. S. Ochelski: Analiza pełzania nieliniowych lepkosprężystych tworzyw anizotropowych w złożonych warunkach obciążenia. *Dodatek do Biul. WAT* nr 4 1977

18. R. Cupisz, S. Ochelski, J. Polański: Urządzenie do badań wytrzymałościowych w złożonym stanie naprężenia. X Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego. Warszawa 1982
19. S. Ochelski: Metoda badań pełzania kompozytów polimerowych w złożonych stanach naprężenia. I Sympozjum Zagadnień Pełzania Materiałów. Białystok 1983 s. 177-188
20. S. Ochelski, J. Polański: Fizyczna granica plastyczności lepkosprężystych tworzyw anizotropowych. *Biul. WAT* nr 8 1984
21. Y. C. Fung: Podstawy mechaniki ciała stałego. Warszawa 1969 PWN
22. J. Klepaczko: Sprężenie termomechaniczne w metalach. *Prace IPPT* nr 11 1978
23. J. Polański: Wpływ prędkości obciążenia na granicę plastyczności lepkosprężystego tworzywa ortotropowego w złożonych stanach naprężenia. Praca doktorska. Warszawa 1984 WAT
24. P. Perzyna: Teoria lepkoplastyczności: Warszawa 1966 PWN

Julian Polański

EFFECTS OF LOADING RATE UPON THE YIELD SURFACE OF A VISCOPLASTIC ORTHOTROPIC MATERIAL

Summary

The effects of loading rate on the yield limit of an epoxyglass composite in complex stress states are investigated. Thermo-mechanical coupling effects are used to determine the yield limits. Strength hypotheses of anisotropic materials are analyzed, and analytical formulation of the influence of the loading rate upon the yield limit is proposed. The investigations embraced complex states of stress consisting of axial loading, torsion and internal pressure applied to tubular specimens. Three known strength hypotheses proposed by Hoffman, Huber-Mises and Goldenblat-Kopnov are subject to experimental verification.