

ZBIGNIEW BROS

MAREK LEWANDOWSKI

WSP w Bydgoszczy

DYNAMIKA PEWNEGO MECHANICZNO-PNEUMATYCZNEGO UKŁADU WIBROIZOLU-
JĄCEGO

1. Wstęp

W miarę ciągłego rozwoju techniki rosną prędkości ruchu elementów maszyn. W obliczeniach wytrzymałościowych współczesnych maszyn należy uwzględniać nie tylko skutki statycznie działającego obciążenia, ale również naprężenia i odkształcenia powstające w wyniku drgań maszyny lub jej zespołów. W przypadku, gdy częstość drgań własnych maszyny lub jej elementów jest zgodna z częstością zewnętrznych sił wymuszających /rezonans/ następuje gwałtowny wzrost amplitud drgań, który może doprowadzić do całkowitego zniszczenia konstrukcji [5].

Z tych względów zachodzi potrzeba rozwiązywania coraz bardziej złożonych problemów związanych z wibroizolacją konstrukcji. Istotą wibroizolacji jest zmniejszenie propagacji oddziaływań dynamicznych przekazywanych na otoczenie.

Techniczną jakość wibroizolacji określa ułamek wyrażający zmniejszenie reakcji dynamicznych. W teorii wibroizolacji dominują stosunkowo dobrze poznane i opracowane układy o charakterystyce liniowej tworzone z elementów podstawowych, jak: masa, sprężyna, tłumik z tarciem lepkiem [1].

Najnowsze badania zagadnień wibroizolacji dotyczą układów nieliniowych. Wynika to stąd, że układy takie stanowią klasę o znacznie szerszych możliwościach redukcji drgań, niż to ma miejsce w układach liniowych. Zasadniczy postęp w rozwiązywaniu dynamicznych równań ruchu układów nieliniowych dokonał się dzięki zastosowaniu elektronicznej techniki obliczeniowej. Układy takie opisywane są przez równania nieliniowe i w rozumieniu dynamiki są zazwyczaj niecałkowalne [6].

Mimo dość szerokich możliwości stosowania w technice wspomnianych układów metody ich badań nie są szeroko rozwinięte. Do przyczyn takiego stanu należy zaliczyć złożoność równań opisujących ich ruch /przeważnie stopnia wyższego niż drugi/, a także trudność modelowej realizacji układów o własnościach fizycznie nieliniowych.

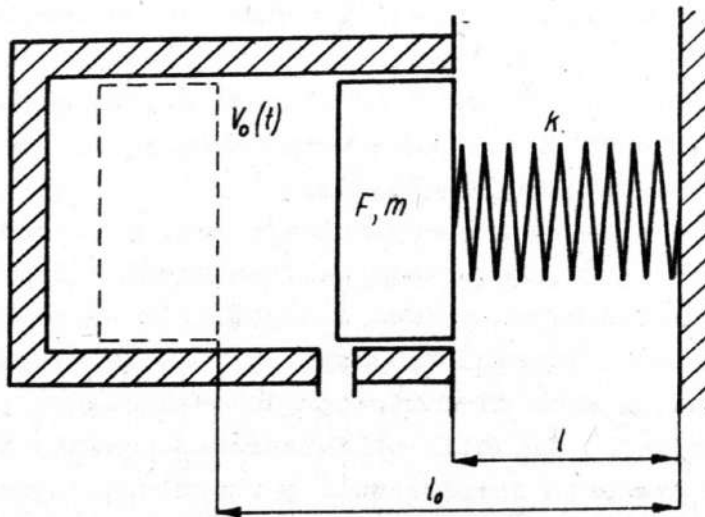
Znane są zastosowania tłumików drgań opartych na układach o własnościach fizycznie nieliniowych, co stanowi bodziec do stawiania i rozwiązywania nowych problemów ich dynamiki.

2. Sformułowanie zagadnienia

Układ czysto mechaniczny jest określony przez położenie i prędkość w każdej chwili czasu. Siły wywołujące ruch takiego układu mogą zależeć od czasu, położenia i prędkości [6].

Można jednakże wskazać układy, w których prócz wymienionych zmiennych siły zależą również od temperatury. Model układu o takich własnościach pokazano na Rys.1.

W modelu tym ruch masy tłoka m jest wywołany zmienną siłą napięcia sprężyny oraz zmienną siłą ciśnienia powietrza w cylindrze. Funkcjonalne działanie modelu jest następujące: po zwolnieniu sprężyny i zakryciu przez tłok otworu łączącego wnętrze cylindra z atmosferą spręża się w nim powietrze.



Rys.1. Schemat modelu fizycznego

Szttywność sprężyny jest k , wykładnik adiabaty powietrza κ , przekrój tłoka F , długość sprężyny w stanie swobodnym l_0 , długość sprężyny napiętej l .

Formułujemy zadanie: wyznaczyć ruch masy, jej prędkość oraz ciśnienie powietrza w cylindrze - wszystko jako funkcje czasu.

W rozwiązaniu przedstawionego zagadnienia przyjęto następujące założenia modelowe:

- brak wymiany ciepła między powietrzem w cylindrze i otoczeniem,
- rozpatrywany układ jest beztarciowy w sensie mechanicznym i termodynamicznym,
- parametry termiczne powietrza przed rozpoczęciem ruchu są znane $/p_0, V_0/$,
- znane są parametry mechaniczne układu $/m, F, k, \kappa, l_0/$.

3. Rozwiązanie problemu

Rozpatrywane zagadnienie jest pewnym typem układu termomechanicznego. Wynika z tego, że stan rozpatrywanego układu jest jednoznacznie określony przez zmienne mechaniczne i termiczne, [7].

Podstawą rozwiązania problemu dynamiki układu jest I zasada termodynamiki, która przy pominięciu wymiany ciepła z otoczeniem ma w przypadku przemiany zamkniętej postać [4]:

$$(1) \quad dU + pdV = 0,$$

gdzie: U - jest energią wewnętrzną gazu, p -ciśnieniem powietrza w cylindrze, V -objętością cylindra.

Po wprowadzeniu czasu jako zmiennej niezależnej do równania /1/ otrzymano:

$$(2) \quad \dot{U} + p\dot{V} = 0, \quad (\dot{}) = \frac{d}{dt}.$$

Wzór na energię wewnętrzną ma postać:

$$(3) \quad U = c_v m_0 T,$$

gdzie: m_0 - jest masą powietrza zamkniętą w cylindrze, c_v - jest ciepłem właściwym powietrza przy stałej objętości, T -temperaturą bezwzględną powietrza.

Pochodna czasowa energii wewnętrznej wyraża się wzorem:

$$(4) \quad \dot{U} = c_v m_0 \dot{T} + c_v \dot{m}_0 T.$$

Ponieważ rozpatrywana przemiana jest zamknięta, wobec tego, [4]:

$$(5) \quad \dot{m}_0 = 0,$$

co po podstawieniu do zależności (4) i (2) daje w wyniku:

$$(6) \quad c_v m_0 \dot{T} + p \dot{V} = 0.$$

Dynamiczne równanie ruchu masy przedstawia się następująco:

$$(7) \quad m \ddot{x} = k (l_0 - l - x) - F (p - p_0),$$

gdzie: p - jest funkcją ciśnienia powietrza w cylindrze, a p_0 - jest ciśnieniem otoczenia.

Rozwiązując układ równań (6) i (7) względem p otrzymano:

$$(8) \quad m \ddot{x} = k (l_0 - l - x) + F \left(p + c_v m_0 \frac{\dot{T}}{V} \right).$$

Dalej zastąpiono zmienną T przez ciśnienie w cylindrze p :

$$(9) \quad pV = m_0 RT,$$

gdzie: R - jest indywidualną stałą gazową.

Po zrózniczkowaniu związku (9) względem czasu otrzymano:

$$(10) \quad p \dot{V} + \dot{p} V = m_0 R \dot{T}.$$

Z układu równań (6) i (10) wynika:

$$(11) \quad \dot{p} V + p \dot{V} \left(1 + \frac{R}{c_v} \right) = 0.$$

Podstawiając zależności, [4]:

$$(12) \quad \frac{c_p}{c_v} = \kappa \quad \text{i} \quad R = c_p - c_v,$$

gdzie: c_p - jest ciepłem właściwym powietrza przy stałym ciśnieniu, - równanie (11) ma postać:

$$(13) \quad \dot{p} V + \kappa p \dot{V} = 0.$$

Z (8) wynika:

$$(14) \quad \begin{cases} p = p_0 + \frac{k}{F} (l_0 - l - x) - \frac{m\ddot{x}}{F}, \\ \dot{p} = -\frac{k}{F} \dot{x} - \frac{m}{F} \ddot{x}. \end{cases}$$

Objętość V jest związana z przemieszczeniem masy zależnością:

$$(15) \quad V = V_0 - Fx, \quad \dot{V} = -F\dot{x}$$

Należy stwierdzić, że objętość cylindra V zależy od położenia tłoka w danej chwili, określonego jego przemieszczeniem x . Podobnie \dot{V} zależy od \dot{x} . Zmienne x , \dot{x} są obok zmiennej niezależnej t , zmiennymi układu czysto mechanicznego. Występowanie w równaniu (9) temperatury T dowodzi, że opisuje ono przemianę zmiennych stanów termicznych układu. Analizując równania (9) i (15) należy stwierdzić, że badany układ jest pewnego rodzaju układem termomechanicznym.

Łącząc (8), (13), (14) i (15) otrzymano równanie ruchu masy tłoka w ostatecznej postaci:

$$(16) \quad \ddot{x}x - b\dot{x} + \kappa\ddot{x}x + c\dot{x}x - dx = 0,$$

gdzie oznaczono:

$$(17) \quad b = \frac{V_0}{F}, \quad c = \frac{k}{m} (1 + \kappa) \quad d = \frac{1}{m} \left[\frac{kV_0}{F} - \kappa F_{p_0} + k (l_0 - l) \right]$$

Równanie (16) rozwiązano za pomocą znanej w dynamice metody ruchów początkowych, [6] przyjmując rozwiązanie w postaci wielomianu:

$$(18) \quad x(t) = \sum_{i=1}^n a_i t^i \text{ [m]}, \quad t \text{ [s]}, \quad a_i \text{ [m/s}^i\text{]},$$

gdzie: n - zależy od wymaganej dokładności rozwiązania.

Odpowiednie pochodne funkcji (18) są postaci:

$$(19) \quad \frac{d^k x_i}{dt^k} = \sum_{i=1}^n \frac{i!}{(i-k)!} a_i t^{i-k} \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

dla $i-k < 0$ silnia określona jest za pomocą funkcji Γ Eulera, [2].

W efektywnym rozwiązaniu w wielomianie (18) przyjęto $n = 6$.
Warunki początkowe dla równania (16) są następujące:

$$(20) \quad x(t=0) = 0, \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

Z warunków (20) wynikają współczynniki a_1, a_2 rozwinięcia wielomianu (18).

Dalsze współczynniki a_1 wyznaczono w drodze podstawienia funkcji (18) i (19) do równania (16) i przyrównania do zera współczynników przy odpowiednich potęgach czasu. Dla wyznaczonych współczynników otrzymano układ równań:

$$(21) \quad \begin{cases} a_1(2\lambda a_2 - d) - 6ba_3 = 0, \\ ca_1^2 - 24ba_4 + 6a_1a_3(1 + \lambda) - 2a_2(d - 2\lambda a_2) = 0, \\ 2a_2a_3(1 + 3\lambda) + 4a_1a_4(2 + \lambda) - 20ba_5 + ca_1a_2 - da_3 = 0, \\ 4a_2a_4(3 + 4\lambda) + 10a_1a_5(3 + \lambda) + 3a_3^2(1 + 3\lambda) - 60ba_6 + 2ca_1a_3 + \\ + ca_2^2 - 2da_4 = 0. \end{cases}$$

Współczynniki wyznaczone z układu równań (21) i podstawione do wielomianu (18) i równań (19), (14) tworzą pełne rozwiązanie zagadnienia.

Można wskazać inny sposób rozwiązania postawionego zagadnienia. Wystarczy zauważyć, że siły wymuszające ruch zależą tylko od położenia. Wobec tego słuszna jest zasada równoważności pracy i energii, którą tutaj zastosowano w postaci różniczkowej, [6],

$$(22) \quad mvdv = P(x) dx,$$

gdzie: v - jest prędkością masy m , P - całkowitą siłą działającą na tłok.

Całkując obustronnie równość 22 otrzymuje się:

$$(23) \quad \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_0}^v = \int_{x_0}^x P(x) dx,$$

gdzie: siła $P(x)$ jest, jak w równaniu (8):

$$(24) \quad P(x) = -F(p - p_0) + k(l_0 - l - x).$$

Z równania adiabaty, [4]:

$$(25) \quad p = p_1 V_1^\kappa V^{-\kappa},$$

gdzie: p_1 - ciśnienie panujące w cylindrze w danej chwili czasu,
 V_1 - objętość cylindra w danej chwili.

Łącząc (15), (24) i (25) otrzymano równanie siły $P(x)$ w postaci:

$$(26) \quad P(x) = F_{p_0} + k(l_0 - l - x) - \frac{F_{p_1} V_1^\kappa}{(V - Fx)^\kappa}.$$

Przy uwzględnieniu (26) związek (23) przyjmuje postać:

$$(27) \quad \frac{mv^2}{2} \Big|_{v_0}^v = \int_{x_0}^x \left[F_{p_0} + k(l_0 - l - x) - \frac{F_{p_1} V_1^\kappa}{(V - Fx)^\kappa} \right] dx.$$

Po obustronnym scałkowaniu równania (27) prędkość ruchu tłoka wynosi:

$$(28) \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} \left\{ F_{p_0} x + k(l_0 - l)x - \frac{kx^2}{2} - \frac{p_0 V_0^\kappa}{\kappa - 1} \left[(V_0 - Fx)^{1-\kappa} - V_0^{1-\kappa} \right] \right\}}$$

Czas trwania ruchu tłoka wyraża się wzorem:

$$(29) \quad t \Big|_{t_0}^t = \int_0^x R(x) dx, \text{ gdzie } R(x) = \frac{1}{v}$$

Zależności (28) i (29) stanowią również rozwiązanie równania. Zauważmy jednakże, że tutaj prędkość ruchu tłoka v oraz czas bieżący t są wyrażone jako funkcje przemieszczenia masy. Jest to więc rozwiązanie równoważne, lecz wyrażone w innych zmiennych.

4. Przykład liczbowy

W celu ilustracji otrzymanych rozwiązań analitycznych wykonano obliczenia przykładu liczbowego. Przykład ten rozwiązano niezależnie dwiema przedstawionymi metodami.

Do obliczeń przyjęto następujące dane liczbowe:

$$m = 1 \text{ [kg]}, F = 3 \cdot 10^{-3} \text{ [m}^2\text{]}, k = 4 \text{ [N/m]}, l_0 = 2 \cdot 10^{-1} \text{ [m]}, \\ l = 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ [m]}, p_0 = 10^{-3} \text{ [Pa]}, V_0 = 165 \cdot 10^{-6} \text{ [m}^3\text{]}, \mathcal{H} = 1,4.$$

W obliczeniach metodą ruchów początkowych ruch masy tłoka m opisano za pomocą 10 równań postaci (18). Okazało się bowiem, że ze względu na wymogi dokładności nie jest możliwe opisanie całego ruchu jednym rozwiązaniem postaci (18). Przy rozdzielaniu ruchu całkowitego na 10 ruchów cząstkowych kierowano się kryterium dokładności wyrażonym żądaniem, by ostatni wyraz wielomianu (18) miał wartość mniejszą od 1% wartości głównej funkcji przemieszczenia tj. wyrazu pierwszego. Przy podziale całego ruchu na kilka ruchów częściowych każdy z nich rozpoczyna się w chwili czasu $t = 0$. A zatem czas ciągły jest sumą czasów trwania wszystkich ruchów poprzednich. Ostatni dziesiąty ruch cząstkowy, jak również całkowity ruch fizyczny kończy się wówczas, gdy prędkość masy tłoka zmaleje do zera /co oznacza koniec procesu sprężania powietrza w cylindrze/.

Przechodząc do pierwszego ruchu cząstkowego ustalono stałe zależne w równaniu (16) :

$$b = 5,5 \cdot 10^{-2} \text{ [m]}, c = 9,6 \cdot 10^4 \text{ [1/s}^2\text{]}, d = 5,52 \cdot 10^3 \text{ [m/s}^2\text{]}.$$

Z przyjętych warunków początkowych wynika, że $a_0 = 0$ i $a_1 = 0$. Współczynnik $a_2 = 10^3 \text{ [m/s}^2\text{]}$ wyznaczono z równania (8), natomiast pozostałe współczynniki wyznaczono z układu równań (21) :

$$a_3 = 0, a_4 = -3,9697 \cdot 10^6 \text{ [m/s}^4\text{]}, a_5 = 0, a_6 = 7,4966 \cdot 10^8 \text{ [m/s}^6\text{]}$$

Otrzymane współczynniki a_i $i=6$ podstawiono do kinematycznego równania ruchu masy (18) i otrzymano:

$$(30) \begin{cases} x = 10^3 t^2 - 3,9697 \cdot 10^6 t^4 + 7,4966 \cdot 10^8 t^6 \text{ [m]}, t = \text{[s]}, \\ 0 \leq t \leq 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}. \end{cases}$$

Wynikająca z równania (30) funkcja prędkości jest wielomianem:

$$(31) \begin{cases} \dot{x} = 2 \cdot 10^3 t - 4 \cdot 3,9697 \cdot 10^6 t^3 + 6 \cdot 7,4966 \cdot 10^8 t^5 \text{ [m/s]}, t = \text{[s]}, \\ 0 \leq t \leq 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ [s]}. \end{cases}$$

Otrzymana z równania (16) funkcja ciśnienia:

$$(32) \quad \begin{cases} p(t) = \frac{k}{F} \left[1_0 - 1 - (10^3 t^2 - 3,9697 \cdot 10^6 t^4 + 7,4966 \cdot 10^8 t^6) \right] + \\ + p_0 - \frac{m}{F} \left(2 \cdot 10^{-3} - 12,3,9697 \cdot 10^6 t^2 + 30,7,4966 \cdot 10^8 t^4 \right), \\ p = [\text{Pa}] , t = [\text{s}], 0 \leq t \leq 2,5 \cdot 10^{-3} [\text{s}]. \end{cases}$$

Narzucone kryterium dokładności rozwiązania pierwszego ruchu cząstkowego wyrażone równaniem kinematycznym (30) jest spełnione dla przedziału czasu $0 \leq \tau \leq 2,5 \cdot 10^{-3}$ s.

Przyjmując dalsze chwile czasu τ trwania ruchu zbudowano nowe rozwiązania, dla których objętość początkowa V_0 i prędkość \dot{x} masy wynikają ze stanu końcowego w ruchu poprzednim. Dla dalszych ruchów cząstkowych obliczono nowe wartości stałych zależnych b , c , d oraz współczynniki a_i . W każdym z tych ruchów $x(0) = 0$. Ponadto we wszystkich ruchach współczynniki $c = 9,6 \cdot 10^4$ [1/s]. W Tabeli 1. przedstawiono warunki początkowe i wartości współczynników dla kolejnych ruchów cząstkowych obliczonego układu. Tabela 2. przedstawia uzyskane rozwiązania numeryczne rozpatrywanego układu metodą ruchów początkowych. Wartości liczbowe przedstawione w tej tabeli stanowią podstawę do sporządzenia charakterystyk układu.

Ten sam przykład liczbowy rozwiązano metodą całkową przyjmując granice całkowania od 0 do x i v .

W Tabeli 3. dla założonych wartości przesunięcia tłoka x przedstawiono obliczone wartości v , $R(x)$, t , τ .

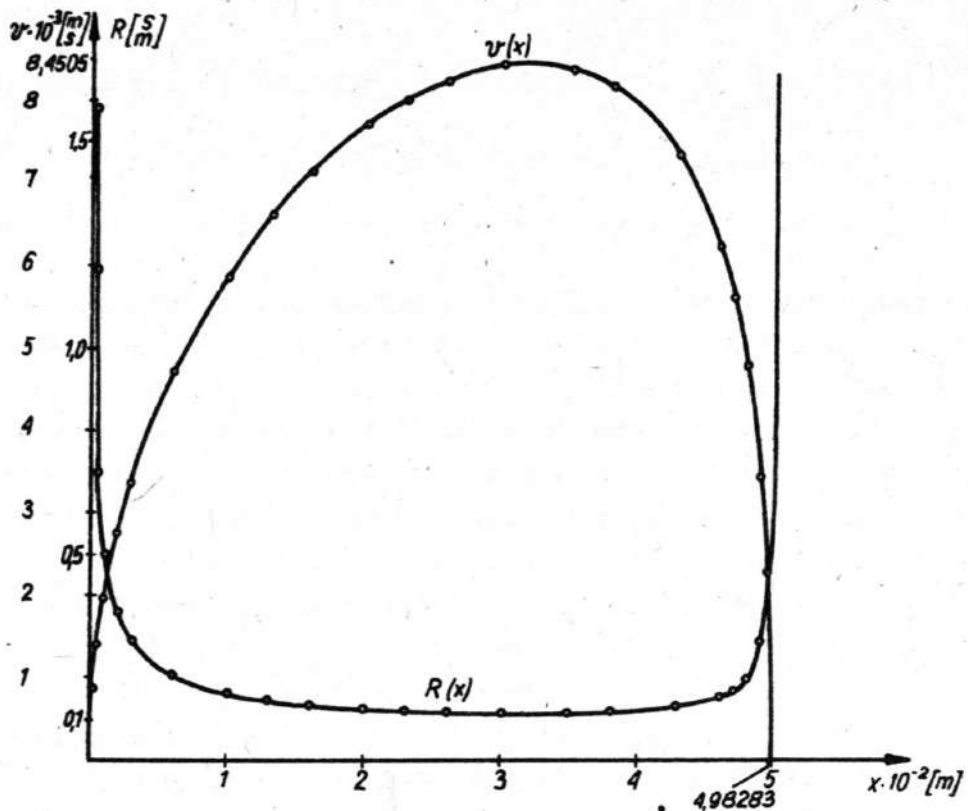
Rozpatrywana całka (29) posiada osobliwości w punkcie $x = 0$ i $x = x_k / x_k$ przemieszczenie odpowiadające zakończeniu ruchu/.

W tych bowiem punktach funkcja podcałkowa przyjmuje wartości nieskończone.

W celu określenia typu osobliwości funkcji podcałkowej (29) w punkcie $x = 0$ rozwinięto ją w szereg MacLaurina, [3]:

$$(33) \quad f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ dla } |x| < \delta$$

Zachowując w rozwinięciu (33) trzy wyrazy przekształcono całkę (29) do postaci:



Rys.2. Szkic do oceny osobliwosci funkcji podcałkowej

$$(34) \quad t \approx \frac{m}{2} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{bx - cx^2}}$$

Wprowadzając oznaczenia: $b = k(1_0 - 1)$ i $c = \frac{1}{2}k + 0,7p \frac{F^2}{V_0}$,

otrzymano całkę typu:

$$(35) \quad I = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{bx - cx^2}}$$

Całka ta jest równa, [2]:

$$(36) \quad I = \sqrt{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{arsinh} \frac{2cx+b}{\sqrt{\Delta}}$$

Rozwiązanie całki 36 utrzymano dla zmiennej x z przedziału:

$$0 \leq x \leq 0,05 \cdot 10^{-2}, x \text{ [m]}.$$

Następne czasy trwania ruchu masy tłoka wyliczono korzystając z metody trapezów przybliżonego rozwiązywania całek. Czasy t dla $0,05 \cdot 10^{-2} \leq x \leq 4,95 \cdot 10^{-2}$ obliczono z wzoru, [3]:

$$(37) \quad \left| \int (x) dx \right| \approx \frac{b-a}{n} |f(b) - f(a)|.$$

Dla określenia charakteru niewłaściwości funkcji $R(x)$ w punkcie $x = x_k$ rozwinięto ją w szereg Taylora, [3]:

$$(38) \quad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a).$$

Rozwijając funkcję (29) w szereg Taylora wokół punktu $x_k = 4,98283 \cdot 10^{-2}$ [m] otrzymano przy zachowaniu w (38) trzech wyrazów, przy czym x_k jest punktem zwrotnym tłoka,

$$(39) \quad I = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{Fp_0 x + k(1_0 - 1)x - k\frac{x^2}{2} - 4125(a+bx+cx^2)}}$$

Stwierdzono, że energia potencjalna sprężyny

$$(40) \quad L_s = Fp_0 x + k(1_0 - 1)x - k\frac{x^2}{2},$$

pod koniec ruchu ma wartość bliską zeru.

Stąd otrzymano całkę typu:

$$(41) \quad I = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_x^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 - bx + c}}$$

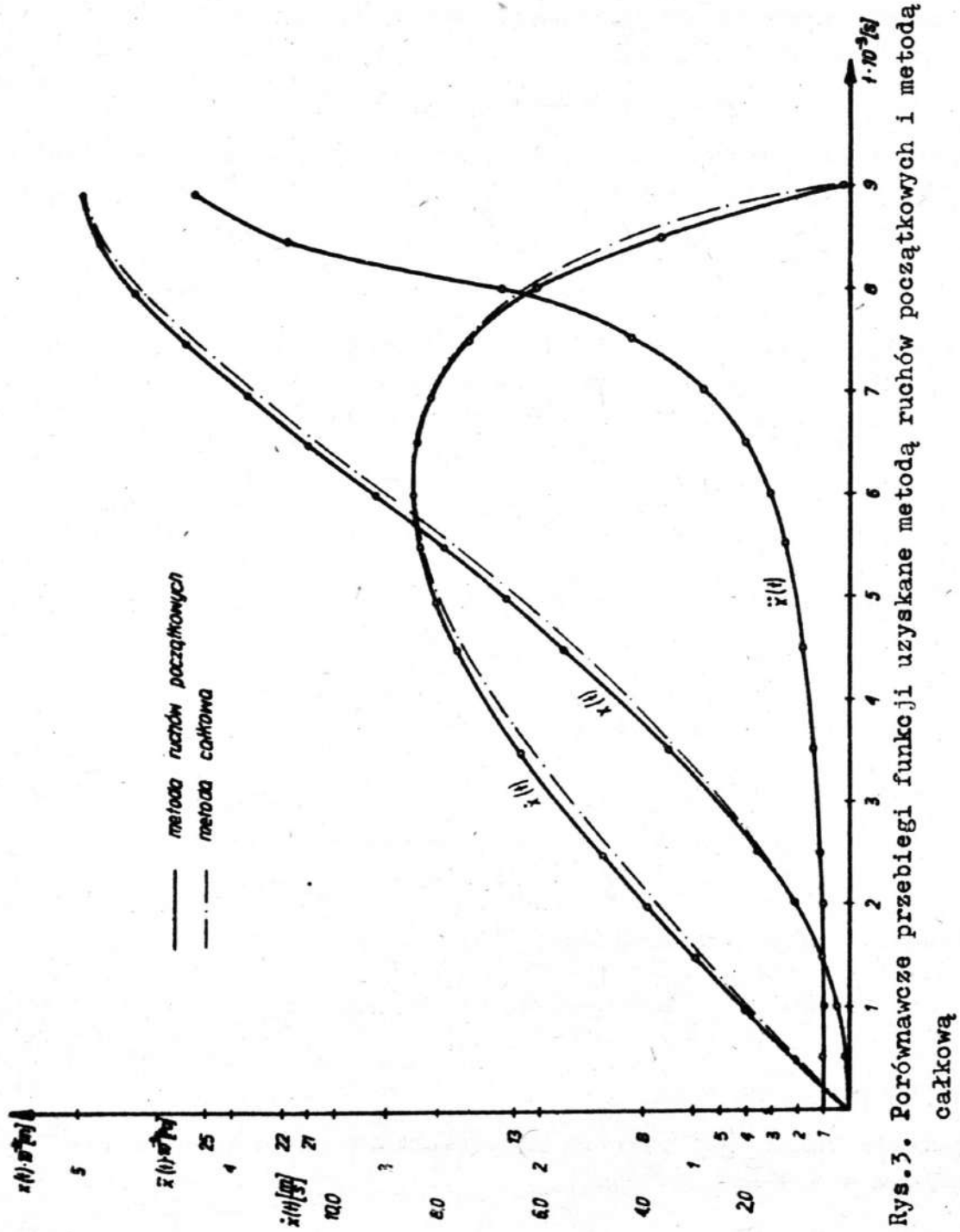
Rozwiązanie całki (41) ma postać, [2]:

$$(42) \quad I \approx \sqrt{\frac{m}{2}} \int_x^{x_k} \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln(2\sqrt{aX} + 2ax + b),$$

gdzie: $X = ax^2 - bx + c$.

Rozwiązanie całki (42) pozwala na określenie czasu trwania ruchu przy $x = 4,98283 \cdot 10^{-2}$ [m].

Prędkość ruchu masy tłoka obliczono korzystając ze wzoru (28).
Wartości liczbowe przedstawione w Tabeli 3. pozwalają wykreślić
ocharakterystyki układu rozwiązanej metodą całkową.



Rys.3. Porównawcze przebiegi funkcji uzyskane metodą początkowych i metodą całkową

5. Analiza wyników i wnioski końcowe

Analizując przebiegi funkcji na Rys.3. można stwierdzić, że w początkowej fazie ruchu /przedział czasu $0 \leq t \leq 2 \cdot 10^{-3}$ [s]/ masa tłoka wykonuje niewielkie przesunięcie. W dalszych przedziałach czasu $2 \cdot 10^{-3} \leq t \leq 8,5 \cdot 10^{-3}$ [s]/ występuje gwałtowny wzrost funkcji $x(t)$, która przyjmuje charakter zbliżony do liniowego. W końcowej fazie ruchu przemieszczenia masy są niewielkie /przebiegi funkcji $x(t)$ /. Całkowita wyliczona droga masy tłoka jest mniejsza o $0,0024 \cdot 10^{-2}$ [m] od wartości $x = 5 \cdot 10^{-2}$ [m], gdzie x wynika ze spełnienia zasady zachowania energii. Energia potencjalna sprężyny przekształca się na drodze x poprzez zmianę energii kinetycznej w energię potencjalną, sprężonego powietrza. Prędkość masy tłoka wzrasta w przedziale $0 \leq t \leq 6 \cdot 10^{-3}$ [s].

Wzrost ten spowodowany jest małym stopniem sprężania powietrza w cylindrze, co obrazuje funkcja $x(t)$. W chwili $t = 6 \cdot 10^{-3}$ [s] funkcja $\dot{x}(t)$ posiada ekstremum. W przedziale czasu $6 \cdot 10^{-3} \leq t \leq 9 \cdot 10^{-3}$ [s] ruch tłoka zostaje wyhamowany ($\dot{x} = 0$) poprzez wzrost ciśnienia w cylindrze ($\ddot{x} = \max$).

Jako metodę sprawdzającą rozwiązane przykładowe zastosowano całkowanie zagadnienia za pomocą kwadratury. Otrzymane tą metodą wyniki przetransponowano w celu porównania z wynikami uzyskanymi z metody różniczkowej. Po przeprowadzeniu transformacji układu współrzędnych z rys.2. potwierdzono zasadność metody ruchów początkowych: przedstawiają to charakterystyki na Rys.3.

Obie metody wykazują bardzo dobrą zgodność i potwierdza to poprawność rozwiązania zagadnienia.

Dokonując oceny użyteczności poszczególnych metod można stwierdzić, że dokładniejsza i mniej pracochłonna jest metoda całkowa, jednakże rozwiązanie otrzymuje się w zmiennych utrudniających dynamiczną analizę ruchu. Przewaga metody ruchów początkowych polega przede wszystkim na tym, że wszystkie wyliczone parametry ruchu są jawnymi parametrami czasu.

Rozpatrywany model tłumika pneumatycznego może być w swej materialnej postaci zastosowany jako element zawieszenia pojazdów lub jako wibroizolator szkodliwych drgań.

Z analizy rozwiązanego układu wynika, że łatwo można osiągnąć zmianę przebiegu funkcji $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$ zwiększając objętość cylindra V_0 . Spowoduje to bardziej elastyczną pracę tłumika jako elementu zawieszenia pojazdów. Podobną rolę w rozważanym układzie może spełniać odpowiedni dobór stałej sprężyny k . W ten sposób można rozwiązać inne bardziej złożone zagadnienia układów termodynamicznych.

LITERATURA

- [1] Cempel C., Minimalizacja drgań i ich elementów, cykl wydawniczy: Współczesne zagadnienia dynamiki maszyn, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk 1976
- [2] Gradsztejn I.S., Ryżyk I.M., Tablicy całek, sumy szeregów i przewidywania, Izdatielstwo, Nauka, Moskwa 1971
- [3] Leja F., Rachunek różniczkowy i całkowy, wydanie XII, PWN, Warszawa 1973
- [4] Ochęduszek S., Termodynamika stosowana, wydanie II, WNT, Warszawa 1967
- [5] Ponomarew S.D., Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn, tom I, Obciążenia dynamiczne, PWN, Warszawa 1957
- [6] Whittaker E.T., Dynamika analityczna, PWN, Warszawa 1959
- [7] Woelke S., Dynamika uderowych narzędzi pneumatycznych ze szczególnym uwzględnieniem drgań ich korpusów, Rozprawy Politechniki Poznańskiej, Nr 90, Poznań 1978

Tabela.1. Wartości współczynników stosowanych przy rozwiązywaniu przykładu metodą ruchów początkowych

Kolejny ruch cząstkowy	x/O	V_0	b	d	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Lp	m/s	m^3	m	m/s^2	m/s	m/s^2	m/s^3	m/s^4	m/s^5	m/s^6
-	-	10^6	10^2	10^{-3}	-	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-12}
1	0,0000	165,00	5,5000	5,4200	0,0000	10,00000	0,00000	- 0,39697	0,00000	0,000749
2	4,7523	145,71	4,8900	4,8349	4,7523	0,85150	-0,39680	- 0,40220	-0,03463	-0,009610
3	7,5452	109,13	3,6378	3,6323	7,5452	0,51181	-0,76024	- 0,57790	-0,48220	-0,098360
4	8,3146	85,20	2,8403	2,8667	8,3146	0,24277	-1,06701	- 1,05626	-1,69725	-0,372990
5	8,4715	72,59	2,4199	2,4631	8,4715	0,06440	-1,33194	- 1,66203	-3,35472	-0,788520
6	8,4265	59,89	1,9965	2,0567	8,4265	-0,16525	-1,77220	- 2,89140	-6,95760	-1,745100
7	8,1115	47,45	1,5818	1,6586	8,1115	-0,48478	-3,58390	- 5,51590	-14,95500	-3,764700
8	7,4000	35,76	1,1920	1,2844	7,4000	-0,97730	-4,16010	-10,91000	-28,99000	-4,600800
9	6,0462	25,57	0,8524	0,9583	6,0462	-1,80550	-7,10940	-17,92600	-10,30900	-31,494000
10	3,6190	18,17	0,6057	0,7215	3,6190	-3,12420	-7,99190	-12,91400	-262,60000	-104820000

Tabela 2. Rozwiązania numeryczne metodą ruchów początkowych

Ruch czas- tko- wy	Czas trwa- nia ruchu cząstkow. t	Ciągły czas trwania w ru- chu	Droga tłumika w ru- chu czątk. x	Całko- wita droga tłoka x	Prędkość masy tłoka \dot{x}	Cięnie- nie po- wietrza w cylin- drze p
lp	s	s	m	m	m/s	Pa
-	10^3	10^3	10^2	10^2	-	10^3
1	2,5	2,5	0,60951	0,60951	4,75	1,17
2	2,0	4,5	1,25270	1,86221	7,54	1,77
3	1,0	5,5	0,79746	2,65967	8,31	2,50
4	0,5	6,0	0,42039	3,08006	8,47	3,13
5	0,5	6,5	0,42340	3,50346	8,42	4,09
6	0,5	7,0	0,41470	3,91816	8,11	5,67
7	0,5	7,5	0,38980	4,30796	7,40	8,43
8	0,5	8,0	0,33960	4,64756	6,04	13,50
9	0,5	8,5	0,24669	4,89425	3,62	21,96
10	0,5	9,0	0,10340	4,99765	0,06	25,68

Tabela 3. Rozwiązania numeryczne metodą całkową

Lp	Droga tłoka x	Prędkość tłoka v	$R/x = \frac{1}{v}$	Czas trwania ruchu t	Całkowi- ty czas trwa- nia ruchu
-	10^2 m	m/s	s/m	ms	ms
1	0,05	1,41	0,7092	0,4076	0,4076
2	0,1	1,99	0,5011	0,3025	0,7101
3	0,3	3,40	0,2940	0,3259	1,4654
4	1,0	5,92	0,1687	0,7614	2,9857
5	1,6	7,15	0,1397	0,4366	3,9025
6	2,3	8,04	0,1243	0,3807	4,8216
7	3,0	8,45	0,1183	0,4783	5,6676
8	3,8	8,22	0,1216	0,6422	6,9026
9	4,6	6,26	0,1595	0,4422	7,9870
10	4,8	4,79	0,2086	0,1927	8,3479
11	4,95	2,22	0,4490	0,1852	8,7834
12	4,9828	0,041	24,1120	0,2486	9,0320

ДИНАМИКА ОДНОЙ МЕХАНИКО-ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ВИБРОИЗОЛИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Содержание

В статье сформулирована проблема одной термомеханической системы принимая определённую модельную предпосылку. Проблему системы динамики рассмотрено двояким способом получая равноценные решения. Основой первого решения был /1/ первый закон термодинамики, основой второго же закон эквивалентности труда и энергии. Для иллюстрации одержанных аналитических решений выполнено подсчёты числового примера методом движений начальных скоростей интегрируя проблему при помощи квадратуры.

DYNAMICS OF A MECHANICAL-PNEUMATIC VIBROINSULATING SYSTEM

Summary

A problem of a mechanical-pneumatic vibroinsulating system is being discussed here, where particular assumptions are taken on. The problem has been discussed in two ways, and the results are equivalent.

The first solution is based upon the I thermodynamics law. The other one upon the mass-energy equivalence. There has been performed a calculation of a numerical example by the method of beginning motions and integration by quadrature to illustrate the analytic solutions.