

FELICJA WYSOCKA  
WSP w Bydgoszczy

ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA NIELINIOWEGO DO APROKSYMACJI CHARAK-  
TERYSTYK TŁUMIENIOWYCH DOLNOPRZEPUSTOWYCH FILTRÓW LC

1. Wstęp

Zadaniem programowania matematycznego, zwanym również zadaniem optymalizacji statycznej, nazywamy zadanie znajdowania punktu, w którym dana funkcja osiąga ekstremum. Zadanie takie jest zwykle formułowane następująco [3]: znaleźć wektor  $\hat{\underline{z}} = [z_1, \dots, z_n]^T$  należący do zbioru  $Z = \{ \underline{z}: g_i(\underline{z}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, M \}$  taki, że

$$f(\hat{\underline{z}}) = \min_{\underline{z} \in Z} f(\underline{z}), \quad 1$$

gdzie:  $f: R^n \rightarrow R^1$  - funkcja celu,

$g_i: R^n \rightarrow R^1$  - funkcja ograniczeń ( $i = 1, 2, \dots, M$ ),

$Z$  - zbiór rozwiązań dopuszczalnych.

Jeżeli funkcja celu  $f$  oraz funkcje ograniczeń  $g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) są liniowe, to dane zadanie nazywamy zadaniem programowania liniowego. Jeżeli natomiast funkcja celu  $f$  lub co najmniej jedna z funkcji  $g_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) jest nieliniowa, to rozpatrywane zadanie zwiemy zadaniem programowania nieliniowego.

Zadania programowania nieliniowego dzielą się na zadania z ograniczeniami i zadania bez ograniczeń. W zadaniach bez ograniczeń funkcje ograniczeń  $g_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) nie występują (czyli  $Z = R^n$ ), a funkcję celu uważa się za ograniczoną od dołu.

Metody służące do numerycznego rozwiązywania zadań programowania nazywamy metodami optymalizacji. W zależności od typu rozwiązywanych zadań programowania, metody optymalizacji dzieli się na szereg grup. Do rozwiązywania zadań programowania nieliniowego stosowane są m. in. następujące grupy metod:

- 1) metody poszukiwania minimum bez ograniczeń - umożliwiające rozwiązywanie zadań bez ograniczeń,
- 2) metody poszukiwania minimum z ograniczeniami - umożliwiające rozwiązywanie zadań z ograniczeniami.

Szczegółowe opisy obu tych grup metod oraz konkretne algorytmy obliczeń oparte na poszczególnych metodach można znaleźć w literaturze [3,4].

Zagadnienia, dające się sprowadzić do zadań programowania, a następnie rozwiązać przy użyciu odpowiednich metod optymalizacji, występują w różnych dziedzinach nauki i techniki. Z tego typu zagadnieniem spotykamy się również w telekomunikacji, przy projektowaniu filtrów LC, liniowych, stacjonarnych, skupionych. Jednym z etapów projektowania takich filtrów jest aproksymacja zadanej charakterystyki częstotliwościowej tłumienności skutecznej  $A_s$  charakterystyką realizowalną. Rozwiązanie zadania aproksymacji charakterystyki  $A_s$  stanowi w wielu przypadkach istotny problem. Nie ma bowiem ogólnej, analitycznej metody rozwiązania tego zadania, a istniejące metody, zarówno iteracyjne jak i szablonowe [2,5,6], wykazują szereg niedogodności.

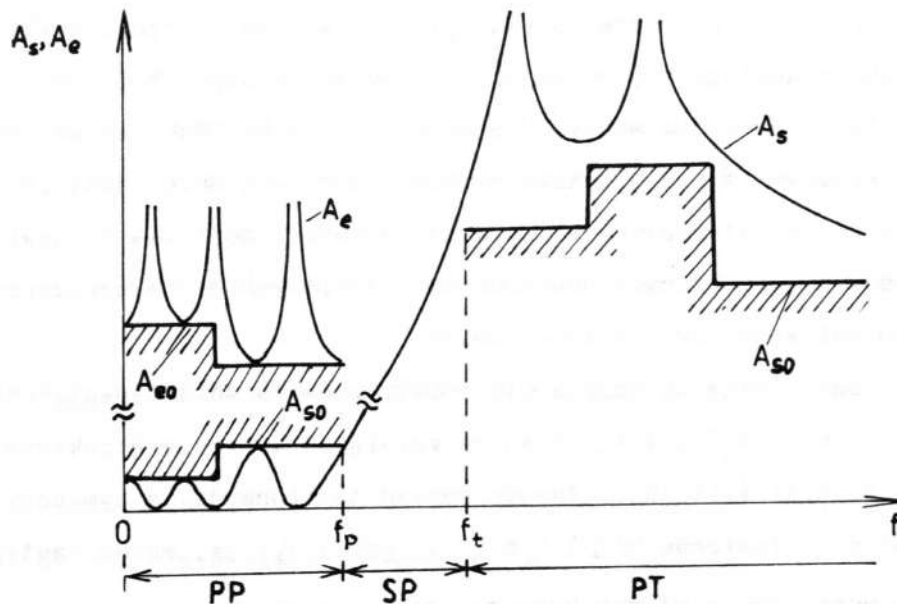
W niniejszej pracy zaproponowano metodę rozwiązania zadania aproksymacji charakterystyki  $A_s$ , o dowolnym przebiegu<sup>2</sup> zarówno w pasmie przepustowym jak w pasmie tłumieniowym, w drodze rozwiązania odpowiednich zadań programowania nieliniowego. Podano ponadto opis programu APRO umożliwiającego aproksymację charak-

terystyki  $A_s$  filtru dolnoprzepustowego.

W pracy rozpatrzono jedynie przypadek filtru dolnoprzepustowego, gdyż korzystając z odpowiednich reaktancyjnych transformacji częstotliwościowych można takie filtry przekształcić na filtry górnoprzepustowe oraz częstościowo symetryczne filtry środkowoprzepustowe, środkowozaporowe i wielopasmowe [4,5].

## 2. Sformułowanie zadania aproksymacji

Rozważmy reaktancyjny filtr LC o dowolnej charakterystyce tłumienności skutecznej  $A_s$  zarówno w pasmie przepustowym jak i w pasmie tłumieniowym. Wymagania stawiane takiemu filtrowi mogą być podane w postaci zadanej charakterystyki  $A_{s0}(f)$  w pasmie przepustowym i tłumieniowym, bądź też w postaci zadanej charakterystyki  $A_{s0}$  w pasmie tłumieniowym i zadanej charakterystyki tłumienności echowej  $A_{e0} = A_{e0}(f)$  w pasmie przepustowym (Rys. 1).



Rys.1. Zadane charakterystyki tłumienności skutecznej  $A_{s0}$  i tłumienności echowej  $A_{e0}$  oraz charakterystyki  $A_s$  i  $A_e$  otrzymane w wyniku aproksymacji, gdzie:  $f_p$  i  $f_t$  - częstotliwości krańcowe odpowiednio pasma przepustowego i tłumieniowego,  $PP$  - pasmo przepustowe,  $PT$  - pasmo tłumieniowe,  $SP$  - strefa przejściowa.

Tłumienności skuteczna  $A_s$  i echowa  $A_e$  reaktancyjnego filtra włączonego między stałe rezystancje związane są ze sobą wzorem Feldtkellera [5]

$$\exp(-2A_s(x)) + \exp(-2A_e(x)) = 1 \quad (2)$$

Tłumienności te wyrażają się odpowiednio wzorami:

$$A_s = A_s(x) = \ln \left| \frac{g(jx)}{f(jx)} \right| = \frac{1}{2} \ln(1 + |\varphi(jx)|) \quad (3)$$

$$A_e = A_e(x) = \ln \left| \frac{g(jx)}{h(jx)} \right| = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \ln(1 + |\varphi(jx)|) \quad (4)$$

gdzie:  $x = \omega/\omega_0$  - częstotliwość zredukowana,

$\omega$  - pulsacja bieżąca,

$\omega_0$  - pulsacja odniesienia

$\varphi(jx) = h(jx)/f(jx)$  - funkcja filtracji,

$g(jx)$ ,  $f(jx)$ ,  $h(jx)$  - odpowiednie wielomiany [1]<sup>3</sup>.

Ponieważ charakterystyka  $A_e(x)$  ma w pasmie przepustowym przebieg analogiczny do przebiegu charakterystyki  $A_s(x)$  w pasmie tłumieniowym w tym sensie, że ma bieguny i minima, zamiast charakterystyki  $A_s(x)$  w pasmie przepustowym, wygodniej jest rozpatrywać charakterystykę  $A_e(x)$  w tym pasmie. Umożliwia to bowiem stosowanie zbliżonych procedur obliczeniowych dla pasma zarówno tłumieniowego jak i przepustowego.

Jak wynika ze wzorów (3) i (4), zadanie aproksymacji charakterystyk  $A_s(x)$  i  $A_e(x)$  można rozwiązać w drodze aproksymacji funkcji filtracji. Znając postać tej funkcji, a tym samym postać wielomianów  $h(\Lambda)$  i  $f(\Lambda)$ , gdzie  $\Lambda = jx$ , można następnie wyznaczyć wielomian Hurwitza  $g(\Lambda)$  niezbędny do przeprowadzenia syntezy filtra.

Rozpatrzmy filtry dolnoprzepustowe robocze symetryczne i antymetryczne. W przypadku tych filtrów funkcja filtracji i jej moduł wyrażają się odpowiednio wzorami:

$$\varphi(\Lambda) = C \frac{\Lambda^N \prod_{i=1}^m (\Lambda^2 + x_{oi}^2)}{\prod_{i=1}^n (\Lambda^2 + x_{oi}^2)} \quad (5)$$

$$\left| \varphi(\Lambda) \right|_{\Lambda=jx} = \left| C \frac{x^N \prod_{i=1}^m (x^2 - x_{oi}^2)}{\sqrt{(6)}} \right|$$

przy czym:

$N =$  0 - dla filtru roboczego antymetrycznego,  
1 - dla filtru roboczego symetrycznego,

gdzie:

$C$  - stała,

$n$  - liczba skończonych biegunów<sup>4</sup> funkcji  $\varphi(\Lambda)$ ,

$m$  - liczba zer odpowiednio funkcji  $\varphi(\Lambda)$  (przy  $N=0$ )  
lub funkcji  $\varphi(\Lambda)/\Lambda$  (przy  $N = 1$ ),

$x_{oi}$  - częstotliwość zredukowana  $i$ -tego zera funkcji  $\varphi(\Lambda)$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$x_{ooi}$  - częstotliwość zredukowana  $i$ -tego bieguna funkcji  
 $\varphi(\Lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Aby rozpatrywane filtry były realizowane fizyczne, konieczne jest by  $m$  i  $n$  spełniały warunek  $n \leq m$ .

Niech  $A_{eo}(x)$  będzie wymaganą tłumiennością echową w pasmie przepustowym  $P = \langle x_{-p}, x_p \rangle$ ,  $\underline{x}_p = [x_{o1}, \dots, x_{om}]^T$  - wektorem parametrów  $x_{oi}$  ( $x_{oi} < x_{o(i+1)}$ ), a  $\theta_{pk}$  ( $k = 1, 2, \dots, m+1$ ) -

przedziałami określonymi następująco:

$$\begin{aligned} \theta_{p1} &= \langle x_{-p}, x_{o1} \rangle, \\ \theta_{p1} &= \langle x_{o(1-1)}, x_{o1} \rangle, \quad 1 = 2, 3, \dots, m, \\ \theta_{p(m+1)} &= \langle x_{om}, x_p \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Ponadto niech  $A_{s0}$  będzie wymaganą tłumiennością skuteczną w pasmie tłumieniowym  $T = \langle x_{t1}, x_{t2} \rangle$ ,  $X_{oo} = [x_{oo1}, \dots, x_{oon}]^T$  - wektorem parametrów  $x_{ooi}$  ( $x_{ooi} < x_{oo(i+1)}$ ), a  $\theta_{tk}$  ( $k = 1, 2, \dots, n+1$ ) - przedziałami określonymi następująco:

$$\begin{aligned} \theta_{t1} &= \langle x_{t1}, x_{oo1} \rangle, \\ \theta_{t1} &= \langle x_{oo(1-1)}, x_{oo1} \rangle, \quad 1 = 2, 3, \dots, m, \\ \theta_{t(n+1)} &= \langle x_{oon}, x_{t2} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Aproksymację uważamy za optymalną, gdy spełnione są następujące warunki:

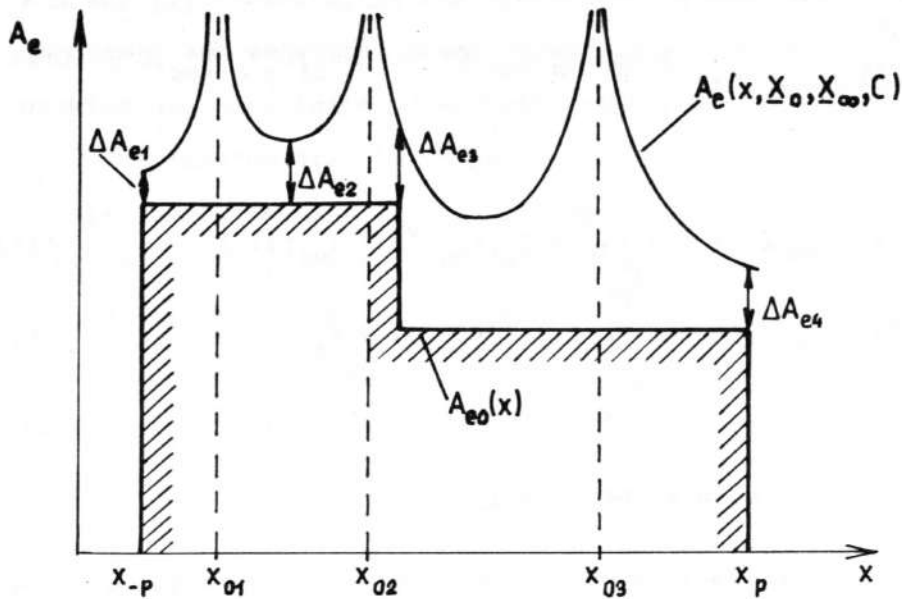
- 1) otrzymana w wyniku aproksymacji funkcja filtracji jest możliwie małego stopnia,
- 2) wartości najmniejszych różnic  $\Delta A_{ek}(X_o, X_{oo}, C)$  pomiędzy charakterystyką tłumienności  $A_e(x, X_o, X_{oo}, C)$  otrzymaną w wyniku aproksymacji i zadaną charakterystyką  $A_{eo}(x)$  w przedziałach  $\theta_{pk}$  ( $k = 1, 2, \dots, m+1$ ), są jednakowe i nieujemne Rys.2.  $\sqrt{\quad}$
- 3) wartości najmniejszych różnic  $\Delta A_{sk}(X_o, X_{oo}, C)$  pomiędzy charakterystyką tłumienności  $A_s(x, X_o, X_{oo}, C)$  otrzymaną w wyniku aproksymacji i zadaną charakterystyką  $A_{s0}(x)$  w przedziałach  $\theta_{tk}$ , ( $k = 1, 2, \dots, n+1$ ), są jednakowe i nieujemne.

Zadanie aproksymacji sformułujemy następująco:

- 1) wyznaczyć minimalne liczby  $n$  i  $m \gg n$ , takie by:

$$\bigwedge_{x \in P} A_e(x, X_o, X_{oo}, C) - A_{eo}(x) \gg 0, \quad (9)$$

$$\bigwedge_{x \in T} A_s(x, X_o, X_{oo}, C) - A_{s0}(x) \gg 0, \quad (10)$$



Rys. 2. Sposób wyznaczenia wartości najmniejszych różnic  $\Delta A_{ek}(X_0, X_{oo}, C)$  pomiędzy charakterystykami tłumienności echowej aproksymującą  $A_e(x, X_0, X_{oo}, C)$  i aproksymowaną  $A_{eo}(x)$  w poszczególnych przedziałach  $\theta_{pk}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

2) dla tak ustalonych liczb  $n$  i  $m$  wyznaczyć takie wektory

$$\underline{X}_o^* = [x_{o1}^*, x_{o2}^*, \dots, x_{om}^*]^T \text{ i } \underline{X}_{oo}^* = [x_{oo1}^*, x_{oo2}^*, \dots, x_{oon}^*]^T$$

oraz stałą  $C^*$ ,

przy czym

$$\bigwedge_{i=1, 2, \dots, m} x_{-p} \leq x_{oi}^* \leq x_p \quad (11)$$

$$\bigwedge_{i=1, 2, \dots, n} x_t \leq x_{oo}^* \leq x_{t2} \quad (12)$$

dla których

$$\bigwedge_{k, l=1, 2, \dots, m+1} \Delta A_{ek}(\underline{X}_o^*, \underline{X}_{oo}^*, C^*) = A_{e1}(\underline{X}_o^*, \underline{X}_{oo}^*, C^*) \quad (13)$$

$$\bigwedge_{k,l=1,2,\dots,n+1} \Delta A_{sk}(\underline{X}_0^*, \underline{X}_{00}^*, C^*) = \Delta A_{sl}(\underline{X}_0^*, \underline{X}_{00}^*, C^*) \quad (14)$$

gdzie:

$$\Delta A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) = \min_{x \in \theta_{pk}} (A_e(x, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) - A_{e0}(x)) \quad (15)$$

$$\Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) = \min_{x \in \theta_{tk}} (A_s(x, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) - A_{s0}(x)) \quad (16)$$

### 3. Rozwiązanie zadania aproksymacji

Rozwiązanie zadania aproksymacji należy rozpocząć od wyznaczenia liczby  $n$  biegunów funkcji filtracji. Liczbę tę można określić posługując się zależnościami podanymi w literaturze [8]. Mając wstępnie wyznaczoną liczbę  $n$ , przyjmujemy początkowo, że  $m = n$ . Jeżeli jednak okazałoby się, że przy takiej wartości  $m$  wymagania w pasmie przepustowym nie zostaną spełnione, liczbę tę należy zwiększyć.

W celu znalezienia współrzędnych wektorów  $\underline{X}_0^*$  i  $\underline{X}_{00}^*$ , a tym samym wyznaczenia optymalnego dla danej charakterystyki  $A_{s0}(x)$  położenia biegunów i zer funkcji filtracji, wygodnie jest określić takie funkcje  $w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  oraz  $w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$ , które przy spełnieniu odpowiednio (13) i (14) osiągają minimum. Jako funkcje te przyjmujemy funkcje postaci

$$w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}) = \sum_{k=1}^{m+1} \left[ \Delta A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) - \frac{\sum_{i=1}^{m+1} \Delta A_{ei}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)}{m+1} \right]^2 \quad (17)$$

$$w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[ \Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) - \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \Delta A_{si}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)}{n+1} \right]^2 \quad (18)$$



W pracy [7] wykazano, że dla spotykanych w praktyce funkcji filtracji tak określone funkcje  $w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  i  $w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  są praktycznie niezależne od wartości stałej C.

Przy spełnieniu (13) funkcja  $w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  osiąga minimum po  $\underline{X}_0$  dla danego wektora  $\underline{X}_{00}$ , a przy spełnieniu (14) funkcja  $w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  osiąga minimum po  $\underline{X}_{00}$  dla danego wektora  $\underline{X}_0$ . Problem wyrównania różnic  $\Delta A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)$   $k = 1, 2, \dots, m+1$ , sprowadza się w ten sposób do zadania znalezienia takich współrzędnych wektora  $\underline{X}_0$ , dla których funkcja  $w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  osiąga minimum globalne dla danego  $\underline{X}_{00}$  przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1,2,\dots,m} x_{-p} - x_{oi} &\leq 0, \\ \bigwedge_{i=1,2,\dots,m} x_{oi} - x_p &\leq 0, \\ \bigwedge_{i=1,2,\dots,m} \sqrt{A} A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) &\leq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Podobnie problem wyrównania różnic  $\Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , sprowadza się do znalezienia takich współrzędnych wektora  $\underline{X}_{00}$ , dla których funkcja  $w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  osiąga minimum globalne dla danego  $\underline{X}_0$  przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1,2,\dots,n} x_{t1} - x_{ooi} &\leq 0, \\ \bigwedge_{i=1,2,\dots,n} x_{ooi} - x_{t2} &\leq 0, \\ \bigwedge_{i=1,2,\dots,n+1} -\Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) &\leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Przedstawione powyżej zadania są typowymi zadaniami programowania nieliniowego z ograniczeniami. W zadaniach tych funkcje  $w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  i  $w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  są funkcjami celu, które należy zminimalizować przy odpowiednich ograniczeniach.

Ze względu na fakt, że w pierwszym z przedstawionych zadań wektor  $\underline{X}_{00}$  traktowany jest jako parametr, a  $\underline{X}_0$  jako zmienna, natomiast w drugim - wektor  $\underline{X}_0$  traktowany jest jako parametr, a  $\underline{X}_{00}$  jako zmienna, przed przystąpieniem do rozwiązywania tych zadań należy zdecydować, które z nich należy rozwiązywać jako pierwsze.

Przeprowadzone próby wykazały, że jako pierwsze wygodnie jest rozwiązywać zadanie poszukiwania wektora  $\underline{X}_0$  minimalizującego funkcję  $w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  przy założonym początkowym wektorze  $\underline{X}_{00}$ . Znając rozwiązanie  $\underline{X}_0^*$  tego zadania należy następnie przystąpić do rozwiązywania zadania poszukiwania wektora  $\underline{X}_{00}$  minimalizującego funkcję  $w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  przy  $\underline{X}_0 = \underline{X}_0^*$ . Ze względu na fakt, że zmiany wartości współrzędnych wektora  $\underline{X}_{00}$  powodują jednak pewną zmianę przebiegu charakterystyki  $A_g(x, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)$  w pasmie przepustowym, należy jeszcze, w razie potrzeby powtórnie rozwiązać zadanie poszukiwania wektora  $\underline{X}_0$  minimalizującego funkcję  $w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  przy  $\underline{X}_{00} = \underline{X}_{00}^*$  stanowi rozwiązanie poprzedniego zadania. W rozpatrywanym zadaniu poszukiwania wektora  $\underline{X}_0$ , jako wartości współrzędnych punktu startowego przyjmujemy wartości współrzędnych wektora  $\underline{X}_0^*$ . Punkt startowy znajduje się więc bardzo blisko poszukiwanego rozwiązania, co powoduje, że zmiany wartości współrzędnych wektora  $\underline{X}_0$  (z  $\underline{X}_0^*$  na  $\underline{X}_0^*$ , gdzie  $\underline{X}_0^*$  stanowi rozwiązanie) są stosunkowo niewielkie i praktycznie nie wywołują zmian przebiegu charakterystyki  $A_g(x, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)$  w pasmie tłumieniowym.

Z podanych w literaturze [3,4] metod poszukiwania minimum z ograniczeniami do rozwiązywania rozpatrywanych zadań zastosowano zmodyfikowaną metodę Powella (z przesuwaną funkcją kary). Metoda ta umożliwia sprowadzenie zadań z ograniczeniami do ciągu zadań bez ograniczeń poprzez odpowiednią modyfikację funkcji

celu. Modyfikacja ta polega na wprowadzeniu do funkcji celu tzw. funkcji kary, czyli wyrażenia reprezentującego karę za przekroczenie ograniczeń. Zmodyfikowana funkcja celu ma następującą postać

$$\begin{aligned} F(\underline{z}, \underline{c}, \underline{v}) &= f(\underline{z}) + R(\underline{z}, \underline{c}, \underline{v}) = \\ &= f(\underline{z}) + \sum_1^M c_i (g_i(\underline{z}) + v_i)^2 H(g_i(\underline{z}) + v_i), \end{aligned} \quad (21)$$

przy czym

$$H(g_i(\underline{z}) + v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } g_i(\underline{z}) + v_i > 0 \\ 0 & \text{dla } g_i(\underline{z}) + v_i \leq 0, \end{cases} \quad (22)$$

gdzie:  $F(\underline{z}, \underline{c}, \underline{v})$  - zmodyfikowana funkcja celu,

$f(\underline{z})$  - pierwotna funkcja celu,

$R(\underline{z}, \underline{c}, \underline{v})$  - funkcja kary

$\underline{z}$  - rozpatrywany punkt

$\underline{c} = [c_1, c_2, \dots, c_M]^T, \bigwedge_{i=1,2,\dots,M} c_i > 0$  - wektor współczynników kary.

$\underline{v} = [v_1, v_2, \dots, v_M]^T, \bigwedge_{i=1,2,\dots,M} v_i \geq 0$  - wektor przesunięć kary,

$g_i(\underline{z}), i = 1, 2, \dots, M$  - funkcja ograniczeń.

W trakcie wykonywania obliczeń funkcja kary jest przesuwana, przy czym wartość przesunięcia jest uzależniona od wartości przekroczonych ograniczeń.

Badania przeprowadzone przez Findeisena, Szyranowskiego i Wierzbickiego [3] wykazały, że zmodyfikowana metoda Powella jest tym szybciej zbieżna, im efektywniejszą metodę poszukiwania minimum bez ograniczeń stosuje się do optymalizacji zmodyfikowanej funkcji celu. Autorzy ci stwierdzają ponadto, że naj-

lepsze rezultaty uzyskali stosując zmodyfikowaną metodę Powella w połączeniu z metodą gradientu sprzężonego. Nie podają oni jednak, którą z metod gradientu sprzężonego stosowali. Ponieważ trudno jest określić, która z metod gradientu sprzężonego jest najbardziej efektywna, do rozwiązywania otrzymanych zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń zdecydowano się zastosować metodę gradientu sprzężonego Polaka-Ribiery [3,4].

Przy rozwiązywaniu zadania poszukiwania wektora  $\underline{X}_{00}$  minimalizującego funkcję  $w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00})$  należy wziąć pod uwagę fakt, że bieguny funkcji filtracji mają tendencję do skupiania się w pobliżu częstotliwości  $x_t$ , w związku z czym mianownik tej funkcji jest źle uwarunkowany numerycznie. Z tego właśnie powodu odpowiednie zadanie programowania nieliniowego z ograniczeniami wygodnie jest rozwiązywać nie w zakresie zmiennej  $x$ , lecz w zakresie zmiennej  $\eta$  określonej wzorem

$$\eta = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (23)$$

Transformacja zmiennych  $x \rightarrow \eta$  odpowiada przekształceniu pasma tłumieniowego w ograniczony przedział na osi  $\eta$ . Po dokonaniu takiej transformacji, zamiast przedziałów  $\theta_{tk}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , na osi  $x$  należy rozpatrywać odpowiednie przedziały  $\theta_{tk}^{(\eta)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , na osi  $\eta$  określone następująco

$$\begin{aligned} \theta_{t1}^{(\eta)} &= (\eta_{\text{dol}}, \eta_1), \\ \theta_{t1}^{(\eta)} &= (\eta_{1-1}, \eta_1), \quad 1 = 2, 3, \dots, n \\ \theta_{t(n+1)}^{(\eta)} &= (\eta_{\text{gor}}) \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie: parametry  $\eta_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ),  $\eta_{\text{dol}}$   $\sqrt{\eta_{\text{gor}}}$  na osi są odpowiednikami stosowanych częstotliwości zredukowanych  $x_{00}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $x_t \sqrt{x_{-t}}$  na osi  $x$ .

Po wyznaczeniu wartości współrzędnych wektorów

$\underline{X}_0^* = [x_{01}^*, x_{02}^*, \dots, x_{0m}^*]^T$  i  $\underline{X}_{00}^* = [x_{001}^*, x_{002}^*, \dots, x_{00n}^*]^T$ , wartość bezwzględną stałej  $C^*$  obliczamy korzystając z odpowiednio przekształconego wzoru opisującego funkcję filtracji danego rodzaju filtru. Przyjmujemy następnie, że  $C^* = |C^*|$ , tzn., że stała  $C$  jest dodatnia.

#### 4. Opis programu APRO

Na podstawie przedstawionej metody rozwiązania zadania aproksymacji opracowano program APRO, umożliwiający aproksymację charakterystyk tłumienności skutecznej filtrów dolnoprzepustowych zarówno w pasmie przepustowym jak i w tłumieniowym. Program ten, napisany w języku Fortran dla maszyny cyfrowej Odra 1305, został następnie przystosowany do maszyny cyfrowej SM-4.

Podstawowymi danymi wejściowymi dla programu APRO są:

- 1) liczba  $N$  jak w (5) i (6) określająca rodzaj filtru;
- 2) wartości kolejnych współrzędnych  $f_i$  oraz  $A_{s0}(f_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, IP$  ( $IP \leq 40$ ), punktów aproksymowanej charakterystyki  $A_{s0}$  należących do pasma przepustowego, gdzie  $f_i$  - częstotliwość,  $A_{s0}(f_i)$  - odpowiadająca częstotliwości  $f_i$  wartość tłumienności skutecznej;
- 3) wartości kolejnych współrzędnych  $f_i$  oraz  $A_{s0}(f_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, IT$  ( $IT \leq 40$ ), punktów aproksymowanej charakterystyki  $A_{s0}$ , należących do pasma tłumieniowego;

W trakcie wykonywania programu APRO wyznaczane są liczby  $m$  zer i  $n$  biegunów funkcji filtracji. Liczby te nie mogą przekraczać dwudziestu.

W programie APRO, przy rozwiązywaniu zadań programowania nieliniowego z ograniczeniami, stosowane są następujące postacie

zmodyfikowanych funkcji celu  $F1(\underline{X}_0, \underline{g}^{(1)}, \underline{v}^{(1)})$  i  $F2(\underline{X}_{00}, \underline{g}^{(2)}, \underline{v}^{(2)})$ :

$$F1(\underline{X}_0, \underline{g}^{(1)}, \underline{v}^{(1)}) = w_1(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}) + \sum_{k=1}^{m+1} \left[ g_k^{(1)} (-\Delta A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) + v_k^{(1)}) \cdot \max(0, -\Delta A_{ek}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) + v_k^{(1)}) \right] + g_{m+2}^{(1)} (b_1(\underline{X}_0) + v_{m+2}^{(1)}) \cdot \max(0, b_1(\underline{X}_0) + v_{m+2}^{(1)}) \quad (25)$$

$$F2(\underline{X}_{00}, \underline{g}^{(2)}, \underline{v}^{(2)}) = w_2(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}) + \sum_{k=1}^{n+1} \left[ g_k^{(2)} (-\Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) + v_k^{(2)}) \cdot \max(0, -\Delta A_{sk}(\underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) + v_k^{(2)}) \right] + g_{n+2}^{(2)} (b_2(\underline{X}_{00}) + v_{n+2}^{(2)}) \cdot \max(0, b_2(\underline{X}_{00}) + v_{n+2}^{(2)}) \quad (26)$$

gdzie:

$$\underline{g}^{(1)} = [g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \dots, g_{m+2}^{(1)}]^T, \quad \underline{g}^{(2)} = [g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, \dots, g_{n+2}^{(2)}]^T - \text{wektory współczynników kary,}$$

$$\underline{v}^{(1)} = [v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots, v_{m+2}^{(1)}]^T, \quad \underline{v}^{(2)} = [v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots, v_{n+2}^{(2)}]^T - \text{wektory przesunięć kary,}$$

$b_1(\underline{X}_0), b_2(\underline{X}_{00})$  - zmienne,

$b_1(\underline{X}_0) > 0$  gdy nie spełnione są warunki (11),

$b_2(\underline{X}_{00}) > 0$  gdy nie spełnione są warunki (12).

Do rozwiązywania otrzymanych zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń wykorzystywana jest procedura GSPRIEM opracowana w Instytucie Automatyki Politechniki Warszawskiej [4]. Procedura ta umożliwia rozwiązywanie zadań programowania nieliniowego bez ograniczeń metodą gradientu sprzężonego Polaka-Ribiera, przy czym gradient funkcji celu jest estymowany numerycznie.

W przypadku rozpatrywanych funkcji celu numeryczna estymacja gradientu jest niezbędna, gdyż nie ma możliwości jego wyznaczenia.

nia w sposób analityczny.

Przy rozwiązywaniu zadań optymalizacji duże znaczenie ma dobór odpowiedniego punktu startowego. W programie APRD wartości początkowych współrzędnych wektora  $\underline{X}_0$  obliczane są ze wzoru:

$$x_{0i} = \sin \left( i \pi (2m + 1) \sqrt{\frac{1}{2m+1}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (27)$$

w przypadku, gdy  $N = 1$ , oraz ze wzoru

$$x_{0i} = \sin \left( (2i - 1) \pi / (4m) \right), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (28)$$

w przypadku, gdy  $N = 0$ .

Wartości początkowych współrzędnych wektora  $\underline{X}_{\infty \eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n]^T$ , będącego odpowiednikiem wektora  $\underline{X}_{\infty} = [x_{\infty 1}, x_{\infty 2}, \dots, x_{\infty n}]^T$  w zakresie zmiennej  $\eta$  obliczane są natomiast z zależności

$$\eta_i = \frac{\eta_{\text{gor}}^+ + \eta_{\text{dol}}}{2} + \frac{\eta_{\text{gor}}^- - \eta_{\text{dol}}}{2} \cos \frac{(2i - 1)}{2} \pi \quad (29)$$

analogicznych do określających zera wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju stopnia  $n$ .

Przeprowadzone próby wykazały, że przyjęcie takich wartości początkowych współrzędnych wektorów  $\underline{X}_0$  i  $\underline{X}_{\infty}$  jest korzystniejsze niż rozmieszczenie początkowych współrzędnych w sposób równomierny.

W programie APRD do wyznaczania wartości współrzędnych minimów funkcji  $A_e(x, \underline{X}_0, \underline{X}_{\infty}, C)$  w kolejnych przedziałach  $\theta_{pk}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), oraz wartości współrzędnych minimów funkcji  $A_s(\eta, \underline{X}_0, \underline{X}_{\infty}, C)$  w kolejnych przedziałach  $\theta_{tk}^{(\eta)}$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), stosowana jest metoda złotego podziału [3,4]. Metoda ta umożliwia znalezienie odciętej  $\tau^*$  oraz rzędnej  $f(\tau^*)$  minimum rozpatrywanej funkcji  $f(\tau)$  w określonym przedziale, przy założeniu, że w przedziale tym funkcja  $f(\tau)$  jest ciągła i ma

dokładnie jedno minimum<sup>5)</sup>.

Wartości odciętej  $x_{M(m+1)}$  i rzędnej  $A_e(x_{M(m+1)}, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)$  minimum funkcji  $A_e(x, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)$  w przedziale  $\mathbb{B}_{m(m+1)}$  oraz wartości odciętej  $\eta_{M(n+1)}$  i rzędnej  $A_s(\eta_{M(n+1)}, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)$  minimum funkcji  $A_s(\eta, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C)$  określone są z zależności:

$$x_{M(m+1)} = x_p \quad (30)$$

$$A_e(x_{M(m+1)}, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) = A_e(x_p, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) \quad (31)$$

$$\eta_{M(n+1)} = \eta_{gor} \quad (32)$$

$$A_s(\eta_{M(n+1)}, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) = A_s(\eta_{gor}, \underline{X}_0, \underline{X}_{00}, C) \quad (33)$$

Po przeprowadzeniu obliczeń przy użyciu programu APR0 otrzymujemy m.in. następujące wyniki końcowe:

- 1) liczby m zer i n biegunów funkcji filtracji,
- 2) optymalne wartości współrzędnych wektorów  $\underline{X}_0$  i  $\underline{X}_{00}$ ,
- 3) optymalną wartość stałej C,
- 4) wartości kolejnych współrzędnych funkcji aproksymującej

$A_e(x, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{00}^*, C^*)$ , jak również wykresy funkcji  $A_{e0}(x)$  i

$A_e(x, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{00}^*, C^*)$ ,

- 5) wartości kolejnych współrzędnych funkcji aproksymującej

$A_s(\eta, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{00}^*, C^*)$ , jak również wykresy funkcji  $A_{s0}(\eta)$  i

$A_s(\eta, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{00}^*, C^*)$ .

Przy użyciu programu APR0 przeprowadzono aproksymację szeregu charakterystyk tłumienności skutecznej filtrów. Czas wykonywania obliczeń zależy od liczb n i m oraz kształtu aproksymowanej charakterystyki  $A_{s0}$ . Waha się on od kilkudziesięciu sekund do kilkudziesięciu minut.



Działanie programu zilustrujemy następującym przykładem.

Przykład 1.

Wyznaczyć położenie zer i biegunów tłumienności skutecznej  $A_s$  filtra dolnoprzepustowego o następujących danych:

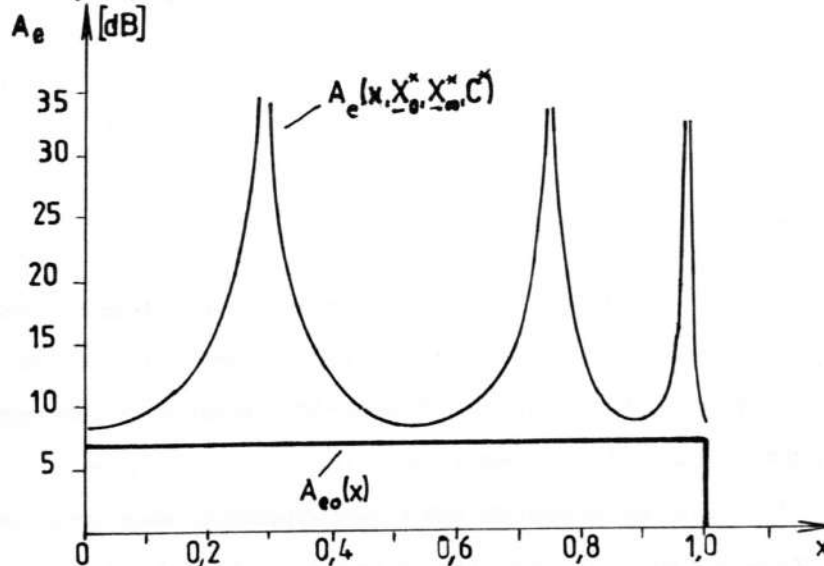
- 1) praktyczne pasmo przepustowe mieści się w przedziale częstotliwości od  $f = 0$  Hz do  $f = 30$  kHz ;
- 2) tłumienność skuteczna w praktycznym pasmie przepustowym  $A_{s0} \leq 1$  dB ;
- 3) praktyczne pasmo tłumieniowe występuje w zakresie częstotliwości od  $f = 50$  kHz do  $f = \infty$  ;
- 4) tłumienność skuteczna  $A_{s0}$  w praktycznym pasmie tłumieniowym:

$$A_{s0} \geq 65 \text{ dB dla } 50 \text{ kHz} \leq f < 60 \text{ kHz ,}$$

$$A_{s0} \geq 85 \text{ dB dla } 60 \text{ kHz} \leq f < 100 \text{ kHz ,}$$

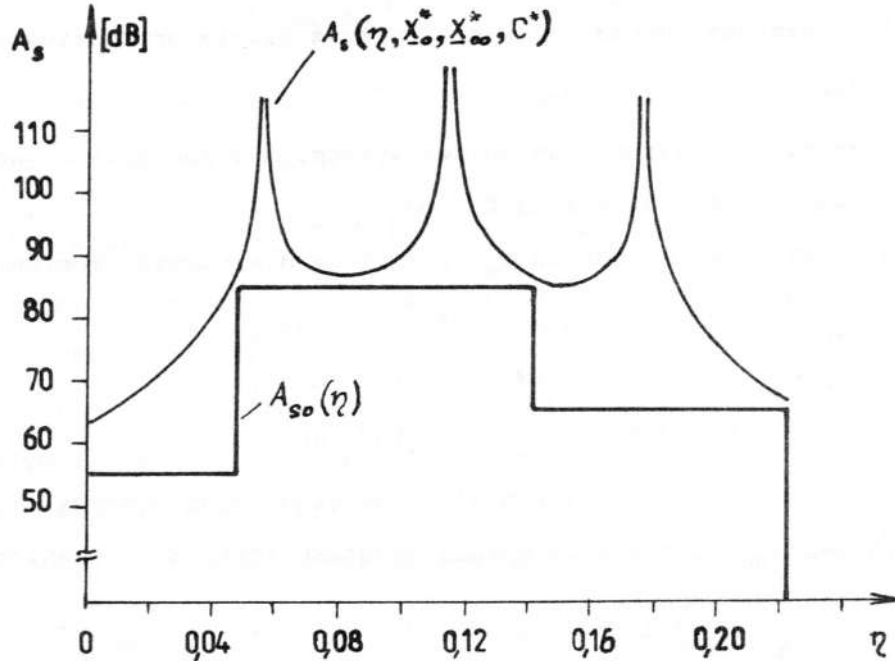
$$A_{s0} \geq 55 \text{ dB dla } f \geq 100 \text{ kHz .}$$

Dla powyższych danych przeprowadzono aproksymację charakterystyki  $A_{s0}$  filtra przy użyciu programu APR0. Na rysunkach 3 i 4 pokazane są odpowiednio:



Rys.3. Przebieg charakterystyk  $A_{e0}(x)$  i  $A_e(x, X_0^*, X_{\infty}^*, C^*)$  z przykładu 1

- 1) zadana charakterystyka  $A_{e0}(x)$  i otrzymana w wyniku aproksymacji charakterystyka  $A_e(x, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{\infty}^*, C^*)$  oraz
  - 2) zadana charakterystyka  $A_{s0}(\eta)$  i otrzymana w wyniku aproksymacji charakterystyka  $A_s(\eta, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{\infty}^*, C^*)$ .
- Z rysunków tych widać, że charakterystyki  $A_e(x, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{\infty}^*, C^*)$  oraz  $A_s(\eta, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{\infty}^*, C^*)$  spełniają stawiane wymagania.



Rys.4. Przebiegi charakterystyk  $A_{s0}(\eta)$  i  $A_s(\eta, \underline{X}_0^*, \underline{X}_{\infty}^*, C^*)$  z przykładu 1

## 5. Zakończenie

W pracy przedstawiono metodę rozwiązania problemu aproksymacji charakterystyki tłumienności skutecznej  $A_s$  filtrów dolnoprzepustowych w drodze rozwiązania odpowiednich zadań programowania nieliniowego.

Zaproponowana metoda może być wykorzystywana nie tylko w przypadku aproksymacji charakterystyk  $A_s$  filtrów, lecz również przy rozwiązywaniu innych zadań aproksymacji, w których wymaga-

ne jest, aby minimalne różnice pomiędzy funkcją aproksymowaną i aproksymującą były jednakowe w określonych przedziałach.

### Przypisy

- 1 Jest to zadanie minimalizacji. Każde zadanie maksymalizacji można sprowadzić do zadania minimalizacji, gdyż  $\max f(\underline{z}) = -\min [-f(\underline{z})]$ .
- 2 Mówiąc o dowolnym przebiegu mamy na myśli dowolny przebieg realizowany.
- 3 Zakłada się, że wielomiany  $h(jx)$  i  $f(jx)$  są względnie pierwsze.
- 4 Przez biegun skończony rozumie się tu biegun leżący na osi  $x$  w przedziale  $(0, \infty)$ , a przez biegun w nieskończoności - biegun występujący dla  $x = \infty$ .
- 5 Funkcja  $A_e(x, X_0, X_{\infty}, C)$  w każdym z przedziałów  $\theta_{pk}$ ,  $(k=1, 2, \dots, m+1)$ , oraz funkcja  $A_s(\eta, X_0, X_{\infty}, C)$  w każdym z przedziałów  $\theta_{tk}^{(n)}$ ,  $(k = 1, 2, \dots, n+1)$  spełniają to założenie.

### Literatura

1. W. Cauer: Theorie der Linearen Wechselstromschaltungen, Akademie Verlag, Berlin 1954
2. R.W. Daniels, Approximation Methods for Filter Design, Mc Graw-Hill, New York 1974
3. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki, Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN Warszawa 1980

4. T. Kręglewski, T. Rogowski, A. Ruszczyński, J. Szymanowski, Metody optymalizacji w języku FORTRAN, PWN Warszawa 1984
5. O. Przesmycki, Filtry elektryczne, WKiŁ Warszawa 1962
6. G.C. Temes, S.K. Mitra (red.), Teoria i projektowanie filtrów WNT Warszawa 1978
7. F. Wysocka, Aproksymacja charakterystyk tłumieniowych filtrów LC przy użyciu maszyny cyfrowej, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska Warszawa 1984
8. F. Wysocka, Aproksymacja charakterystyki tłumienności skutecznej filtru dolnoprzepustowego o dowolnym przebiegu w pasmie przepustowym i tłumieniowym, Rozprawy Elektrotechniczne, T. XXXII z.4 PAN Warszawa 1986

APPLICATION OF NONLINEAR PROGRAMMING TECHNIQUES TO APPROXIMATION OF ATTENUATION CHARACTERISTICS OF LOW-PASS FILTERS

Summary

In the paper, a method for solving the approximation problem of the effective attenuation characteristic of a low-pass filter is proposed. In this method, the solution of the approximation problem is obtained through the solution of an equivalent nonlinear programming problem. Low-pass filters with arbitrarily prescribed frequency dependent minimum stop band and maximum pass band effective attenuation are considered.