

MARIAN STAŃCZAK

WSP Bydgoszcz

UOGÓLNIONE SIŁY LAGRANGE'A OD ENERGII POTENCJALNEJ W RUCHU
MECHANIZMÓW WIELOKORBOWYCH

1. Wstęp

Mechanizm wielokorbowy jest przykładem układu o powtarzającym się okresowo cyklu pracy. W okresie cyklu pracy, /jeśli nie rozważa się stanów przejściowych w przypadkach startu, rozbiegu i hamowania/, tzw. ustalony ruch mechanizmu jest w rzeczywistości tylko prawie stacjonarny /quasiustalony/, bowiem charakteryzuje się wahającą się, względem pewnej wartości średniej, zmienną prędkością uogólnioną ogniwa głównego.

W dotychczasowej praktyce inżynierskiej, w badaniach ruchu mechanizmów wielokorbowych znajdujących się pod wpływem sił zewnętrznych, na ogół pomija się /bez analizy/ wpływ energii potencjalnej członów mechanizmów [1,2,3,4]. Jedynie w pracy Biezena i Grammela [5] autorzy wyznaczyli analitycznie energię potencjalną ruchu mechanizmu jednokorbowego i uwzględnili ją przy wyznaczaniu równania ruchu metodą bilansu mocy.

Należałoby przekonać się czy można w ogóle zaniedbać wpływ energii potencjalnej mechanizmu na jego ruch i dla jakich mechanizmów wielokorbowych /przy jakiej liczbie wykorbień/, postępowanie takie można uznać za słuszne.

W pracy niniejszej sprecyzowano odpowiedź na powyższe zagadnienie. Otrzymano zwarte wyniki, z rozciągnięciem wzorów na

mechanizmy wielokorbowe.

2. Sformułowanie problemu

Celem pracy było wyznaczenie energii potencjalnej sił ciężkości mechanizmów wielokorbowych w ich ruchu pod obciążeniem sił zewnętrznych, dla dokonania analizy istotności jej wpływu na ruch /niejednostajność ruchu ustalonego/ mechanizmów. Postanowiono znaleźć uogólnioną siłę Lagrange'a od energii potencjalnej i wyrazić ją w zwartym i ścisłym wzorze, dogodnym do wprowadzenia do równań Lagrange'a II rodzaju, stosowanych przy wyprowadzaniu równań ruchu mechanizmów.

Rozpatrywano dowolne układy k - korbowe rzędowe / o cylindrach ułożonych w jednym rzędzie/, tzw. regularne, złożone z k identycznych mechanizmów jednokorbowych, o wykorbieniach przesuniętych względem siebie o kąt fazowy wynikający z następstwa pracy poszczególnych mechanizmów jednokorbowych.

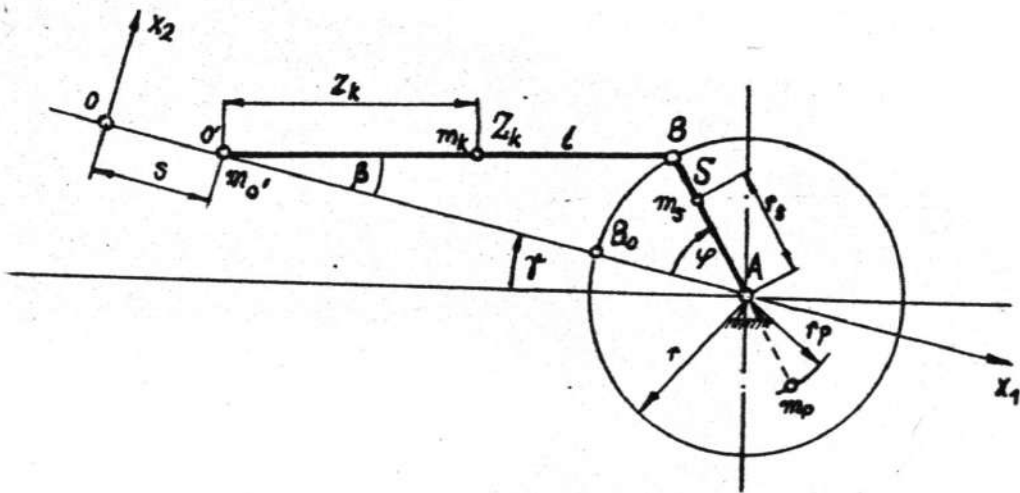
Założono idealną sztywność ogniw mechanizmów oraz brak luzów w parach kinematycznych.

3. Energia potencjalna sił ciężkości mechanizmu jednokorbowego

Postawione zagadnienie rozważano wyjściowo badając ogólny przypadek dowolnego położenia tłokowego mechanizmu jednokorbowego centralnego [3] /zbieżnościowego [2], prostego [6]/, kiedy os cylindra tworzy z poziomem dowolny kąt ξ /rys.1/.

Schemat układu narysowano w płaszczyźnie prostopadłej do osi wału A. Układ osi przyjęto jako prawoskrętny tak, że os x_1 pokrywa się z osią cylindra, początek układu 0 jest śladem osi sworzni tłoka O' w zewnętrznym zwrotnym położeniu. Przedłużenie toru ruchu posuwisto-zwrotnego tłoka przechodzi przez środek łożyska wału /przez ślad A osi wału korbowego/. Punkt B jest śladem osi czopa korby. Ramię korby jest r , długość korbowodu l . Stosunek korbowy /tzw. wskaźnik wydłużenia korbowodu/ określono przez λ ($\lambda = \frac{l}{r}$).

Przesunięcie tłoka s mierzone od lewego punktu zwrotnego /zewnętrznego zwrotnego położenia/, kiedy kąt określający położenie korby równa się zero. Kierunek obrotu korby prawy, zgodny ze wzrastającym kątem φ . Położeniu korby AB przy określonym kącie φ odpowiada położenie korbowodu BO' pod kątem β do osi kierunkowej x_1 .



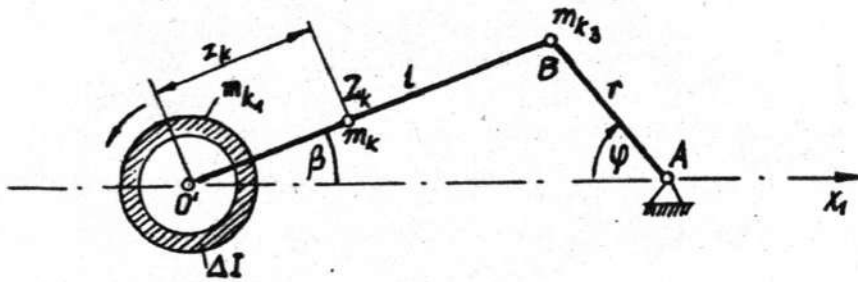
Rys. 1

Zatem zmiana położenia członów mechanizmu jest jednoznacznie określona przez współrzędną uogólnioną ogniwa głównego, którą dla rozpatrywanego mechanizmu jest kąt obrotu korby φ . Wprowadzono następujące pozostałe oznaczenia: m_o to masa tłoka kompletnego, m_s masa korby, r_s promień środka ciężkości korby, m_k masa korbowodu, z_k odległość środka ciężkości korbowodu od osi sworznia tłoka, m_p masa przeciwcieżarów, r_p promień środka ciężkości przeciwcieżarów.

Wprowadzając wzór na energię potencjalną układu ruchomego dokonano redukcji dynamicznej korbowodu. Warunki dynamiczne korbowodu zależą od kąta β oraz od trzech wielkości charakteryzujących rozkład masy w korbowodzie: m_k , $S_{o'}$ i $I_{o'}$, przy czym $S_{o'}$ jest momentem statycznym korbowodu względem osi sworznia tłoko-

wego, I_O jest momentem bezwładności korbowodu względem osi sworznia tłokowego. Przy ustalonym kącie β warunki dynamiczne korbowodu nie ulegną zmianie, jeśli masę m_k korbowodu zastąpi się pomyślanymi masami rozmieszczonymi w taki sposób, by m_k , S_O i I_O nie uległy zmianie. Redukcji dynamicznej korbowodu dokonać można na wiele sposobów [3].

Korbowód zastąpiono równoważnym układem płaskym, o dwóch częściowych masach korbowodu rozłożonych wg schematu przedstawionego na rys. 2.



Rys. 2

Przez m_{k1} oznaczono częściową masę korbowodu zredukowaną na oś sworznia tłokowego, przez m_{k3} częściową masę korbowodu zredukowaną na oś czopa korbowego. Aby redukcja masy korbowodu była prawidłowa / dokładna/, masę m_k rozłożono na okręgu opisanym ze środka sworznia tłoka tak, że jej moment bezwładności względem osi sworznia tłokowego wynosi ΔI . Można założyć znajomość wielkości m_{k1} , m_{k3} i ΔI , bowiem znane są m_k i położenie z_k środka ciężkości korbowodu na jego osi. Układ zastępczy z rys.2 jest prawidłowy i jednoznaczny pod warunkiem, że:

$$\begin{aligned} m_{k1} + m_{k3} &= m_k, \\ l m_{k3} &= S_O, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\Delta I + l^2 m_{k_3} = I_{\sigma} \quad (1) \text{c.d.}$$

Z nałożonych warunków widać, iż:

$$m_{k_1} = \frac{1 - z_k}{1} m_k, \quad m_{k_3} = \frac{z_k}{1} m_k, \quad \Delta I = I_{\sigma} - l z_k m_k \quad (2)$$

Energię potencjalną mechanizmu $U(\varphi)$, odniesioną do poziomu zerowego odpowiadającego położeniu czopa korbowego w punkcie B_0 , przy dowolnym kącie φ położenia korby, otrzymano w zmiennej bezwymiarowej w postaci $U^*(\varphi)$ [7]

$$U^*(\varphi) = U_2 \sin(\varphi + \gamma) - \left[U_1 + U_2 + \frac{l}{\lambda} U_1 (1 - \lambda \cos \varphi - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}) \right] \sin \gamma, \quad (3)$$

gdzie energia potencjalna w postaci bezwymiarowej

$$U^*(\varphi) = \frac{U(\varphi)}{I_w \omega_{sr}^2} \quad (4)$$

Wprowadzone tutaj oznaczenia skracające wynoszą:

$$U_1 = M_t + l_z M_z, \quad U_2 = M_s - M_{s_p} + l_z^* M_z, \quad (5)$$

a parametry w postaci bezwymiarowej:

$$M_t = \frac{r G_t}{I_w \omega_{sr}^2}, \quad M_s = \frac{r_s G_s}{I_w \omega_{sr}^2}, \quad M_{s_p} = \frac{r_p G_p}{I_w \omega_{sr}^2}, \quad (6)$$

$$M_z = \frac{r G_k}{I_w \omega_{sr}^2}, \quad l_z = \frac{z_k}{l}, \quad l_z^* = \frac{1 - z_k}{l}.$$

$$\text{Tu } G = m_{\sigma} g, \quad G_s = m_s g, \quad G_k = m_k g, \quad G_p = m_p g \quad (7)$$

są ciężarami odpowiednio tłoka, korby, korbowodu i przeciwcieżarów, g przyspieszeniem ziemskim, I_w to moment bezwładności wału z elementami osadzonymi na wale i obracającymi się wraz z nim,

$$\omega_{sr} \text{ średnia prędkość kątowa mechanizmu / np. nominalna}$$

$$\omega_{sr} = \frac{\sqrt{1} n}{30}, \quad n - \text{liczba obrotów korby/}$$

4. Energia potencjalna sił ciężkości ruchomych mechanizmów wielokorbowych tłokowych

Zajęto się maszynami tłokowymi wielokorbowymi jednostronnego działania, o układach korbowych podzielonych myślowo na k pojedynczych mechanizmów korbowych, a osiach cylindrów leżących w jednej płaszczyźnie. / Obecnie w praktyce technicznej stosuje się maszyny o liczbie wykorbień $k = 2-12$, najczęściej w układzie rzędownym, widlastym i przeciwsobnym/.

Ze względu na równomierność pracy maszyny, prace poszczególnych mechanizmów korbowych przesunięte są względem siebie o kąt, który jest wielokrotnością kąta fazowego α . Kąt fazowy α jest niezależny od układu wykorbień wału.

$$\alpha = \frac{T}{k}; \quad T - \text{okres cyklu pracy mechanizmu,} \quad (8)$$

$k - \text{liczba wykorbień mechanizmu.}$

W maszynach o obiegu dwusuwowym $/T = 2\pi/$ jednostronnego działania kąt fazowy wynosi

$$\alpha_d = \frac{2\pi}{k}, \quad (9)$$

obustronnego działania

$$\alpha_d = \frac{\pi}{k}.$$

W maszynach czterosuwowych $/T = 4\pi/$ jednostronnego działania

$$\alpha_c = \frac{4\pi}{k}, \quad (10)$$

obustronnego działania

$$\alpha_c = \frac{2\pi}{k}.$$

Przez α_j oznaczono kąt rozstawienia k -tego wykorbienia wału mechanizmu / kątowne przesunięcie fazowe k -tego wykorbienia/.

Dla rozpatrywanych k -korbowych mechanizmów jednostronnego działania α_j wyniesie

$$\alpha_j = \frac{T}{k} j; \quad j = (0, 1, \dots, k-1), \quad (11)$$

$$\alpha_{d_j} = \alpha_d j, \quad \alpha_{c_j} = \alpha_c j.$$

Kolejność pracujących wykorbień wielokorbowych maszyn dwu i czterokorbowych podano w pracach [3], [5], [6], dla naszych rozważań jest ona nieistotna.

Dla ruchu układów wielokorbowych rzędowych, o dowolnej liczbie mechanizmów jednokorbowych, wzór na energię potencjalną U_w otrzymano w następującej postaci bezwymiarowej

$$U_w^*(\varphi) = \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ U_2 \sin[(\varphi + \alpha_j) + \delta] - \left[U_1 + U_2 + \frac{1}{\lambda} U_1 (1 - \lambda \cos(\varphi + \alpha_j) - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)}) \right] \sin \delta \right\}, \quad (12)$$

gdzie $U_w^*(\varphi) = \frac{U_w}{I_w \omega_{sr}^2}$.

W przypadku szczególnym dla mechanizmu jednokorbowego $\alpha_j = 0$.

5. Uogólniona siła Lagrange'a od energii potencjalnej sił ciężkości ruchomych mechanizmów wielokorbowych

Przy wyprowadzaniu równań ruchu mechanizmów sposobem analitycznym, formułuje się je na drodze stosowania równań różniczkowych Lagrange'a II rodzaju [8]. Wtedy do równań Lagrange'a wstawia się energię potencjalną U sił ciężkości układu sprowadzoną do siły uogólnionej $\frac{\partial U}{\partial q_l}$, gdzie q_l jest współrzędną uogólnioną, l liczbą stopni swobody układu /ogniwa głównego/. W naszym przypadku ($q_1 = \varphi$) poszukiwano $\frac{\partial U_w^*}{\partial \varphi}$, otrzymując

$$Q_u^*(\varphi) = \sum_{j=0}^{k-1} \left\{ U_2 \cos[(\varphi + \alpha_j) + \delta] - U_1 \left[\sin(\varphi + \alpha_j) + \frac{\lambda \sin 2(\varphi + \alpha_j)}{2 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)}} \right] \sin \delta \right\}; \quad Q_u^*(\varphi) = \frac{\partial U_w^*}{\partial \varphi}. \quad (13)$$

Mając na uwadze, że stosunek korbowy λ jest liczbą małą ($\lambda \ll 1$), rozwinęto wyrażenie $\frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi + \alpha_j)}}$ na szereg ze względu

na $\lambda^2 \sin^2(\psi + \alpha_j)$ [9]. Otrzymane szeregi potęgowe wyrażono szeregami trygonometrycznymi posługując się wzorem /1.320.1 / z [10]. Wzór (13) dało się wyrazić w postaci szeregów Fouriera

$$Q_u^*(\psi) = N \sum_{j=0}^{k-1} \cos(\psi + \alpha_j) + \sum_{n=1,2,4,\dots}^{\infty} W_n \sum_{j=0}^{k-1} \sin n(\psi + \alpha_j). \quad (14)$$

Tutaj parametry w postaci bezwymiarowej oznaczono następująco:

$$N = U_2 \cos \delta, \quad W_1 = N_1 + N_2, \quad W_n = N_1 \Lambda_n; \\ (n \neq 1 \\ n = 2, 4, 6, 8, \dots),$$

$$N_1 = -U_1 \sin \delta, \quad N_2 = -U_2 \sin \delta, \\ \Lambda_2 = 0,5 + 0,125 \lambda^3 + 0,058594 \lambda^5 + 0,034180 \lambda^7 + \\ + 0,022432 \lambda^9 + 0,015862 \lambda^{11} + \dots, \\ \Lambda_4 = -0,0625 \lambda^3 - 0,046875 \lambda^5 - 0,034180 \lambda^7 - 0,025635 \lambda^9 - \\ - 0,019827 \lambda^{11} - \dots, \\ \Lambda_6 = 0,011719 \lambda^5 + 0,014648 \lambda^7 + 0,014420 \lambda^9 + 0,013218 \lambda^{11} + \dots, \\ \Lambda_8 = -0,002441 \lambda^7 - 0,004272 \lambda^9 - 0,005287 \lambda^{11} - \dots, \\ \Lambda_{10} = 0,000534 \lambda^9 + 0,001202 \lambda^{11} + \dots, \\ \Lambda_{12} = -0,000120 \lambda^{11} - \dots,$$

Uogólnioną siłę $Q_u^*(\psi)$ przedstawiono szeregami, ponieważ po wprowadzeniu w postaci (13) do równań ruchu, należałoby obliczać, w czasie rozwiązywania równań ruchu, całki typu eliptycznego, w których stosunek korbowy λ występowałby jako dodatkowy parametr. Przy ogólnych wyprowadzeniach nie można by przyjmować konkretnych wartości λ dla wyliczenia tych całek. Poza tym przy wyrażeniu wzoru (13) szeregami (14) stworzono możliwość analizy wpływu λ na uogólnioną siłę od energii potencjalnej. W przypadku

mechanizmów jednokorbowych $Q_u^*(\varphi)$ oblicza się według wzorów (14) lub (13), wstawiając za $\alpha_j=0$.

6. Sumowanie szeregów

Po wysumowaniu względem wskaźnika j występujących w równaniu (14) sum, $Q_u^*(\varphi)$ otrzymano w postaci

$$Q_u^*(\varphi) = N\chi \cos \varphi + k \sum_{\nu=1}^m W_{(\nu p)} \sin(\nu p \varphi). \quad (16)$$

Tutaj ν to wskaźnik sumowania, p wskaźnik, (νp) krotność współczynników szeregu; $(\nu p) = (1, 2, 3, \dots, 12)$. Graniczny wskaźnik m sumy nieskończonego szeregu Fouriera, narzucony został przyjęciem za ostatni dwunastego współczynnika szeregu W_{12} .

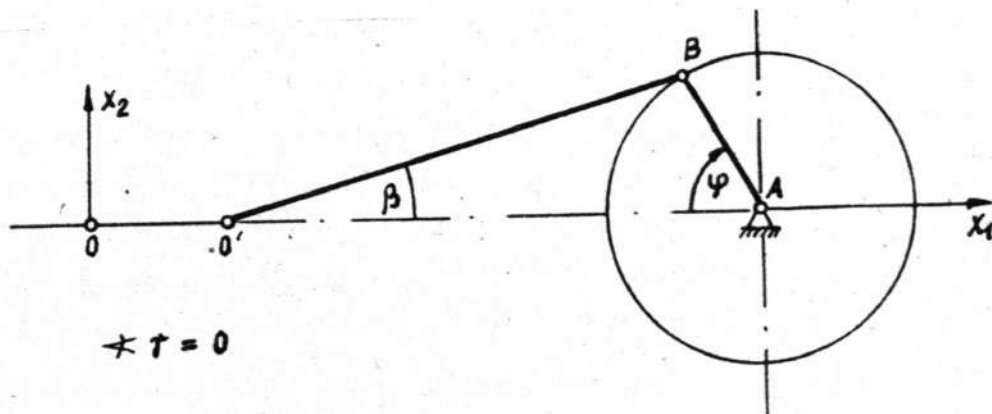
Dla mechanizmów dwusuwowych

$$\begin{aligned} p=k, \quad \chi=1, \quad \text{dla } k=1, \\ m=12, \quad \chi=0, \quad \text{dla } k=2, \dots, 12, \end{aligned} \quad (17)$$

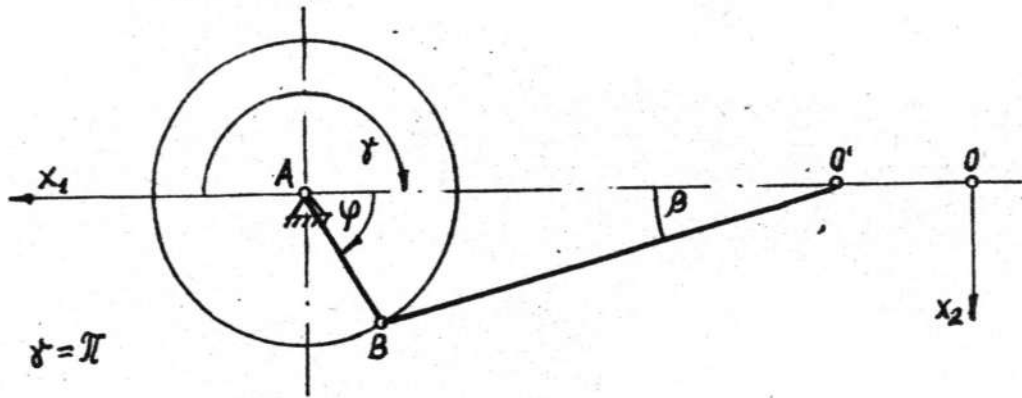
dla mechanizmów czterosuwowych

$$\begin{aligned} p=\frac{k}{2}, \quad \chi=k, \quad \text{dla } k=1, 2, \\ m=24, \quad \chi=0, \quad \text{dla } k=3, 4, \dots, 12. \end{aligned} \quad (18)$$

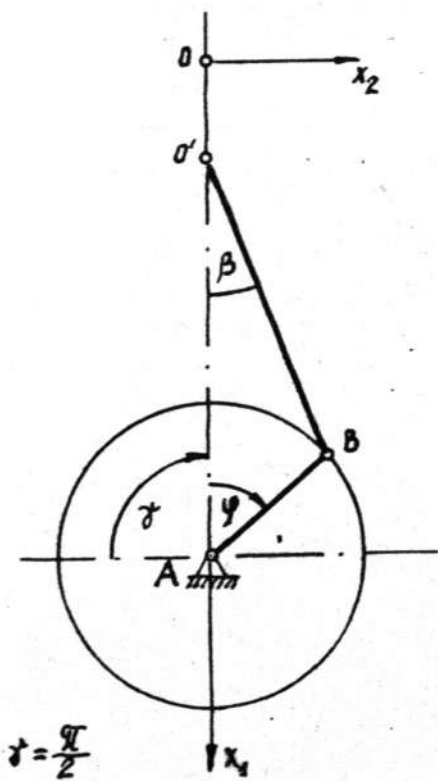
Przypadki szczególne wzoru (16) /dla szczególnych położenia mechanizmu wielokorbowego/



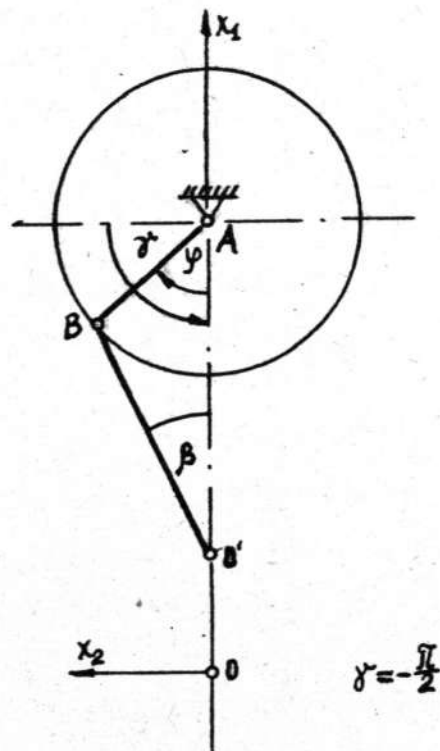
Rys.3a



Rys. 3b



Rys. 3



Rys. 3

Dla mechanizmu wielokorbowego leżącego, tj. gdy:

- a. $\gamma = 0$ /rys.3.a./, wzór(16) otrzymano w postaci

$$Q_u^*(\varphi) = N \sum_{j=0}^{k-1} \cos(\varphi + \alpha_j), \quad (19)$$

- b. $\gamma = \pi$ /rys. 3.b./, wtedy

$$Q_u^*(\varphi) = -N \sum_{j=0}^{k-1} \cos(\varphi + \alpha_j). \quad (20)$$

Dla mechanizmu wielokorbowego stojącego, t.j. kiedy

- c. $\gamma = \frac{\pi}{2}$ /rys.3.c./, otrzymano

$$Q_u^*(\varphi) = k \sum_{\nu=1}^m W_{(\nu p)} \sin(\nu p \varphi). \quad (21)$$

Dla mechanizmu wielokorbowego wiszącego, przy

- d. $\gamma = -\frac{\pi}{2}$ / rys.3.d./, jest

$$Q_u^*(\varphi) = -k \sum_{\nu=1}^m W_{(\nu p)} \sin(\nu p \varphi). \quad (22)$$

7. Analiza otrzymanych wzorów

Ciągi współczynników Λ_n / patrz wzór (15) / szeregu Fouriera z wzoru (14) są szybkozbieżne ze względu na λ . Decydują ich pierwsze wyrazy. W celu uchwycenia pierwszych głównych harmonicznych szeregu z wzoru (16) dla wszystkich $k=1-12$, dokładność ciągów $\Lambda_{(\nu p)}$ przyjęto do wyrazu Λ_{12} . Z uwagi na małą wartość λ /największy stosowany stosunek korbowy $\lambda = 0,4$ /, wyrazy ciągów o wskaźnikach wyższych, jako pomijalnie małe, nie mają praktycznego znaczenia dla wielkości rozpatrywanych sum.

Widać we wzorze (16), że człon N wzoru znika dla mechanizmów o cyklu pracy dwusuwowym przy $k > 1$ a dla czterosuwowych przy $k > 2$. Współczynniki połówkowe $W_{(\nu p)} / i \Lambda_{(\nu p)}$ patrz wzór (15) /, pojawiające się we wzorze (16) dla mechanizmów o okresie pracy $T=4\pi$, są zerami. Dla jakich k , przy sumowaniu po wskaźniku ν ,

pojawiają się niezerowe wyrazy ciągów $\Lambda_{(vp)}$ i tym samym niezerowe współczynniki $W_{(vp)}$ sum we wzorze (16), odczytać można z tabeli 1 i 2. Przy przyjętej dokładności ciągu $\Lambda_{(vp)}$ wzór (16) ma dla mechanizmów wielokorbowych wartości niezerowe /ze względu na N i $W_{(vp)}$, lub tylko na $W_{(vp)}$ / przy następującej liczbie wykorbień $k=1,2,3,4,5,6,8,10,12$. Przy $k=7,9,11$ wpływ sił ciężkości na ruch mechanizmów można zaniedbać jako pomijalnie mały, bowiem np. niezerową wartość wzoru (16) dla $k=7$ otrzymano dopiero przy Λ_{14} .

Z analizy wzorów (16), (15), (6), (5) wynika, że dla $k=1$ /przy $T=2\pi$ / i $k=1,2$ /przy $T=4\pi$ / we wzorze (16) interwenują ciężary wszystkich przemieszczanych w płaszczyźnie pionowej ogniów ruchomych mechanizmu wielokorbowego /tj. tłoka, korbowodu, korby i przeciwcieżarów/, a dla większej liczby wykorbień w mechanizmie uwzględniać trzeba wpływ sił ciężkości od mas tłoka i korbowodu.

Analizując przypadki szczególne /wzory (19), (20), (21), (22)/ da się łatwo sprawdzić poprawność wyprowadzonego wzoru ogólnego (16). W przypadkach mechanizmów leżących nie interweniuje we wzorach ciężar tłoka, w przypadkach mechanizmów stojących i wiążących istotne są wpływy od ciężarów wszystkich ogniów ruchomych.

8. Uwagi końcowe

Przedstawione w pracy wyniki mogą być przydatne w badaniach dynamiki mechanizmów wielokorbowych, szczególnie przy wyprowadzaniu metodami energetycznymi /np. równaniami Lagrange'a / równań ruchu. Otrzymana prosta i zwarta postać wzoru (16)/wyrażona wielomianem trygonometrycznym/, pozwoliła przeprowadzić analizę istotności wpływów sił ciężkości ogniów ruchomych na ruch mechanizmów wielokorbowych rzędowych, w zależności od liczby k wykorbień.

Tabela 1. Niezerowe współczynniki $W_{(\nu p)}$ i wyrazy $\Lambda_{(\nu p)}$ dla mechanizmów wielokorbowych dwusuwowych

Współczynniki $W_{(\nu p)}$ szeregu Fouriera $W_{(\nu p)} = N_1 + N_2$ $(\nu p) = 1$ $W_{(\nu p)} = N_1 \Lambda_{(\nu p)}$ $(\nu p) \neq 1$	Wyrazy ciągu $\Lambda_{(\nu p)}$ wg wzoru (15)	Niezerowe wartości $W_{(\nu p)}$ i $\Lambda_{(\nu p)}$ oznaczone jako +												
		k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
W_1		1	+											
W_2	Λ_2	1 2	+											
W_4	Λ_4	1 2 4		+		+								
W_6	Λ_6	1 2 3 6			+				+					
W_8	Λ_8	1 2 4 8				+					+			
W_{10}	Λ_{10}	1 2 5 10						+					+	
W_{12}	Λ_{12}	1 2 3 4 6 12								+				+

Z otrzymanych wzorem (16) i tabelami 1 i 2 wyników wypływają wnioski dla praktyki inżynierskiej, odnośnie uwzględniania czy zaniechania w ogóle /a w przypadku uwzględniania, to z dokładnością do której krotności/, wpływu energii potencjalnej ogniw na niejednostajność ruchu danych k- korbowych mechanizmów. Wydaje się, że uwzględnianie energii potencjalnej układów w badaniach ruchu „ustalonego” mechanizmów wielokorbowych może być istotne szczególnie dla ciężkich, średnio czy szybkoobrotowych mechanizmów, o liczbie wykorbień $k=1,2,4$ / ewentualnie też dla $k=3,6$ /. Wtedy posługiwać się można wzorem (16) czy wzorami (13), (14) bądź wzorem (12).

Wyniki uzyskane w pracy dla mechanizmów wielokorbowych rzędowych można łatwo wykorzystać dla układów widlastych, przeciwsobnych, gwiazdzistych i innych.

Literatura

- [1]Dinamika krupnych maszyn, red.Sokolovskogo V.I., Kazaka S.A., Kirpičnikowa B.M., Sustavova M.I., Gorbačeva A.G., Izd. „Mašinostroenie”, Moskwa 1969
- [2]Jędrzejowski J., Mechanika układów korbowych silników samochodowych, WKiŁ, Warszawa 1972
- [3]Kożeśnik J., Dynamika maszyn, WNT, Warszawa 1963 /tłum. z czeskiego/
- [4]Kožewnikow S.N., Teoria mechanizmów i maszyn, MON, Warszawa 1956 /tłum.z ros./
- [5]Biezeno C.B., Grammel R., Technische Dynamik, Bd.I, Springer - Verlag, Berlin 1953
- [6]Poradnik inżyniera mechanika, T. 2, WNT, Warszawa 1968
- [7]Stańczak M., Analityczny sposób wyznaczania nierównomierności ruchu mechanizmów wielokorbowych /praca doktorska/ Politechnika Poznańska, Poznań 1973

- [8] Gutowski R., *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971
- [9] Siemiendiajew K.A., Bronsztejn I.N., *Matematyka, Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1968 /tłum. z ros./
- [10] Ryżyk I.M., Gradsztejn I.S., *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*, PWN, Warszawa 1964 /tłum. z ros./

GENERALISED LAGRANGE FORCES DUE TO POTENTIAL ENERGY IN THE
MOVEMENT OF MULTICRANK MECHANISMS

Summary

The general case of a mult crank mechanism consisting of k identical crank mechanisms was studied. The potential energy of the mechanism in quasi-steady movement, as defined by the generalised main link coordinate, was calculated. The potential energy was reduced to a generalised potential force expressed by double sums. The formula was transformed into a single Fourier series, convenient for deriving the equations for the movement of a mechanism by means of type II Lagrange equations. The significance of the effect of the gravitational forces of the moving parts on the movement of mult crank mechanisms was analysed with respect to k cranks. Hints useful in engineering practice are given.

ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ ЛАГРАНЖА ОТ ПОТЕНЦИОНАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ
В ДВИЖЕНИИ МНОГОШАТУННЫХ МЕХАНИЗМОВ

Р е з ю м е

В статье рассматривается общий случай многшатунного механизма, состоящего из идентичных одношатунных механизмов. Подсчитана потенциальная энергия механизма в движении. Она проверена по отношению к обобщенной потенциальной силе, выраженной двойными суммами. Формула преобразована в один ряд Фурье. Проведен анализ существенности влияний сил тяжести движущихся звеньев на движение многшатунных механизмов, в зависимости от количества кривошипов. Выводы, сделанные в статье, пригодны для инженерной практики.