

FELICJA WYSOCKA-SCHILLAK

WSP w Bydgoszczy

## ZASTOSOWANIE WYBRANYCH METOD OPTYMALIZACJI W PROCESIE PROJEKTOWANIA ŚRODKOWOPRZEPUSTO- WYCH FILTRÓW *LC*

### 1. Wstęp

Przy projektowaniu filtrów *LC* liniowych, stacjonarnych, o stałych skupionych<sup>1</sup> często zachodzi potrzeba przeprowadzenia aproksymacji pewnej zadanej charakterystyki, bądź też dwóch zadanych charakterystyk. Najczęściej aproksymowane są następujące charakterystyki: zadana charakterystyka tłumienności skutecznej  $A_{s0}$ , zadana charakterystyka tłumienności echowej  $A_{e0}$  i zadana charakterystyka opóźnienia grupowego  $\tau_0 = const$ . Ponieważ nie ma analitycznych metod umożliwiających aproksymację wymienionych charakterystyk, aproksymację taką przeprowadza się różnymi metodami numerycznymi, a obliczenia wykonuje się przy użyciu maszyn cyfrowych. Konkretnie metody rozwiązywania zadań aproksymacji charakterystyk  $A_{s0}$ ,  $A_{e0}$  i  $\tau_0$  opisane są m.in. w pracach [2, 5, 6, 7, 8, 9]. Metody te wykazują jednak szereg niedogodności.

W niniejszej pracy przedstawiono sposób rozwiązania zadań aproksymacji charakterystyk  $A_{s0}$ ,  $A_{e0}$  i  $\tau_0$  w drodze przekształcenia tych zadań w odpowiednie zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami, które są następnie

---

<sup>1</sup>Innych filtrów nie rozpatruje się w niniejszej pracy.

rozwiązywane przy użyciu wybranych metod optymalizacji. Rozpatrywane w pracy zadania aproksymacji dotyczą charakterystyk filtru środkowoprzepustowego. W przypadku aproksymacji charakterystyk  $A_{s0}$ ,  $A_{e0}$  i  $\tau_0$  filtru dolnoprzepustowego, sposób rozwiązywania odpowiednich zadań aproksymacji jest podobny; istnieją natomiast pewne różnice w sformułowaniu tych zadań.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozważmy reaktancyjny filtr włączony między stałe rezystancje. Funkcja przenoszenia  $H(jx)$  takiego filtru jest określona następująco

$$H(jx) \cdot H(-jx) = \frac{P_0}{P_2} \quad (1)$$

gdzie:

$x = \omega/\omega_0$  — częstotliwość zredukowana,

$\omega$  — pulsacja bieżąca,

$\omega_0$  — pulsacja odniesienia,

$P_0$  — moc, jaką źródło wydziela na dopasowanym odbiorniku,

$P_2$  — moc, jaką źródło poprzez rozpatrywany filtr dostarcza do obciążenia.

Funkcja  $H(jx)$  może być również wyrażona jako iloraz dwóch wielomianów  $g(jx)$  i  $f(jx)$

$$H(jx) = \frac{g(jx)}{f(jx)}, \quad (2)$$

przy czym wielomiany te spełniają następujące warunki:

- 1) wielomiany  $g(jx)$  i  $f(jx)$  są rzeczywiste,
- 2) wielomian  $g(jx)$  jest wielomianem Hurwitza, tzn. jego zera muszą znajdować się w lewej otwartej półpłaszczyźnie,

- 3) wielomian  $f(jx)$  jest wielomianem parzystym albo nieparzystym,
- 4) dla  $x \in \langle 0, \infty \rangle$  moduł funkcji przenoszenia  $H(jx)$  powinien być nie mniejszy od jedności.

Pomiędzy funkcją przenoszenia filtru a jego tamownością skuteczną  $\Gamma_s$ , tłumiennością skuteczną  $A_s$  i przesuwnością skuteczną  $B_s$  zachodzi zależność

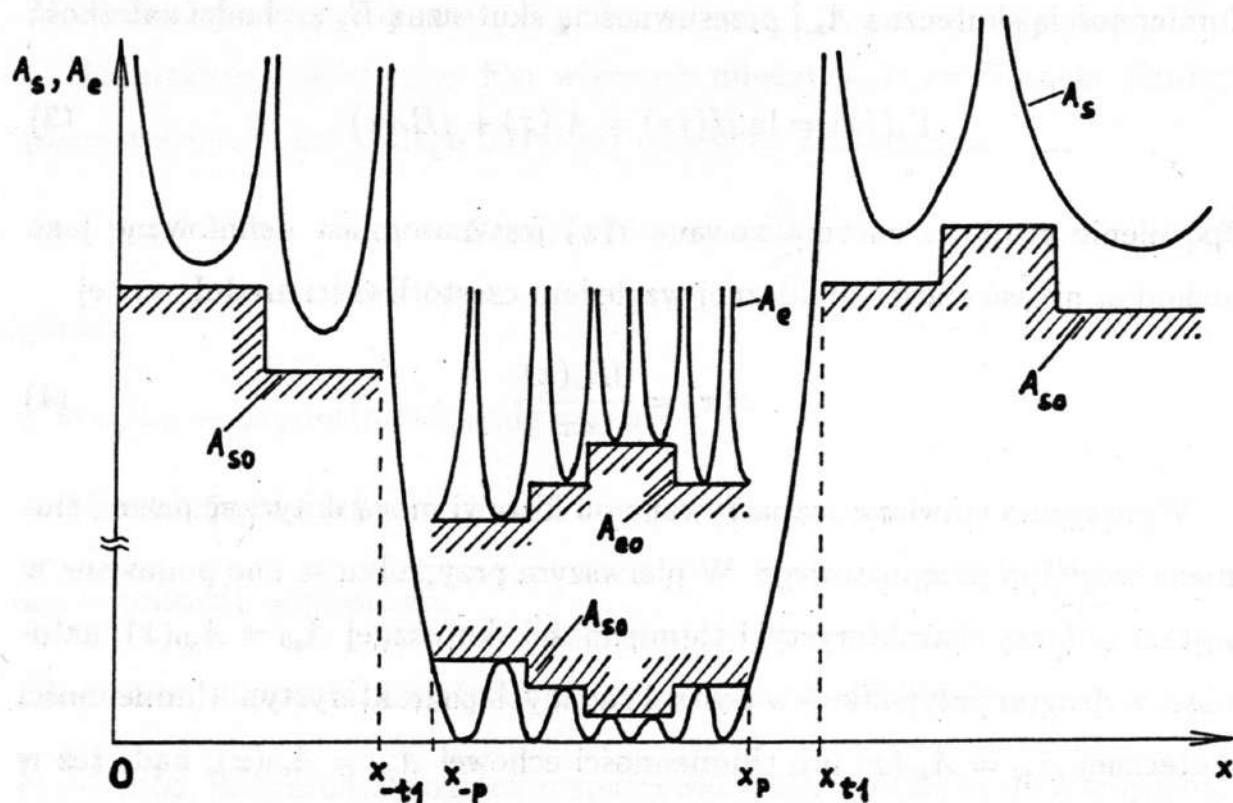
$$\Gamma_s(jx) = \ln H(jx) = A_s(x) + jB_s(x) \quad (3)$$

Opóźnienie grupowe znormalizowane  $\tau(x)$  jest natomiast definiowane jako pochodna przesuwności skutecznej względem częstotliwości zredukowanej

$$\tau(x) = \frac{dB_s(x)}{dx} \quad (4)$$

Wymagania stawiane rozpatrywanemu filtrowi mogą dotyczyć pasma tłumieniowego lub przepustowego. W pierwszym przypadku są one podawane w postaci zadanej charakterystyki tłumienności skutecznej  $A_{s0} = A_{s0}(x)$ , natomiast w drugim przypadku - w postaci zadanych charakterystyk: tłumienności skutecznej  $A_{s0} = A_{s0}(x)$  lub tłumienności echowej  $A_{e0} = A_{e0}(x)$ , bądź też w postaci zadanej charakterystyki opóźnienia grupowego  $\tau_0 = const$ . Często wymagania dotyczą jednocześnie obu pasm przepustowego i tłumieniowego. Mogą być one wówczas podane w postaci zadanej charakterystyki  $A_{s0}(x)$  w pasmie tłumieniowym i jednej z trzech charakterystyk  $A_{s0}(x)$ ,  $A_{e0}(x)$  lub  $\tau_0 = const$  w pasmie przepustowym.

Rzeczywista charakterystyka tłumienności echowej  $A_e(x)$  ma w pasmie przepustowym przebieg analogiczny do przebiegu rzeczywistej charakterystyki tłumienności skutecznej  $A_s(x)$  w pasmie tłumieniowym w tym sensie, że ma bieguny i minima (Rys. 1). Z tego właśnie powodu wygodniej jest



Rys. 1. Zadane charakterystyki tłumienności skutecznej  $A_{s0}$  i tłumienności ehowej  $A_{e0}$  oraz charakterystyki  $A_s$  i  $A_e$  otrzymane w wyniku aproksymacji

$x_{-p}, x_p$  — częstotliwości krańcowe pasma przepustowego,

$x_{-t1}, x_{t1}$  — częstotliwości krańcowe odpowiednio dolnego i górnego pasma tłumieniowego

rozpatrywać w pasmie przepustowym zamiast charakterystyki  $A_{s0}(x)$  charakterystykę  $A_{e0}(x)$ . Umożliwia to bowiem stosowanie zbliżonych procedur obliczeniowych zarówno dla pasma przepustowego, jak i dla pasma tłumieniowego. Mając daną charakterystykę  $A_{s0}(x)$  w pasmie przepustowym, można łatwo wyznaczyć odpowiednią charakterystykę  $A_{e0}(x)$  w tym pasmie, bowiem wartości tłumienności skutecznej i tłumienności echowej związane są ze sobą wzorem Feldtkellera [1]

$$\exp(-2A_s) + \exp(-2A_e) = 1. \quad (5)$$

W przypadku zadanych charakterystyk:  $A_{s0}$  w pasmie tłumieniowym i  $A_{e0}$  w pasmie przepustowym, aproksymację obu tych charakterystyk trzeba przeprowadzać jednocześnie. Wyniki aproksymacji jednej i drugiej charakterystyki nie są bowiem od siebie niezależne. Natomiast w przypadku zadanych charakterystyk:  $A_{s0}$  w pasmie tłumieniowym i  $\tau_0 = const$  w pasmie przepustowym, należy w pierwszej kolejności przeprowadzić aproksymację zadanej charakterystyki  $\tau_0 = const$ , a następnie, znając wyniki tej aproksymacji, przystąpić do aproksymacji charakterystyki  $A_{s0}$ .

W dalszej części pracy zostaną przedstawione sposoby sformułowania i rozwiązania następujących zadań aproksymacji:

- zadania aproksymacji charakterystyki  $\tau_0 = const$  w pasmie przepustowym,
- zadania aproksymacji charakterystyki  $A_{s0}(x)$  w pasmie tłumieniowym i charakterystyki  $A_{e0}(x)$  w pasmie przepustowym.

W przypadku zadanych charakterystyk  $\tau_0 = const$  w pasmie przepustowym i  $A_{s0}(x)$  w pasmie tłumieniowym, sposób sformułowania i rozwiązania

zadania aproksymacji charakterystyki  $A_{s0}(x)$  jest identyczny jak przy jednoczesnej aproksymacji charakterystyk  $A_{s0}(x)$  i  $A_{e0}(x)$ . Nie ma więc potrzeby oddzielnego rozpatrywania tego przypadku. Gdy natomiast podane wymagania dotyczą tylko jednej z charakterystyk  $A_{s0}(x)$  lub  $A_{e0}(x)$ , należy wówczas rozpatrzyć tylko jedno, odpowiednie zadanie aproksymacji.

### 2.1. Sformułowanie zadania aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego

W wielu zastosowaniach wymagane jest, aby sygnał niesinusoidalny przy przejściu przez określony filtr nie ulegał zniekształceniu. Spełnienie tego wymagania jest możliwe w przypadku, gdy opóźnienie grupowe filtru jest stałe w pasmie przepustowym. Stałej charakterystyki opóźnienia grupowego w pasmie przepustowym nie da się jednak zrealizować w rzeczywistych układach liniowych, stacjonarnych, zawierających elementy skupione. Charakterystykę taką można jednak aproksymować charakterystyką realizowalną.

Istnieją różne kryteria, według których przeprowadza się aproksymację stałej charakterystyki opóźnienia grupowego. W niniejszej pracy jest przedstawiony sposób sformułowania i rozwiązania zadania równomiernie falistej aproksymacji charakterystyki  $\tau_0 = const$ .

Rozpatrzmy filtr środkowoprzepustowy. W przypadku tego filtru opóźnienie grupowe wyraża się wzorem

$$\tau(x) = - \sum_{i=1}^{M/2} \frac{\beta_i}{\beta_i^2 + (\Omega_i - x)^2} + \frac{\beta_i}{\beta_i^2 + (\Omega_i + x)^2} \quad (6)$$

gdzie:

$M$  — stopień wielomianu  $g(jx)$  (liczba parzysta),

$\beta_i + j\Omega_i$  — sprzężona para zespolonych zer wielomianu  $g(jx)$ .

Jak z powyższego wzoru wynika, opóźnienie grupowe jest zależne jedynie od rozmieszczenia zer wielomianu  $g(jx)$ . Zadanie równomiernie falistej aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego filtru środkowoprzepustowego sprowadza się więc do znalezienia odpowiednich wartości zer tego wielomianu. Znając postać wielomianu  $g(jx)$  można następnie przeprowadzić syntezę układu realizującego zadane opóźnienie grupowe.

Niech  $d$  będzie założonym falowaniem międzyszczytowym wokół średniego opóźnienia grupowego  $\tau_0$  w pasmie przepustowym  $P = \langle x_{-p}, x_p \rangle$  (Rys. 2), a  $Y = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$  wektorem parametrów  $y_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , takich, że

$$\left. \begin{array}{l} y_{2i-1} = \beta_i \\ y_{2i} = \Omega_i \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, M/2 \quad (7)$$

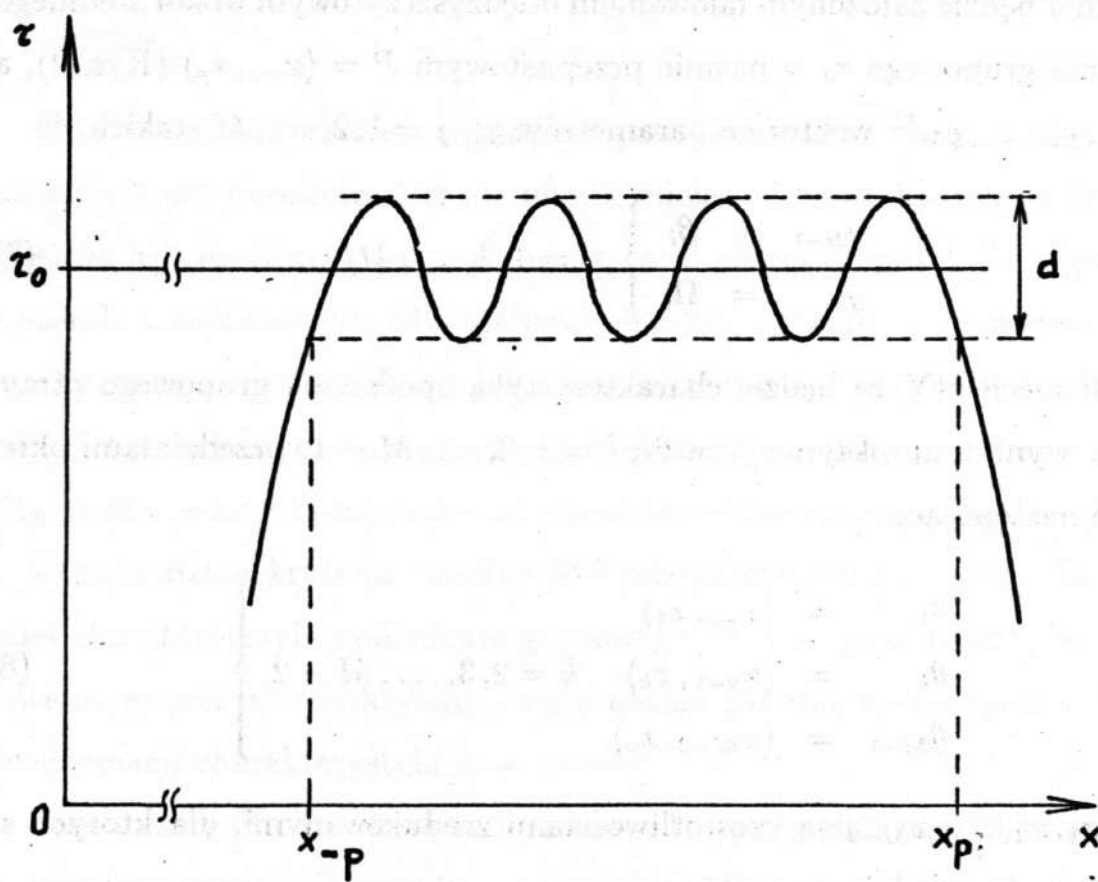
Ponadto niech  $\tau(\underline{Y}, x)$  będzie charakterystyką opóźnienia grupowego otrzymaną w wyniku aproksymacji, a  $\theta_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, M - 1$ , przedziałami określonymi następująco

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 = \langle x_{-p}, x_1 \rangle \\ \theta_k = \langle x_{k-1}, x_k \rangle \quad k = 2, 3, \dots, M - 2 \\ \theta_{M-1} = \langle x_{M-2}, x_p \rangle \end{array} \right\} \quad (8)$$

gdzie:  $x_1, x_2, \dots, x_{M-2}$  są częstotliwościami zredukowanymi, dla których są spełnione odpowiednio warunki:

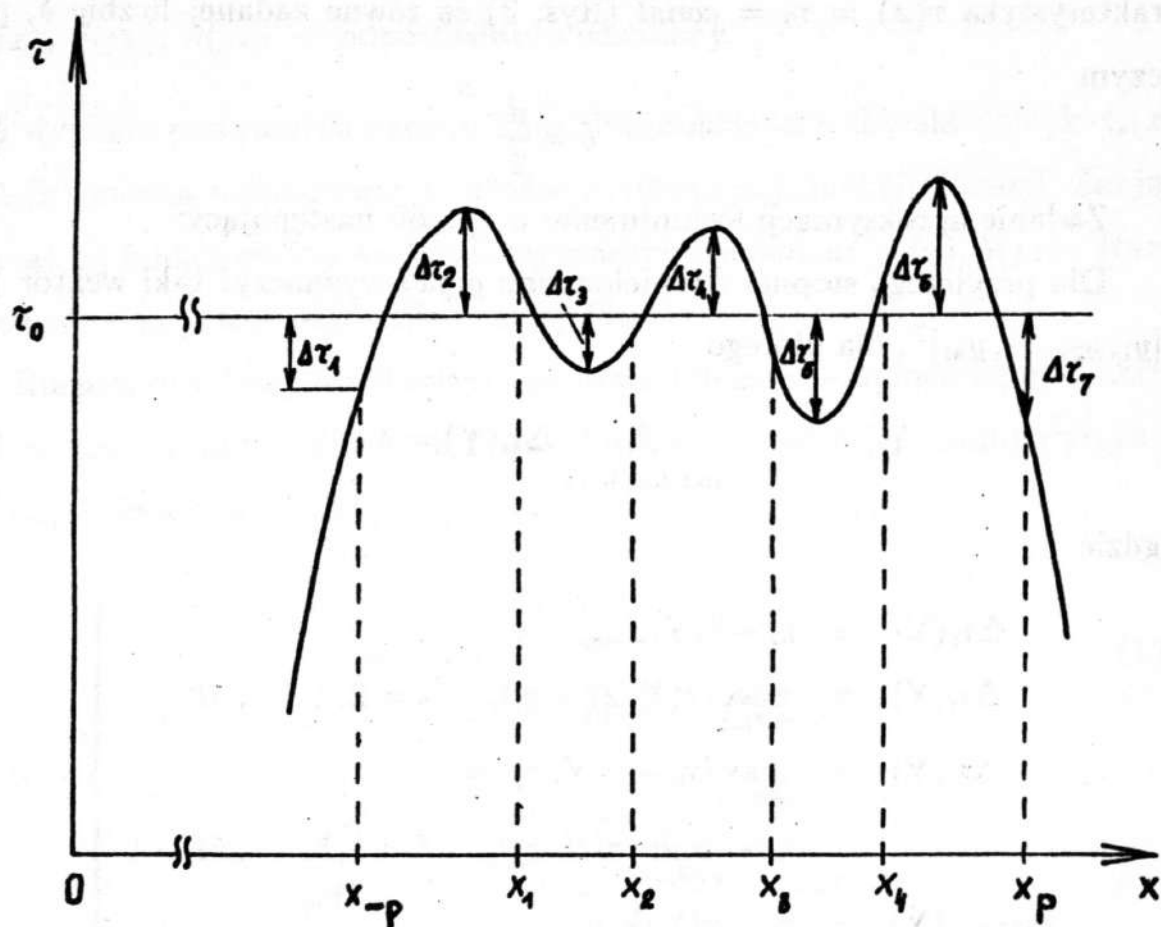
$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\tau(\underline{Y}, x)}{dx} \Big|_{x=x_k} < 0, \quad \text{dla } k = 1, 3, \dots, M - 3 \\ \frac{d\tau(\underline{Y}, x)}{dx} \Big|_{x=x_k} > 0, \quad \text{dla } k = 2, 4, \dots, M - 2 \end{array} \right\} \quad (9)$$

Aproksymację uważamy za optymalną, gdy dla przyjętego stopnia  $M$  wartości największych różnic  $\Delta\tau_i(\underline{Y})$ ,  $i = 1, 2, \dots, M + 1$ , pomiędzy charakterystyką



Rys. 2. Równomiernie falista charakterystyka opóźnienia grupowego filtru środkowoprzepustowego





Rys. 3. Sposób wyznaczania wartości największych różnic  $\Delta\tau_i(Y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 7$

opóźnienia grupowego  $\tau(\underline{Y}, x)$  otrzymaną w wyniku aproksymacji i stałą charakterystyką  $\tau(x) = \tau_0 = \text{const}$  (Rys. 3) są równe zadanej liczbie  $\delta$ , przy czym

$$\delta = \frac{d}{2} \quad (10)$$

Zadanie aproksymacji formułujemy w sposób następujący:

Dla przyjętego stopnia  $M$  wielomianu  $g(jx)$  wyznaczyć taki wektor  $\underline{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$ , dla którego

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,M+1} \Delta\tau_i(\underline{Y}) = \delta \quad (11)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau_1(\underline{Y}) &= \tau_0 - \tau(\underline{Y}, x_{-p}) = \delta, \\ \Delta\tau_i(\underline{Y}) &= \max_{x \in \theta_{i-1}} (\tau(\underline{Y}, x) - \tau_0), \quad i = 2, 4, \dots, M \\ \Delta\tau_i(\underline{Y}) &= \max_{x \in \theta_{i-1}} (\tau_0 - \tau(\underline{Y}, x)) = \\ &= \tau_0 - \min_{x \in \theta_{i-1}} (\tau(\underline{Y}, x)), \quad i = 3, 5, \dots, M-1 \\ \Delta\tau_{M+1}(\underline{Y}) &= \tau_0 - \tau(\underline{Y}, x_p) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2.2. Sformułowanie zadania aproksymacji charakterystyki tłumienności skutecznej w pasmie tłumieniowym i charakterystyki tłumienności echowej w pasmie przepustowym

Tłumienność skuteczna  $A_s$  i tłumienność echowa  $A_e$  reaktancyjnego filtru włączonego między stałe rezystancje wyraża się odpowiednio wzorami [1]:

$$A_s = A_s(x) = \ln \left| \frac{g(jx)}{f(jx)} \right| = \frac{1}{2} \ln (1 + |\varphi(jx)|^2) \quad (13)$$

$$A_e = A_e(x) = \ln \left| \frac{g(jx)}{h(jx)} \right| = \frac{1}{2} \ln (1 + |\varphi(jx)|^{-2}) \quad (14)$$

gdzie:

$\varphi(jx)$  — funkcja filtracji,

$g(jx)$ ,  $f(jx)$ ,  $h(jx)$  — odpowiednie wielomiany.

Jak wynika z powyższych wzorów, zadanie aproksymacji charakterystyk  $A_s(x)$  i  $A_e(x)$  można rozwiązywać w drodze aproksymacji funkcji filtracji. Znając postać tej funkcji można następnie wyznaczyć wielomiany  $g(jx)$ ,  $h(jx)$  i  $f(jx)$  niezbędne do przeprowadzenia syntezy filtru.

Rozpatrzmy filtry środkowoprzepustowe robocze — symetryczny i antymetryczny. W przypadku tych filtrów funkcja filtracji i jej moduł wyrażają się odpowiednio wzorami

$$\varphi(\lambda) = C \frac{\prod_{i=1}^m (\lambda^2 + x_{0i}^2)}{\lambda^N \prod_{i=1}^n (\lambda^2 + x_{\infty i}^2)} \quad (15)$$

$$|\varphi(\lambda)|_{\lambda=jx} = \left| C \frac{\prod_{i=1}^m (x^2 - x_{0i}^2)}{x^N \prod_{i=1}^n (x^2 - x_{\infty i}^2)} \right| \quad (16)$$

przy czym:

$$N = \begin{cases} 1 & \text{dla filtru roboczego symetrycznego,} \\ 2 & \text{dla filtru roboczego antymetrycznego,} \end{cases}$$

gdzie:

$$\lambda = jx,$$

$C$  — stała,

$n$  — liczba biegunów funkcji  $\varphi$  (nie licząc biegunów dla  $x = 0$  i  $x = \infty$ ),

$m$  — liczba zer funkcji  $\varphi$ ,

$x_{0i}$  — częstotliwość zredukowana  $i$ -tego zera funkcji,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$x_{\infty i}$  — częstotliwość zredukowana  $i$ -tego bieguna funkcji,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Aby rozpatrywane filtry były realizowalne fizycznie, liczby  $m$  i  $n$  muszą spełniać warunek  $m > n$ .

Niech  $A_{e0}(x)$  będzie wymaganą tłumiennością echową w pasmie przepustowym  $P = \langle x_{-p}, x_p \rangle$ ,  $X_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0m}]^T$  — wektorem parametrów  $x_{0i}$  ( $x_{0i} < x_{0(i+1)}$ ), a  $\theta_{pk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m+1$ , niech stanowi oznaczenie przedziałów określonych następująco:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{p1} &= \langle x_{-p}, x_{01} \rangle, \\ \theta_{pl} &= \langle x_{0(l-1)}, x_{0l} \rangle, \quad l = 2, 3, \dots, m \\ \theta_{p(m+1)} &= \langle x_{0m}, x_p \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Ponadto niech  $A_{s0}$  będzie wymaganą tłumiennością skuteczną w obu pasmach tłumieniowych: dolnym  $T_{dol} = \langle x_{-t2}, x_{-t1} \rangle$  i górnym  $T_{gor} = \langle x_{t1}, x_{t2} \rangle$ ,  $X_{\infty} = [x_{\infty 1}, x_{\infty 2}, \dots, x_{\infty n}]^T$  — wektorem parametrów  $x_{\infty i}$  ( $x_{\infty i} < x_{\infty(i+1)}$ ) oraz niech  $\theta_{tk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , stanowi oznaczenie przedziałów określonych następująco

$$\left. \begin{aligned} \theta_{t1} &= \langle x_{-t2}, x_{\infty 1} \rangle \\ \theta_{tl} &= \langle x_{\infty(l-1)}, x_{\infty l} \rangle, \quad l = 2, 3, \dots, l_D \\ \theta_{t(l_D+1)} &= \langle x_{\infty l_D}, x_{-t1} \rangle \cup \langle x_{t1}, x_{\infty(l_D+1)} \rangle, \\ \theta_{tr} &= \langle x_{\infty(r-1)}, x_{\infty r} \rangle, \quad r = l_D + 2, l_D + 3, \dots, n, \\ \theta_{t(n+1)} &= \langle x_{\infty n}, x_{t2} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

gdzie:

$l_D$  — liczba parametrów  $x_{\infty i}$  związanych z dolnym pasmem tłumieniowym.

Aproksymację uważamy za optymalną, gdy spełnione są następujące warunki:

- 1) otrzymana w wyniku aproksymacji funkcja filtracji jest możliwie małego stopnia,
- 2) wartości najmniejszych różnic  $\Delta A_{ek}(X_0, X_\infty, C)$  pomiędzy charakterystyką tłumienności  $A_e(x, X_0, X_\infty, C)$  otrzymaną w wyniku aproksymacji i zadaną charakterystyką  $A_{e0}(x)$  w przedziałach  $\theta_{pk}, k = 1, 2, \dots, m+1$ , są jednakowe i nieujemne (Rys. 4),
- 3) wartości najmniejszych różnic  $\Delta A_{sk}(X_0, X_\infty, C)$  pomiędzy charakterystyką tłumienności  $A_s(x, X_0, X_\infty, C)$  otrzymaną w wyniku aproksymacji i zadaną charakterystyką  $A_{s0}(x)$  w przedziałach  $\theta_{tk}, k = 1, 2, \dots, n+1$ , są jednakowe i nieujemne.

Zadanie aproksymacji można zatem sformułować w sposób następujący:

- 1) wyznaczyć minimalne liczby  $n$  i  $m$  ( $m > n$ ), takie by:

$$\bigwedge_{x \in P} A_e(x, X_0, X_\infty, C) - A_{e0}(x) \geq 0, \quad (19)$$

$$\bigwedge_{x \in T} A_s(x, X_0, X_\infty, C) - A_{s0}(x) \geq 0, \quad (20)$$

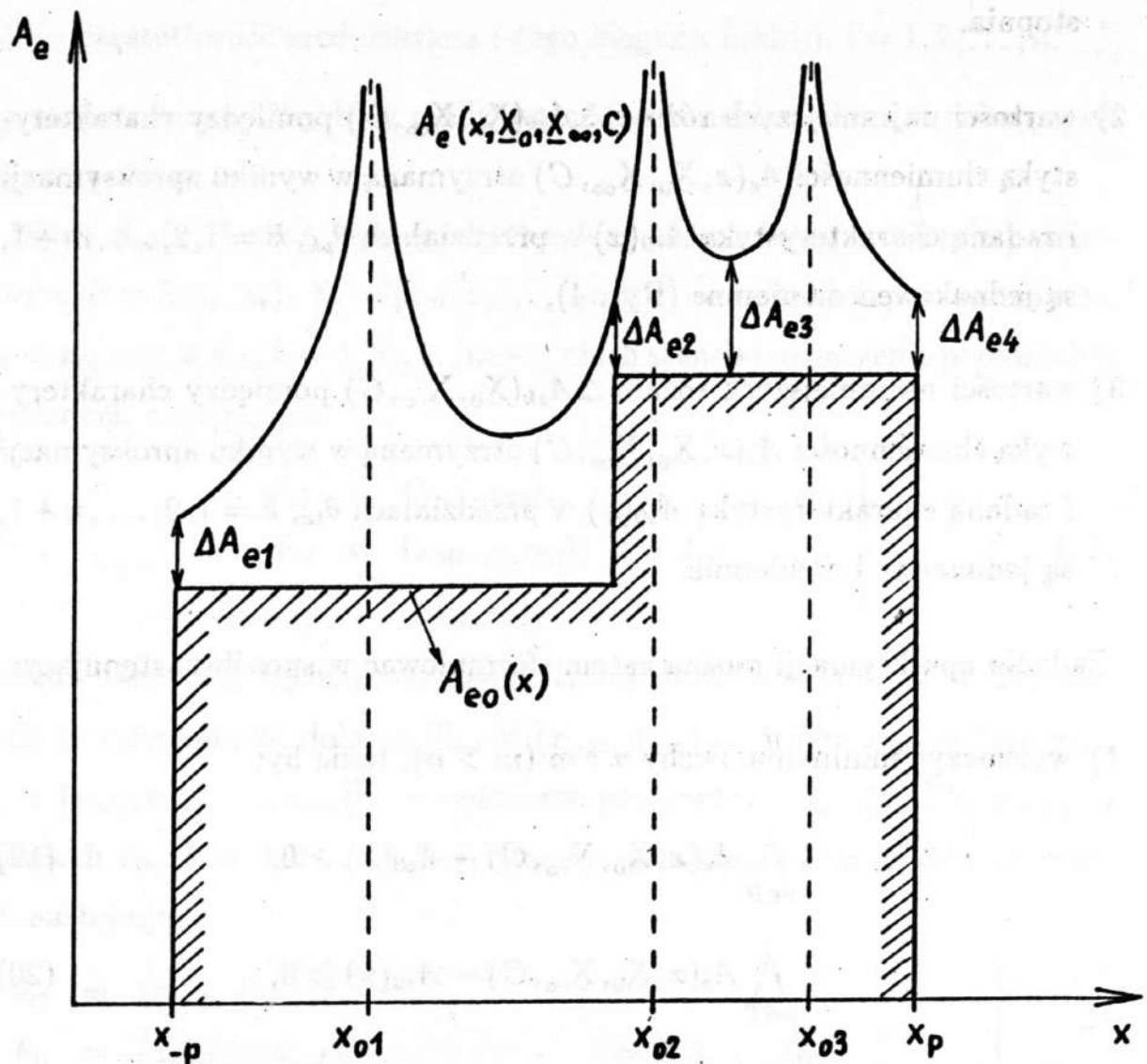
- 2) dla tak ustalonych  $n$  i  $m$  wyznaczyć takie wektory

$$X_0^* = [x_{01}^*, x_{02}^*, \dots, x_{0m}^*]^T \quad \text{i} \quad X_\infty^* = [x_{\infty 1}^*, x_{\infty 2}^*, \dots, x_{\infty n}^*]^T$$

oraz stałą  $C^*$ , przy czym

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,m} x_{0i}^* \in \langle x_{-p}, x_p \rangle \quad (21)$$

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,n} x_{\infty i}^* \in \langle x_{-t2}, x_{-t1} \rangle \cup \langle x_{t1}, x_{t2} \rangle \quad (22)$$



Rys. 4. Sposób wyznaczania wartości najmniejszych różnic  $\Delta A_{ek}(X_0, X_\infty, C)$  pomiędzy charakterystyką tłumienności aproksymującą  $A_e(x, X_0, X_\infty, C)$  i aproksymowaną  $A_{e0}(x)$  w poszczególnych przedziałach  $\theta_{pk}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$

dla których:

$$\bigwedge_{k,l=1,2,\dots,m+1} \Delta A_{ek}(X_0^*, X_\infty^*, C^*) = \Delta A_{el}(X_0^*, X_\infty^*, C^*) \quad (23)$$

$$\bigwedge_{k,l=1,2,\dots,n+1} \Delta A_{sk}(X_0^*, X_\infty^*, C^*) = \Delta A_{sl}(X_0^*, X_\infty^*, C^*) \quad (24)$$

gdzie:

$$\Delta A_{ek}(X_0, X_\infty, C) = \min_{x \in \theta_{pk}} (A_e(x, X_0, X_\infty, C) - A_{e0}(x)) \quad (25)$$

$$\Delta A_{sk}(X_0, X_\infty, C) = \min_{x \in \theta_{tk}} (A_s(x, X_0, X_\infty, C) - A_{s0}(x)) \quad (26)$$

### 3. Sposób rozwiązania zadań aproksymacji

Pierwszym etapem rozwiązywania sformułowanych uprzednio zadań aproksymacji jest przekształcenie tych zadań w odpowiednie zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami.

Zadaniem programowania<sup>2</sup> nazywamy zadanie znajdowania punktu, w którym dana funkcja osiąga ekstremum. Zadanie takie jest zwykle formułowane następująco: znaleźć wektor  $z^* = [z_1^*, z_2^*, \dots, z_N^*]^T$  należący do zbioru  $Z = \{z : G_i(z) \leq 0, i = 1, 2, \dots, L\}$  taki, że

$$F(z^*) = \min F(z) \quad (27)$$

gdzie:

<sup>2</sup>Zadanie programowania bywa również nazywane w literaturze zadaniem optymalizacji statycznej.

<sup>3</sup>Jest to zadanie minimalizacji. Każde zadanie maksymalizacji można sprowadzić do zadania minimalizacji, gdyż

$$\max F(z) = -\min [-F(z)]$$

$F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1$  — funkcja celu,

$G_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^1, i = 1, 2, \dots, L$  — funkcja ograniczeń,

$Z$  — zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

Jeżeli funkcja celu  $F$  oraz funkcje ograniczeń  $G_i, i = 1, 2, \dots, L$ , są liniowe, to dane zadanie nazywamy zadaniem programowania liniowego. Jeżeli natomiast funkcja celu  $F$  lub co najmniej jedna z funkcji  $G_i, i = 1, 2, \dots, L$ , jest nieliniowa, to rozpatrywane zadanie jest zadaniem programowania nieliniowego.

Zadania programowania nieliniowego dzielą się na zadania z ograniczeniami i zadania bez ograniczeń. W zadaniach bez ograniczeń funkcje ograniczeń nie występują, a o funkcji celu zakłada się, że jest ograniczona od dołu.

Metody służące do numerycznego rozwiązywania zadań programowania nazywamy metodami optymalizacji. W zależności od typu rozwiązywanych zadań programowania, metody optymalizacji dzieli się na szereg grup. Do rozwiązywania zadań programowania nieliniowego stosowane są m.in. następujące grupy metod:

- 1) metody poszukiwania minimum bez ograniczeń — umożliwiające rozwiązywanie zadań bez ograniczeń,
- 2) metody poszukiwania minimum z ograniczeniami — umożliwiające rozwiązywanie zadań z ograniczeniami.

Szczegółowe opisy poszczególnych metod optymalizacji można znaleźć w literaturze [3, 4].

W celu przekształcenia uprzednio sformułowanych zadań aproksymacji w równoważne zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami należy odpowiednio określić funkcje celu, których minimów będziemy poszukiwać.



Rozważmy jako pierwsze zadanie równomiernie falistej aproksymacji opóźnienia grupowego. W celu przekształcenia tego zadania w równoważne zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami należy mianowicie określić taką funkcję celu  $F(\underline{Y})$ , która przy spełnieniu warunku (11) osiąga minimum globalne. Jako tę funkcję przyjmujemy funkcję postaci

$$F(\underline{Y}) = \sum_{i=1}^{M+1} \left( \Delta\tau_i(\underline{Y}) - \frac{\sum_{k=1}^{M+1} \Delta\tau_k(\underline{Y})}{M+1} \right)^2 \quad (28)$$

Można wykazać, że przy spełnieniu warunku (11) tak określona funkcja  $F(\underline{Y})$  osiąga minimum globalne równe zeru.

Problem wyrównania różnic  $\Delta\tau_i(\underline{Y})$  sprowadza się w ten sposób do zadania znalezienia takich współrzędnych wektora  $\underline{Y}$ , dla których funkcja  $F(\underline{Y})$  osiąga minimum globalne przy ograniczeniach

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,M/2} \beta_i < 0 \quad (29)$$

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,M/2} -\Omega_i < 0 \quad (30)$$

$$\bigwedge_{l=1,2,\dots,M+1} -\Delta\tau_l(\underline{Y}) < 0 \quad (31)$$

Tak sformułowane zadanie jest zadaniem programowania nieliniowego z ograniczeniami. Należy zauważyć, że spełnienie ograniczenia (29) zapewnia, że otrzymany w wyniku aproksymacji wielomian  $g(jx)$  jest wielomianem Hurwitza.

Rozważmy teraz zadania aproksymacji charakterystyki tłumienności skutecznej w pasmie tłumieniowym i charakterystyki tłumienności echowej w

pasmie przepustowym. Rozwiązywanie tych zadań należy rozpocząć od wyznaczenia liczby  $n$  biegunów funkcji filtracji. Liczbę tę możemy określić posługując się zależnościami podanymi w literaturze [9]. Mając wstępnie wyznaczoną liczbę  $n$  przyjmujemy początkowo, że  $m = n + 1$ . Jeżeli jednak okazałoby się, że przy takiej wartości  $m$  wymagania w pasmie przepustowym nie mogą być spełnione, liczbę tę należy zwiększyć.

W celu przekształcenia zadań aproksymacji charakterystyk  $A_{s0}$  i  $A_{e0}$  w równoważne zadania programowania nieliniowego z ograniczeniami należy teraz określić takie funkcje celu  $F_1(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  i  $F_2(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$ , które przy spełnieniu odpowiednio (23) i (24) osiągają minimum. Jako funkcje te przyjmujemy funkcje postaci

$$F_1(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty) = \sum_{k=1}^{m+1} \left( \Delta A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C) - \frac{\sum_{i=1}^{m+1} \Delta A_{ei}(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)}{m+1} \right)^2 \quad (32)$$

$$F_2(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty) = \sum_{k=1}^{n+1} \left( \Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C) - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \Delta A_{si}(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)}{n+1} \right)^2 \quad (33)$$

Można wykazać, że dla spotykanych w praktyce funkcji filtracji tak określone funkcje  $F_1(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  i  $F_2(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  są praktycznie niezależne od wartości stałej  $C$ .

Przy spełnieniu (23) funkcja  $F_1(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  osiąga minimum po  $\underline{X}_0$ , dla danego wektora  $\underline{X}_\infty$ , a przy spełnieniu (24) funkcja  $F_2(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  osiąga minimum po  $\underline{X}_\infty$  dla danego wektora  $\underline{X}_0$ . Problem wyrównania różnic  $\Delta A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m+1$ , sprowadza się w ten sposób do zadania znalezienia takich współrzędnych wektora  $\underline{X}_0$ , dla których funkcja  $F_1(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  osiąga minimum

globalne dla danego  $\underline{X}$  przy ograniczeniach

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,m} x_{-p} - x_{0i} < 0 \quad (34)$$

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,m} x_{0i} - x_p < 0 \quad (35)$$

$$\bigwedge_{k=1,2,\dots,m} -\Delta A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C) < 0 \quad (36)$$

Podobnie problem wyrównania różnic  $\Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n + 1$  sprowadza się do zadania znalezienia takich współrzędnych wektora  $\underline{X}$ , dla których funkcja  $F_2(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  osiąga minimum globalne dla danego  $\underline{X}_0$  przy ograniczeniach

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,n} x_{t1} - x_{\infty i} < 0 \quad (37)$$

$$\bigwedge_{i=1,2,\dots,n} x_{\infty i} - x_{t2} < 0 \quad (38)$$

$$\bigwedge_{k=1,2,\dots,n} -\Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C) < 0 \quad (39)$$

Sformułowane powyżej zadania są również typowymi zadaniami programowania nieliniowego z ograniczeniami. W pierwszym z tych zadań wektora  $\underline{X}_\infty$  traktowany jest jako parametr, a wektor  $\underline{X}_0$  jako zmienna, natomiast w drugim — wektor  $\underline{X}_0$  traktowany jest jako parametr, a wektor  $\underline{X}_\infty$  jako zmienna.

Jeżeli wymagania dotyczą obu pasm przepustowego i tłumieniowego, należy najpierw rozwiązywać zadanie poszukiwania wektora  $\underline{X}_0$  minimalizującego funkcję  $F_1(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  przy założonym wektorze początkowym  $\underline{X}_\infty$ . Znajdąc rozwiązanie  $\tilde{\underline{X}}_0^*$  tego zadania, należy następnie przystąpić do rozwiązywania zadania poszukiwania wektora  $\underline{X}_\infty$  minimalizującego funkcję  $F_2(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  przy  $\underline{X}_0 = \tilde{\underline{X}}_0^*$ . Ze względu na fakt, że zmiany wartości współrzędnych wektora  $\underline{X}_\infty$  powodują jednak pewną zmianę przebiegu charakterystyki  $A_e(x, \underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)$

w pasmie przepustowym, należy jeszcze, w razie potrzeby, powtórnie rozwiązać zadanie poszukiwania wektora  $\underline{X}_0$  minimalizującego funkcję  $F_1(\underline{X}_0, \underline{X}_\infty)$  przy  $\underline{X}_\infty = \underline{X}_\infty^*$ , gdzie  $\underline{X}_\infty^*$  stanowi rozwiązanie poprzedniego zadania.

Po wyznaczeniu wartości współrzędnych wektorów  $\underline{X}_0^*$  i  $\underline{X}_\infty^*$ , wartość bezwzględną stałej  $C^*$  obliczamy korzystając z odpowiednio przekształconego wzoru opisującego funkcję filtracji danego rodzaju filtru. Przyjmujemy następnie, że  $C^* = |C^*|$ , tzn. że stała  $C$  jest dodatnia.

Z opisywanych w literaturze [3, 4] metod optymalizacji, do rozwiązywania sformułowanych uprzednio zadań programowania nieliniowego wybrano zmodyfikowaną metodę Powella (z przesuwaną funkcją kary). Metoda ta uważana jest bowiem za jedną z najbardziej efektywnych metod poszukiwania minimum z ograniczeniami. Umożliwia ona sprowadzenie zadania z ograniczeniami do ciągu zadań bez ograniczeń poprzez odpowiednią modyfikację funkcji celu.

Otrzymane zadania programowania nieliniowego bez ograniczeń rozwiązywano metodą gradientu sprzężonego Polaka-Ribiery z estymacją gradientu [3, 4]. W przypadku rozpatrywanych funkcji celu numeryczna estymacja gradientu jest niezbędna, gdyż nie ma możliwości jego wyznaczenia w sposób analityczny.

Do wyznaczania wartości współrzędnych minimów funkcji  $A_e(x, \underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)$  w kolejnych przedziałach  $\theta_{pk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , wartości współrzędnych minimów funkcji  $A_s(x, \underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)$  w kolejnych przedziałach  $\theta_{tk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  oraz wartości ekstremów funkcji  $\tau(\underline{Y}, x)$  w kolejnych przedziałach  $\theta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, M - 1$ , zastosowano metodę złotego podziału [3, 4]. Metoda ta umożliwia znalezienie odciętej  $a^*$  oraz rzędnej  $f(a^*)$  minimum rozpatrywanej funkcji  $f(a)$  w określonym przedziale, przy założeniu, że w przedziale tym funkcja  $f(a)$  jest ciągła i ma dokładnie jedno minimum<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Funkcje  $A_e(x, \underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)$ ,  $A_s(x, \underline{X}_0, \underline{X}_\infty, C)$  oraz  $\tau(\underline{Y}, x)$  w rozpatrywanych przedziałach spełniają to założenie.

#### 4. Zakończenie

Na podstawie zaproponowanego sposobu rozwiązania zadań aproksymacji charakterystyki tłumienności skutecznej i charakterystyki tłumienności ehowej oraz na podstawie przedstawionego sposobu rozwiązania zadania aproksymacji charakterystyki opóźnienia grupowego opracowane zostały odpowiednie programy obliczeniowe *APAS* oraz *AOGS*. Program *APAS* umożliwia aproksymację charakterystyki tłumienności ehowej i tłumienności skutecznej filtrów środkowoprzepustowych, natomiast program *AOGS* — aproksymację charakterystyki opóźnienia grupowego tych filtrów. Oba programy zostały napisane w języku *Fortran* w dwóch wersjach. Pierwsza z nich jest przystosowana do minikomputera Amstrad *CPC 6128*, a druga do minikomputera *SM-4*.

Przy użyciu programów *AOGS* i *APAS* przeprowadzono aproksymację szeregu charakterystyk odpowiednio opóźnienia grupowego oraz tłumienności skutecznej i ehowej. Czas wykonywania obliczeń jest zależny od rodzaju aproksymowanej charakterystyki oraz od przyjętych wartości  $m$  i  $n$  lub  $M$ . Waha się on od kilku do kilkudziesięciu minut, przy czym takie same obliczenia wykonywane są na maszynie cyfrowej *SM-4* nieco szybciej.

#### 5. Literatura

- [1] W. Cauer: *Theorie der linearen Wechselstromschaltungen*, Band I, Akademie-Verlag, Berlin 1954
- [2] R.W. Daniels: *Approximation Methods for Filter Design*, Mc Graw-Hill, New York 1974
- [3] W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, Warszawa PWN 1980

- [4] T. Kręglewski, T. Rogowski, A. Ruszczyński, J. Szymanowski: *Metody optymalizacji w języku FORTRAN*, Warszawa PWN 1984
- [5] A.A. Lanne: *Optimalnyj sintez linejnych elektriczeskich schiem*, Izd. Swiaź, Moskwa 1978
- [6] H. Rapp: *A Simple Iterative Method for Evaluation of the Characteristic Function in Filter Synthesis*, Ericsson Technics, vol. 26 (1970) Nr 2
- [7] D. Robert, P.M. Stanimirovic: *Design of Band Pass Filters Exhibiting Equiripple Group Delay and Amplitude Characteristics*, Proc. of the IREE, Jan./Feb. 1974
- [8] G.C. Temes, S.K. Mitra (red.): *Teoria i projektowanie filtrów*, Warszawa 1984
- [9] F. Wysocka: *Aproksymacja charakterystyki tłumienności skutecznej filtru dolnoprzepustowego o dowolnym przebiegu w pasmie przepustowym i tłumieniowym*, Rozprawy Elektrotechniczne PAN 1986 T. 32 z. 4