

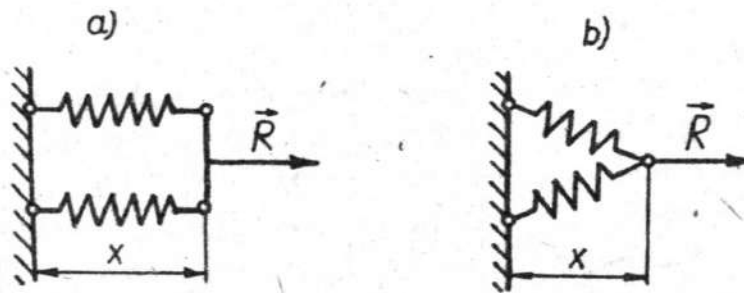
STANISŁAW WOELKE
ARNOLD WILCZYŃSKI
WSP Bydgoszcz

TŁUMIK PNEUMATYCZNY JAKO PEWIEN PRZYPADEK MODELU TERMOMECHANICZNEGO

1. Wstęp

Powszechnie wiadomo, że drgania towarzyszące pracy wielu urządzeń mechanicznych są źródłem generującym niekorzystne oddziaływania dynamiczne propagujące się w najbliższym otoczeniu urządzenia. W związku z nieustannym wzrostem szybkości maszyn reakcje dynamiczne przenoszone na otoczenie mogą osiągać bardzo duże wartości. Wobec takiego stanu rzeczy ze strony techniki przyszedł impuls do rozwiązywania coraz bardziej złożonych problemów wibroizolacji. W konkretnym zagadnieniu wibroizolacji chodzi najogólniej mówiąc o to, aby przez zastosowanie elementów wibroizolujących osiągnąć zmniejszenie reakcji dynamicznych przekazywanych na otoczenie w porównaniu z reakcjami przenoszonymi bez obecności takich elementów. Ułamek wyrażający zmniejszenie tych reakcji określa techniczną jakość wibroizolacji. W rozwiniętej teorii wibroizolacji dominują układy tworzone z elementów podstawowych o charakterystyce liniowej, [1], takich jak masa, sprężyna, tłumik z tarcieciem lepkiem /liniowym/. Różne kombinacje elementów podstawowych prowadzą do układów o charakterystyce zazwyczaj liniowej. Teoria takich układów jest stosunkowo dobrze rozwinięta, [1,2]. Najnowsze badania nad układami wibroizolacji dotyczą już układów nieliniowych. Są to zazwyczaj układy z nieliniowością geometryczną, tworzone z układów fizycznych liniowych. Na rysunku 1 przedstawiono prosty przykład przekształcenia układu liniowego geometrycznie i fizycznie /szkic a/ na układ liniowy fizycznie, lecz nieliniowy geometrycznie, /szkic b/. Wzrost

zainteresowania układami nieliniowymi wynika stąd, że układy takie stanowią klasę o znacznie bogatszych możliwościach redukcji drgań w porównaniu z układami liniowymi. Istotny postęp na tym odcinku osiągnięto dzięki rozwojowi metod numerycznych, gdyż od tego zależą możliwości rozwiązania dynamicznych równań ruchu układu z nieliniowymi elementami wibroizolującymi, [4]. Równania takie są bowiem zawsze nieliniowe i jako takie są w rozumieniu dynamiki zazwyczaj niecałkowalne, [7], nawet przez kwadraturę.



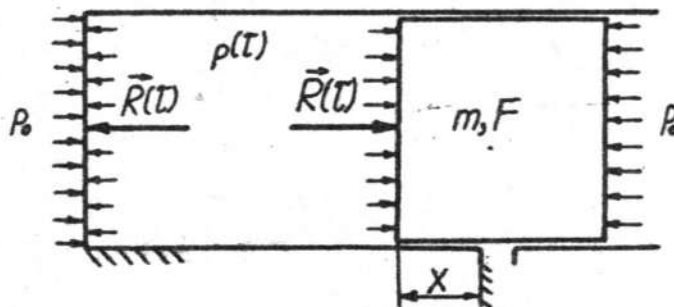
Rys. 1. Przekształcenie sprężystego układu liniowego na układ nieliniowy geometrycznie

Stosunkowo skromnie jest reprezentowana dynamika układów o nieliniowości fizycznej. Pomimo dużych możliwości zasobowań technicznych stojących przed takimi układami metody ich badania są mało rozwinięte. Przyczyny są dwie - złożoność równań ruchu, przeważnie stopnia wyższego niż drugi, [3,6,8] - oraz trudności w materialnej realizacji układu o własnościach fizycznie nieliniowych, /np. jak ukształtować sprężynę posiadającą z góry założone własności nieliniowe?/. Mimo tych trudności istnieją już prace [2,3,4,6,8], w których problemy dynamiki takich układów są stawiane i rozwiązywane. Są również znane zastosowania tłumików drgań opartych na takich układach, co stanowi bodziec do badania problemów ich dynamiki.

W tej pracy rozważono całkowite zagadnienie dynamiki pewnego tłumika o wspomnianych własnościach, przy czym pokazano związek między fizyczną nieliniowością układu i dodatkową zmienną termiczną charakteryzującą stan układu.

2. Sformułowanie zagadnienia

Stan układu czysto mechanicznego jest określony przez jego położenie i prędkość w każdej chwili czasu. [7]. Siły wywołujące ruch mogą w takim układzie zależeć od dwóch wymienionych zmiennych i od czasu. W rozważanym w tej pracy zagadnieniu siły te mogą zależeć również od temperatury. Model układu o takich własnościach pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Szkic do ułożenia równania ruchu masy tłumionej.

W technicznej realizacji model ten można uważać za tłumik drgań uderzeniowych. Mianowicie masa m poruszająca się z pewną prędkością nie uderza w sztywny ogranicznik lub zderzak sprężysty o charakterystyce liniowej, lecz po zakryciu swą powierzchnią walcową otworu łączącego wewnątrz cylindra z atmosferą spręża w tym cylindrze powietrze. Należy wyznaczyć ruch masy m , jaki zrealizuje się przy opisanych warunkach kinematycznych i siłowych. Prócz tego należy wyznaczyć reakcję dynamiczną tłumika przekazywaną na otoczenie.

W rozwiązaniu postawionego zagadnienia przyjęto następujące założenia modelowe i upraszczające:

- nie ma wymiany ciepła pomiędzy powietrzem w cylindrze i otoczeniem,
- rozpatrywany układ jest beztarciowy w sensie mechanicznym i w sensie termodynamicznym.

Ponadto założono, że parametry termiczne powietrza przed rozpoczęciem tłumienia ruchu są znane oraz znana jest prędkość masy w chwili początkującej tłumienie.

Pierwsze z wymienionych założeń można uzasadnić tym, że przewidywany czas trwania tłumienia będzie bardzo mały, a wówczas wymiana ciepła między sprężanym gazem i otoczeniem praktycznie nie zdąży nastąpić. Pominięcie sił tarcia jest dopuszczalne z uwagi na to, że siły te są znacznie mniejsze od sił ciśnienia powietrza działających na masę podczas rozpatrywanego ruchu.

Liczbowa wartość masy jest m , jej pole przekroju poprzecznego jest F , x jest przesunięciem masy, V_0 jest objętością cylindra w położeniu początkującym sprężanie, p jest ciśnieniem otoczenia, t jest czasem, $p/t/$ jest funkcją ciśnienia powietrza w cylindrze a $R/t/$ jest zmienną reakcją dynamiczną działającą na otoczenie /utwierdzenie tłumika/.

3. Rozwiązanie problemu

W przedstawionym niżej rozwiązaniu zagadnienia pokazano, że stan rozpatrywanego układu jest jednoznacznie określony przez zmienne mechaniczne oraz dodatkowo przez zmienną temperaturę powietrza w cylindrze, która decyduje o zmiennej sile ciśnienia powietrza, pod działaniem której masa się porusza. Zatem rozpatrywany układ jest pewnym typem układu termomechanicznego.

Punktem wyjścia w rozwiązaniu problemu dynamiki układu jest pierwsza zasada termodynamiki odniesiona do powietrza zawartego w cylindrze. Zasada ta przy pominięciu wymiany ciepła z otoczeniem ma w przypadku przemiany zamkniętej postać, [5] :

$$(1) \quad dU + p dV = 0,$$

gdzie U jest energią wewnętrzną gazu, p ciśnieniem a V objętością - wszystkie wielkości są zmienne i wyrażone w odpowiednich jednostkach. Do równania (1) wprowadzono czas jako zmienną niezależną:

$$(2) \quad \dot{U} + p\dot{V} = 0 \quad (*) = \frac{d}{dt} \cdot$$

Energia U wyraża się wzorem, [5] :

$$(3) \quad U = m_0 c_v T,$$

przy czym m_0 jest masą powietrza zamkniętego w cylindrze, c_v jest ciepłem właściwym powietrza przy stałej objętości a T jest bezwzględną temperaturą powietrza.

Pochodna czasowa energii wewnętrznej wyrazi się następująco:

$$(4) \quad \dot{U} = \dot{m}_0 c_v T + m_0 c_v \dot{T}.$$

Z uwagi na to, że rozpatrywana przemiana jest zamknięta będzie:

$$(5) \quad \dot{m}_0 = 0,$$

co uwzględnione w zależności (2) daje w wyniku:

$$(6) \quad m_0 c_v \dot{T} + p \dot{V} = 0.$$

Równanie (6) jest sprzężone z dynamicznym równaniem ruchu masy m postaci:

$$(7) \quad m \ddot{x} = -F [p(t) - p_0].$$

Rozprzegając układ równań (6) i (7) względem p otrzymuje się:

$$(8) \quad m \ddot{x} = F \left[p_0 + m_0 c_v \frac{\dot{T}}{V} \right].$$

Należy zwrócić uwagę, że w równaniu (8) objętość V zależy od przemieszczenia x , a w ślad za tym \dot{V} zależy od \dot{x} . Obie te zmienne /tzn. x i \dot{x} / są obok zmiennej niezależnej t zmiennymi układu czysto mechanicznego. Natomiast zależność równania (8) od temperatury T dowodzi, że równanie to opisuje równocześnie ewolucję zmiennych stanów termicznych układu. Zatem rozpatrywany tłumik pneumatyczny jest pewnego rodzaju układem termomechanicznym.

Operowanie zmienną T podczas ruchu masy nie jest jednak ze względów obliczeniowych wygodne. Lepiej zamiast T wprowadzić zmienne ciśnienie $p(t)$ w komorze, zaś zmienną T uczynić zmienną niejawną.

W tym celu wzięto do pomocy równanie stanu gazu, [5]:

$$(9) \quad pV = m_0 RT,$$

gdzie R jest indywidualną stałą gazową. Równanie to zróżniczkowano względem czasu:

$$(10) \quad \dot{p}V + p\dot{V} = Rm_0\dot{T} + Rm_0\dot{T},$$

$$(11) \quad \dot{p}V + p\dot{V} = Rm_0\dot{T}.$$

Biorąc z (11) \dot{T} i kojarząc z (6) otrzymano:

$$(12) \quad \dot{p}V + \left(1 + \frac{R}{c_v}\right) p\dot{V} = 0.$$

Uwzględniając znane zależności:

$$(13) \quad \frac{c_p}{c_v} = \mathcal{K}, \quad R = c_p - c_v,$$

gdzie c_p jest ciepłem właściwym powietrza przy stałym ciśnieniu, a \mathcal{K} jest wykładnikiem adiabaty - równanie (12) sprowadzone do postaci:

$$(14) \quad \dot{p}V + \mathcal{K}p\dot{V} = 0.$$

Funkcja ciśnienia powietrza w cylindrze wynika z równania (7):

$$(15) \quad p(t) = p_0 - \frac{F}{m} \ddot{x},$$

a jej pochodna czasowa jest równa:

$$(16) \quad \dot{p} = - \frac{F}{m} \ddot{\dot{x}}.$$

Biorąc dalej pod uwagę, że:

$$(17) \quad V = V_0 - Fx,$$

oraz:

$$(18) \quad \dot{V} = -F\dot{x}$$

układ równań (14) i (16) sprowadzono do postaci:

$$(19) \quad \ddot{\dot{x}} - \dot{\dot{x}} \times \frac{F}{V_0} - \ddot{x} \times \mathcal{K} \frac{F}{V_0} + \mathcal{K}p_0 \frac{F^2}{V_0 m} \dot{x} = 0.$$

Wprowadzając oznaczenia skracające:

$$(20) \quad b = \frac{F}{V_0}, \quad c = \mathcal{K} \frac{F}{V_0}, \quad d = \mathcal{K}p_0 \frac{F^2}{V_0 m}.$$

równanie (19) zapisano:

$$(21) \quad \ddot{x} - b \dot{x} x - c \ddot{x} \dot{x} + d \dot{x} = 0.$$

To jedno równanie nieliniowe trzeciego rzędu opisuje ewolucję czasową rozpatrywanego układu termomechanicznego, przy czym zmienne ciśnienie powietrza i zmienna temperatura podczas przemiany występują w nim w sposób niejawnny. Przy znajomości rozwiązania $x(t)$ równania (21) funkcja ciśnienia powietrza wynika z (15), zaś zmienna reakcja dynamiczna jest równa:

$$(22) \quad R(t) = F [p(t) - p_0].$$

Równanie (21) rozwiązano efektywnie za pomocą znanej w dynamice metody ruchów początkowych, [7], przyjmując rozwiązanie w postaci wielomianu:

$$(23) \quad x/t = \sum_{i=1}^n a_i t^i \quad [m], \quad t = [s], \quad a_i = [m/s^i].$$

gdzie n zależy od wymaganej dokładności rozwiązań. Odpowiednie pochodne funkcji (23) są postaci:

$$(24) \quad x_{,t^k} = \sum_{i=1}^n \frac{i!}{i-k!} a_i t^{i-k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

gdzie dla $i - k < 0$ silnia jest określona za pomocą Γ -funkcji Eulera.

Przyjęta metoda rozwiązania nadaje się w szczególności do ruchów szybkich, realizowanych w małych przedziałach czasu. Łatwo przewidzieć, że proces sprężania powietrza będzie trwał bardzo krótko, co też potwierdzają obliczenia numeryczne zamieszczone w p.4. Jest to czas rzędu kilkunastu ms /milisekund/, a przy rozłożeniu całego ruchu na kilka ruchów czasy ich trwania są rzędu kilku ms. Przyjęcie wskazanej metody rozwiązania jest więc w pełni uzasadnione. Zadawalającą zbieżność rozwiązania (23) otrzymano przyjmując $n = 6$. Spośród warunków początkowych dla równania (21) :

$$(25) \quad x(t=0) = 0, \quad \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 \quad \text{ i } \quad \ddot{x}(t=0) = \ddot{x}_0$$

dwa pierwsze są zawsze znane ze stanu kinematycznego, jakim zakończył się ruch poprzedni. Trzeci spośród warunków (25) wy-

nika ze związku (15), opisującego stan siłowy, przy jakim zakończył się ruch poprzedni. Z tych warunków wynikają współczynniki a_1 i a_2 w rozwiązaniu (23). Dalsze współczynniki a_i w (23) wyznaczono drogą podstawienia funkcji (23) i (24) do równania (21) i przyrównania do zera współczynników przy odpowiednich potęgach czasu. W ten sposób dla tych współczynników otrzymano układ równań algebraicznych:

$$(26) \quad \begin{cases} 6a_3 + a_1(d - 2ca_2) = 0, \\ 12a_4 - 3(b + c)a_1a_3 + a_2(d - 2ca_2) = 0, \\ 20a_5 - 2a_2a_3(b + 3c) - 4a_1a_4(2b + c) + da_3 = 0, \\ 60a_6 - 3a_3^2(b + 3c) - 4a_2a_4(3b + 4c) - 10a_1a_5(c + 3b) + da_4 = 0. \end{cases}$$

Współczynniki wyznaczone z równań (26) i podstawione do (23) tworzą wraz z funkcjami (22) i (15) pełne rozwiązanie sformułowanego zagadnienia. Przy kinematycznym podziale całego ruchu na kilka ruchów częściowych każdy ruch opisany kinematycznie równaniem (23) rozpoczyna się w chwili $t = 0$, a więc czas ciągły τ całego ruchu jest sumą czasów trwania wszystkich ruchów poprzednich, począwszy od pierwszego.

Otrzymane rozwiązanie obowiązuje do końca procesu sprężania powietrza w cylindrze - lub kinematycznie równoważnie do momentu spadku prędkości masy do zera. W takim położeniu masa może zostać zewnętrznie zatrzymana /przy tłumieniu pojedynczego uderzenia/, lub też przy braku ingerencji zewnętrznej może zapoczątkować nowy ruch zwrotny /przy okresowym ruchu uderzeniowym/. W drugim przypadku można sformułować i rozwiązać odpowiednie zagadnienie dynamiki, przy czym jest ono bardzo podobne do problemu już rozważonego. Mianowicie odpowiednikiem równania (7) jest teraz:

$$(27) \quad m \ddot{x} = F [p(t) - p_0].$$

Równanie (14) pozostaje w niezmienionej postaci, natomiast (17) i (18) są odpowiednio:

$$(28) \quad V = V_0 + Fx, \quad \dot{V} = F\dot{x},$$

gdzie tutaj V_0 jest inną niż poprzednio objętością cylindra na początku rozprężania.

Warunki początkowe są postaci:

$$(29) \quad x(t=0) = 0, \quad \dot{x}(t=0) = 0 \quad \text{i} \quad \ddot{x}(t=0) = \ddot{x}_0$$

przy czym trzeci spośród nich wynika tutaj z (27). Zamiast równania (21) otrzymano:

$$(30) \quad \ddot{x} + b\dot{x} + c\ddot{x} + dx = 0.$$

Nie wynikające z warunków początkowych współczynniki funkcji (23) są rozwiązaniami układu równań:

$$(31) \quad \begin{cases} 6a_3 + a_1(d + 2ca_2) = 0, \\ 12a_4 + 3(b + c)a_1a_3 + a_2(d + 2ca_2) = 0, \\ 20a_5 + 2a_2a_3(b + 3c) + 4a_1a_4(2b + c) + da_3 = 0, \\ 60a_6 + 3a_3^2(b + 3c) + 4a_2a_4(3b + 4c) - 10a_1a_5(c + 3b) + da_4 = 0. \end{cases}$$

Funkcje (23) ze współczynnikami wyznaczonymi z (31) stanowią rozwiązanie zagadnienia ruchu masy przy rozprężaniu powietrza w cylindrze.

4. Przykład liczbowy

W celu ilustracji wykorzystania otrzymanych rozwiązań ogólnych opracowano odpowiedni przykład liczbowy dotyczący konkretnego tłumika pneumatycznego. W rozwiązaniu przykładu liczbowego ruch masy m opisano za pomocą 4 równań kinematycznych postaci (23) oraz za pomocą tych funkcji wyznaczono zmienność ciśnienia powietrza wg (15) i reakcji dynamicznej wg (22). Do obliczeń przyjęto następujące stałe liczbowe:

- początkowa objętość cylindra $V_0 = 20 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$,
- pole przekroju poprzecznego masy m /tłoka/ $F = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$,
- wykładnik adiabaty dla powietrza $\gamma = 1,4$,
- prędkość początkowa masy $\dot{x}(0) = 8 \text{ m/s}$,
- ciśnienie atmosfery otoczenia $p_0 = 98100 \text{ N/m}^2$ (1 at).

Stałe zależne w równaniu (21) wynoszą:

$$b = 10, \quad c = 14, \quad d = 2,7468 \cdot 10^3.$$

W pierwszym ruchu obowiązują warunki początkowe:

$$\dot{x}(0) = 8 \text{ m/s}, \quad x(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = 0.$$

Dwa pierwsze współczynniki a_i wynikające z warunków początkowych są równe:

$$a_1 = 8, \quad a_2 = 0.$$

Pozostałe współczynniki a_i wyznaczono z równań (26) za pomocą komputera Texas Instruments SR50A otrzymując wartości:

$$a_3 = -3,6624 \cdot 10^3, \quad a_4 = -1,757952 \cdot 10^5, \quad a_5 = -9,060265 \cdot 10^6, \\ a_6 = -4,886134 \cdot 10^8.$$

Kinematyczne równanie ruchu masy na podstawie (23) jest postaci:

$$(32) \quad \begin{cases} x = 8t - 3,6624 \cdot 10^3 t^3 - 1,757952 \cdot 10^5 t^5 - 9,060265 \cdot 10^6 t^7 - \\ - 4,886134 \cdot 10^8 t^9 \text{ [m]}, \quad t = [\text{s}], \quad 0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}. \end{cases}$$

Wynikająca z (32) funkcja prędkości jest wielomianem:

$$(33) \quad \begin{cases} \dot{x} = 8 - 1,09872 \cdot 10^4 t - 7,031808 \cdot 10^5 t^3 - 4,530132 \cdot 10^7 t^5 - \\ - 2,93168 \cdot 10^9 t^7 \text{ [m/s]}, \quad t = [\text{s}], \quad 0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}. \end{cases}$$

Otrzymana z (15) funkcja ciśnienia powietrza w cylindrze oraz funkcja reakcji dynamicznej wg (22) są odpowiednio:

$$(34) \quad \begin{cases} p(t) = 0,981 \cdot 10^5 + 1,09872 \cdot 10^7 t + 1,054771 \cdot 10^9 t^2 + \\ + 9,060265 \cdot 10^{10} t^4 + 7,329201 \cdot 10^{12} t^6 \text{ [N/m]}, \quad t = [\text{s}], \\ 0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}, \\ R(t) = 2,19744 \cdot 10^4 t + 2,109542 \cdot 10^6 t^2 + 1,812053 \cdot 10^8 t^4 + \\ + 1,46584 \cdot 10^{10} t^6 \text{ [N]}, \quad t = [\text{s}], \quad 0 \leq t \leq 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}. \end{cases}$$

Ważność rozwiązań (32), (33) i (34) utrzymano dla czasów mniejszych od $5 \cdot 10^{-3}$ s. Dla większych czasów funkcje te, zwłaszcza funkcje (34) są coraz mniej dokładne. Za pomocą funkcji (32), (33) i (34) wyznaczono odpowiednio wartości przemieszcze-

nia masy, jej prędkości, funkcji ciśnień i reakcji dynamicznej co $1 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$ licząc od początku ruchu do chwili $t = 5 \text{ ms}$. Oto wspomniane wartości:

$$(35) \left\{ \begin{array}{l} x(1 \cdot 10^{-3}) = 7,996152 \cdot 10^{-3}, \quad \dot{x}(1 \cdot 10^{-3}) = 7,988261, \quad p(1 \cdot 10^{-3}) = \\ = 1,102399 \cdot 10^5, \quad R(1 \cdot 10^{-3}) = 24,27981, \\ x(2 \cdot 10^{-3}) = 15,96757 \cdot 10^{-3}, \quad \dot{x}(2 \cdot 10^{-3}) = 7,949607, \quad p(2 \cdot 10^{-3}) = \\ = 1,251556 \cdot 10^5, \quad R(2 \cdot 10^{-3}) = 54,071145, \\ x(3 \cdot 10^{-3}) = 23,88432 \cdot 10^{-3}, \quad \dot{x}(3 \cdot 10^{-3}) = 7,877746, \quad p(3 \cdot 10^{-3}) = \\ = 1,435945 \cdot 10^5, \quad R(3 \cdot 10^{-3}) = 90,988953, \\ x(4 \cdot 10^{-3}) = 31,70932 \cdot 10^{-3}, \quad \dot{x}(4 \cdot 10^{-3}) = 7,764602, \quad p(4 \cdot 10^{-3}) = \\ = 1,666 \cdot 10^5, \quad R(4 \cdot 10^{-3}) = 136,999362, \\ x(5 \cdot 10^{-3}) = 39,39638 \cdot 10^{-3}, \quad \dot{x}(5 \cdot 10^{-3}) = 7,599948, \quad p(5 \cdot 10^{-3}) = \\ = 1,953114 \cdot 10^5, \quad R(5 \cdot 10^{-3}) = 194,42271, \end{array} \right.$$

gdzie tutaj i dalej jest: $x = [\text{m}]$, $\dot{x} = [\text{m/s}]$, $p = [\text{N/m}^2]$ i $R = [\text{N}]$. Dla dalszych chwil czasu ciągłego $\tau = 6, 7, 8$ itd. $[\text{ms}]$ zbudowano nowe rozwiązanie. W tym rozwiązaniu chwili czasu $\tau = 6 \text{ ms}$ odpowiada nowy czas liczony od zera, tzn. $t = 1 \text{ ms}$, dalej - dla $\tau = 7 \text{ ms}$ jest $t = 2 \text{ ms}$ itd. Dla tego ruchu objętość początkowa V_0 ustalona na podstawie przesunięcia masy $x(5 \cdot 10^{-3})$ wynosi $V_0 = 1,212072 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.
Odpowiednio stałe (20) są równe:

$$b = 16,50067, \quad c = 23,10094, \quad d = 4532,404.$$

Warunki początkowe są następujące:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 7,599948 \text{ m/s}, \quad \ddot{x}(0) = -194,4228 \text{ m/s}^2.$$

Współczynniki a_1 i a_2 wynikające z warunków początkowych:

$$a_1 = 7,599948 \quad \text{i} \quad a_2 = -97,2114.$$

Pozostałe współczynniki a_i wyznaczone z równań (26) są równe:

$$a_3 = -1,143001 \cdot 10^4, \quad a_4 = -7,86922 \cdot 10^5, \quad a_5 = -5,498055 \cdot 10^7, \\ a_6 = -3,712549 \cdot 10^9.$$

Funkcje wyrażające przemieszczenie i prędkość masy, ciśnienie i reakcję dynamiczną są w tym ruchu odpowiednio:

$$(36) \begin{cases} x = 7,59948t - 97,2114t^2 - 1,143001 \cdot 10^4 t^3 - 7,86922 \cdot 10^5 t^4 - \\ \quad - 5,498055 \cdot 10^7 t^5 - 3,712549 \cdot 10^9 t^6, \\ \dot{x} = 7,59948 - 194,4228t - 3,429003 \cdot 10^4 t^2 - 3,147688 \cdot 10^6 t^3 - \\ \quad - 2,749028 \cdot 10^8 t^4 - 2,227529 \cdot 10^{10} t^5, \\ p(t) = 1,953114 \cdot 10^5 + 3,429003 \cdot 10^7 t + 4,721532 \cdot 10^9 t^2 + \\ \quad + 5,498055 \cdot 10^{11} t^3 + 5,568823 \cdot 10^{13} t^4, \\ R(t) = 194,4228 + 6,858006 \cdot 10^4 t + 9,443064 \cdot 10^6 t^2 + \\ \quad + 1,099611 \cdot 10^9 t^3 + 1,113765 \cdot 10^{11} t^4. \end{cases}$$

Rozwiązania (36) obowiązują dla czasów przedziału $0 \leq t \leq 4$ ms ($5 \leq \tau \leq 9$ ms). Wartości funkcji (36) dla czasów tego przedziału zestawiono niżej:

$$(37) \begin{cases} x(1 \cdot 10^{-3}) = 7,490461 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 6 \cdot 10^{-3}) = 46,886841 \cdot 10^{-3}, \\ \dot{x}(1 \cdot 10^{-3}) = \dot{x}(\tau = 6 \cdot 10^{-3}) = 7,36779, \quad p(1 \cdot 10^{-3}) = p(\tau = 6 \cdot 10^{-3}) = \\ = 2,34928 \cdot 10^5, \quad R(1 \cdot 10^{-3}) = R(\tau = 6 \cdot 10^{-3}) = 273,6569, \\ x(2 \cdot 10^{-3}) = 14,70502 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 7 \cdot 10^{-3}) = 54,1014 \cdot 10^{-3}, \\ \dot{x}(2 \cdot 10^{-3}) = \dot{x}(\tau = 7 \cdot 10^{-3}) = 7,04365, \quad p(2 \cdot 10^{-3}) = p(\tau = 7 \cdot 10^{-3}) = \\ = 2,88067 \cdot 10^5, \quad R(2 \cdot 10^{-3}) = R(\tau = 7 \cdot 10^{-3}) = 379,934, \\ x(3 \cdot 10^{-3}) = 21,53652 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 8 \cdot 10^{-3}) = 60,9329 \cdot 10^{-3}, \\ \dot{x}(3 \cdot 10^{-3}) = \dot{x}(\tau = 8 \cdot 10^{-3}) = 6,595402, \quad p(3 \cdot 10^{-3}) = p(\tau = 8 \cdot 10^{-3}) = \\ = 3,60031 \cdot 10^5, \quad R(3 \cdot 10^{-3}) = R(\tau = 8 \cdot 10^{-3}) = 523,8615, \\ x(4 \cdot 10^{-3}) = 27,85017 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 9 \cdot 10^{-3}) = 67,24655 \cdot 10^{-3}, \\ \dot{x}(4 \cdot 10^{-3}) = \dot{x}(\tau = 9 \cdot 10^{-3}) = 5,978979, \quad p(4 \cdot 10^{-3}) = p(\tau = 9 \cdot 10^{-3}) = \\ = 4,574598 \cdot 10^5, \quad R(4 \cdot 10^{-3}) = R(\tau = 9 \cdot 10^{-3}) = 718,7195. \end{cases}$$

Dla następnego, trzeciego ruchu, ustalono na podstawie wartości $x(\tau = 9 \cdot 10^{-3})$ nową objętość początkową $V_0 = 6,550686 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$.

Stałe (20) są teraz równe:

$$b = 30,53115, \quad c = 42,7436, \quad d = 8386,297.$$

Warunki początkowe i wynikające z nich współczynniki a_1 i a_2 są następujące:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, \quad \dot{x}(0) = a_1 = 5,978979 \text{ m/s}, \\ \ddot{x}(0) &= 2a_2 = -718,7196 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

Dalsze współczynniki funkcji (23) wynoszą:

$$\begin{aligned} a_3 &= -3,896995 \cdot 10^9, \quad a_4 = -3,097141 \cdot 10^6, \quad a_5 = -1,457753 \cdot 10^3, \\ a_6 &= 1,245575 \cdot 10^{10}. \end{aligned}$$

Wszystkie rozwiązania są w tym ruchu wyrażone wielomianami:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= 5,978979t - 359,3598t^2 - 3,896995 \cdot 10^9 t^3 - 3,097141 \cdot 10^6 t^4 \\ &\quad - 1,457753 \cdot 10^3 t^5 + 1,245575 \cdot 10^{10} t^6, \\ \dot{x} &= 5,978979 - 718,7196t - 1,169098 \cdot 10^5 t^2 - 1,238856 \cdot 10^7 t^3 \\ &\quad - 7,288777 \cdot 10^8 t^4 + 7,47345 \cdot 10^{10} t^5, \\ p(t) &= 4,574589 \cdot 10^5 + 1,169098 \cdot 10^8 t + 1,858285 \cdot 10^{10} t^2 + \\ &\quad + 1,457755 \cdot 10^{12} t^3 - 1,868363 \cdot 10^{14} t^4, \\ R(t) &= 718,7196 + 2,338197 \cdot 10^5 t + 3,715693 \cdot 10^7 t^2 + \\ &\quad + 2,915511 \cdot 10^9 t^3 - 3,736725 \cdot 10^{11} t^4. \end{aligned} \right.$$

Rozwiązania (38) zachowują swą ważność dla czasu $0 \leq t \leq 3 \text{ ms}$,
($9 \leq \tau \leq 12 \text{ ms}$). Odpowiednie wartości funkcji dla czasów tego przedziału są równe:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} x(1 \cdot 10^{-3}) &= 5,577419 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 10 \cdot 10^{-3}) = 72,82397 \cdot 10^{-3}, \\ \dot{x}(1 \cdot 10^{-3}) &= \dot{x}(\tau = 10 \cdot 10^{-3}) = 5,130307, \quad p(1 \cdot 10^{-3}) = p(\tau = 10 \cdot 10^{-3}) \\ &= 5,942225 \cdot 10^5, \quad R(1 \cdot 10^{-3}) = R(\tau = 10 \cdot 10^{-3}) = 992,2449, \\ x(2 \cdot 10^{-3}) &= 10,15534 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 11 \cdot 10^{-3}) = 77,40189 \cdot 10^{-3}, \\ \dot{x}(2 \cdot 10^{-3}) &= \dot{x}(\tau = 11 \cdot 10^{-3}) = 3,965522, \quad p(2 \cdot 10^{-3}) = p(\tau = 11 \cdot 10^{-3}) \\ &= 7,742826 \cdot 10^5, \quad R(2 \cdot 10^{-3}) = R(\tau = 11 \cdot 10^{-3}) = 1352,365, \\ x(3 \cdot 10^{-3}) &= 13,3733 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 12 \cdot 10^{-3}) = 80,61985 \cdot 10^{-3}, \\ \dot{x}(3 \cdot 10^{-3}) &= \dot{x}(\tau = 12 \cdot 10^{-3}) = 2,395262, \quad p(3 \cdot 10^{-3}) = p(\tau = 12 \cdot 10^{-3}) \\ &= 9,996596 \cdot 10^5, \quad R(3 \cdot 10^{-3}) = R(\tau = 12 \cdot 10^{-3}) = 1803,119. \end{aligned} \right.$$

W ostatnim, czwartym ruchu ustalono dzięki znajomości $x(\tau = 12 \cdot 10^{-3})$ objętość początkową cylindra $V_0 = 3,876026 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$. Tutaj stałe (20) wynoszą:

$$b = 51,5992, \quad c = 72,2389, \quad d = 14173,28.$$

Warunki początkowe i wynikające z nich współczynniki a_i są teraz:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = a_1 = 2,395262, \quad \ddot{x}(0) = 2a_2 = -1803,1192.$$

Następne współczynniki rozwiązania (23) są równe:

$$a_3 = 5,76574 \cdot 10^4, \quad a_4 = 6,575266 \cdot 10^6, \quad a_5 = 1,988217 \cdot 10^9, \\ a_6 = 4,7787 \cdot 10^{10}.$$

Funkcje rozwiązujące są postaci:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2,395262t - 901,5596t^2 - 5,76574 \cdot 10^4 t^3 + 6,575266 \cdot 10^6 t^4 \\ \quad + 1,988217 \cdot 10^9 t^5 + 4,787757 \cdot 10^{10} t^6, \\ \dot{x} = 2,395262 - 1,803119 \cdot 10^3 t - 1,729722 \cdot 10^5 t^2 + \\ \quad + 2,6301064 \cdot 10^7 t^3 + 9,941085 \cdot 10^8 t^4 + 2,872654 \cdot 10^{10} t^5, \\ p(t) = 9,996596 \cdot 10^5 + 1,729722 \cdot 10^8 t - 3,94516 \cdot 10^{10} t^2 - \\ \quad - 1,988217 \cdot 10^{13} t^3 - 7,181636 \cdot 10^{14} t^4, \\ R(t) = 1803,1192 + 3,459444 \cdot 10^5 t - 7,89032 \cdot 10^7 t^2 - \\ \quad - 3,976434 \cdot 10^{10} t^3 - 1,436327 \cdot 10^{12} t^4. \end{array} \right.$$

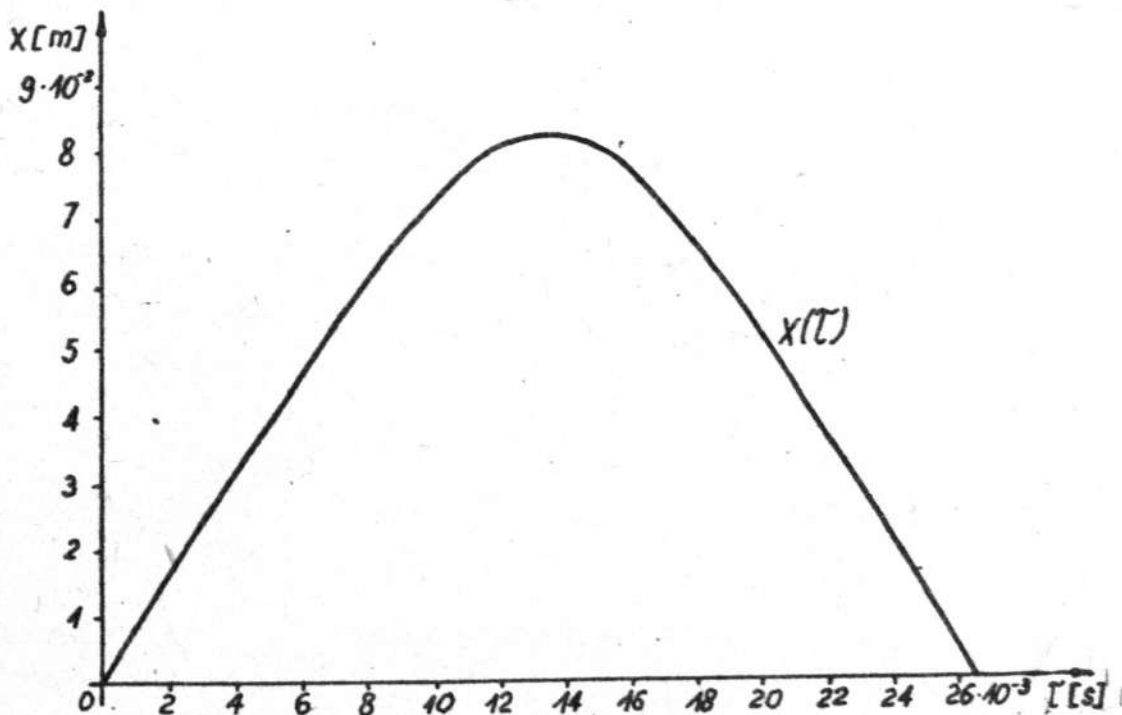
Rozwiązania (40) obowiązują już do końca procesu sprężania powietrza, tzn do momentu spadku prędkości masy do zera. Na podstawie drugiego równania (40) można ustalić, że następuje to dla chwili czasu $t = 1,224$ ms. Tak więc wszystkie rozwiązania (40) są słuszne dla przedziałów czasu: $0 \leq t \leq 1,224$ ms ($12 \leq \tau \leq 13,224$ ms).

Wartości funkcji w tym przedziale czasu wynoszą:

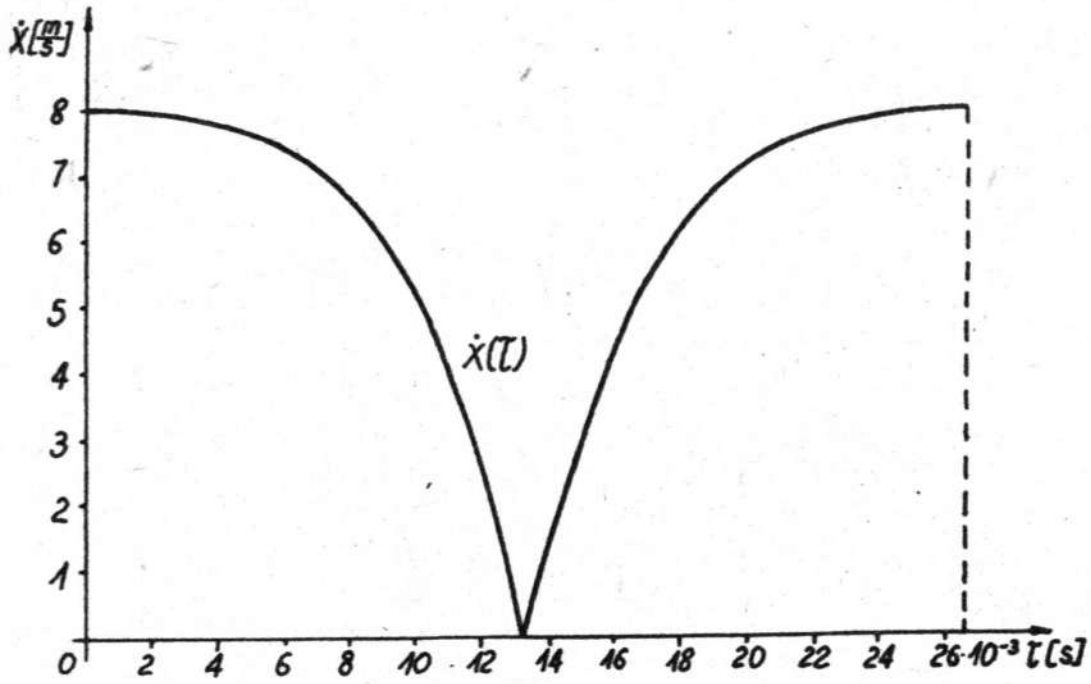
$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(1 \cdot 10^{-3}) = 1,444656 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 13 \cdot 10^{-3}) = 82,064506 \cdot 10^{-3}, \\ \dot{x}(1 \cdot 10^{-3}) = \dot{x}(\tau = 13 \cdot 10^{-3}) = 0,4557, \quad p(1 \cdot 10^{-3}) = p(\tau = 13 \cdot 10^{-3}) \\ = 11,125799 \cdot 10^5, \quad R(1 \cdot 10^{-3}) = R(\tau = 13 \cdot 10^{-3}) = 2028,96, \\ x(1,224 \cdot 10^{-3}) = 1,495757 \cdot 10^{-3}, \quad x(\tau = 13,224 \cdot 10^{-3}) = 82,110651 \cdot 10^{-3} \\ \dot{x}(1,224 \cdot 10^{-3}) = \dot{x}(\tau = 13,224 \cdot 10^{-3}) = 0, \quad p(1,224 \cdot 10^{-3}) = \\ = p(\tau = 13,224 \cdot 10^{-3}) = 11,14201 \cdot 10^5, \quad R(1,224 \cdot 10^{-3}) = \\ = R(\tau = 13,224 \cdot 10^{-3}) = 2032,202. \end{array} \right.$$

Dokładność otrzymanych rozwiązań zależy od chwilowej prędkości masy oraz od wielkości przedziału, w którym odpowiednie rozwiązanie obowiązuje. Im większa jest wspomniana prędkość a mniejszy przedział czasu, tym rozwiązanie jest dokładniejsze. Wszystkie rozwiązania wielomianowe są silnie zbieżne, tak, że dla przyjmowanych przedziałów czasu błędy obliczeń są mniejsze od 1 %. Ogólna ocena dokładności rozwiązań brzmi: dokładność funkcji przemieszczeń jest bardzo dobra, funkcji prędkości dobra, a funkcji ciśnień i funkcji reakcji dynamicznej dostateczna.

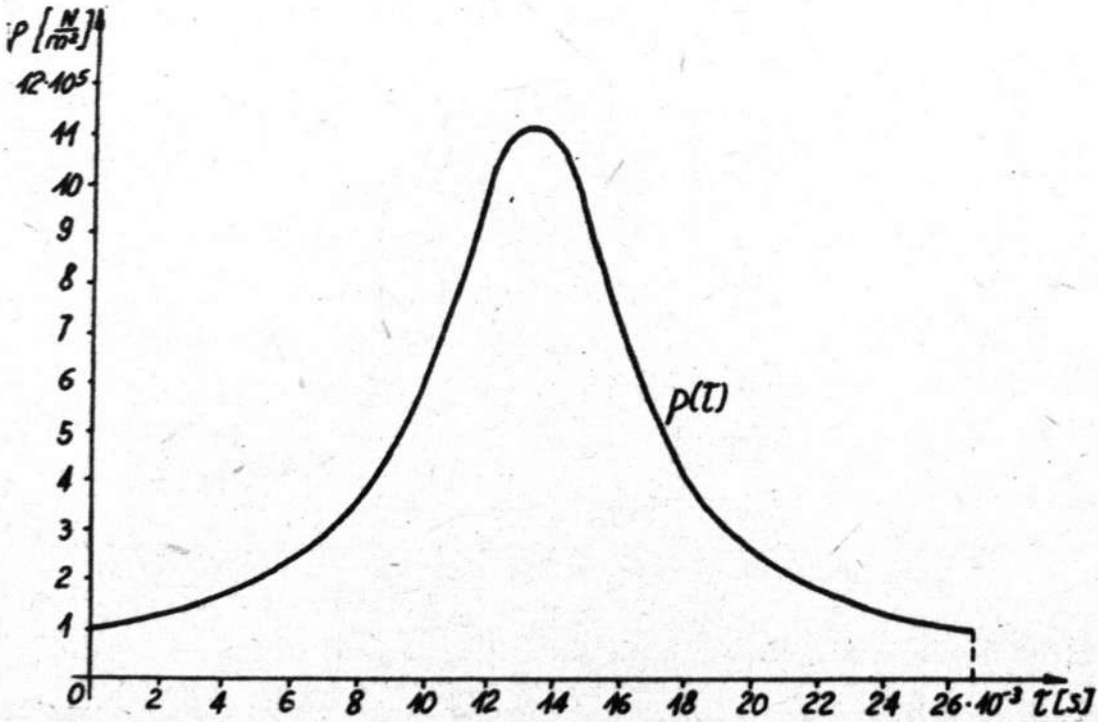
Graficzne przebiegi funkcji przemieszczenia masy, jej prędkości, pokazano odpowiednio na rys. 3, 4 i 5 oraz 6. Na podstawie wartości (35), (37) i (39), (40) można odtworzyć tylko połowę każdego ze wspomnianych przebiegów. Drugie części wykresów można wyznaczyć rozwiązując równanie (30) wraz z układem równań algebraicznych (31).



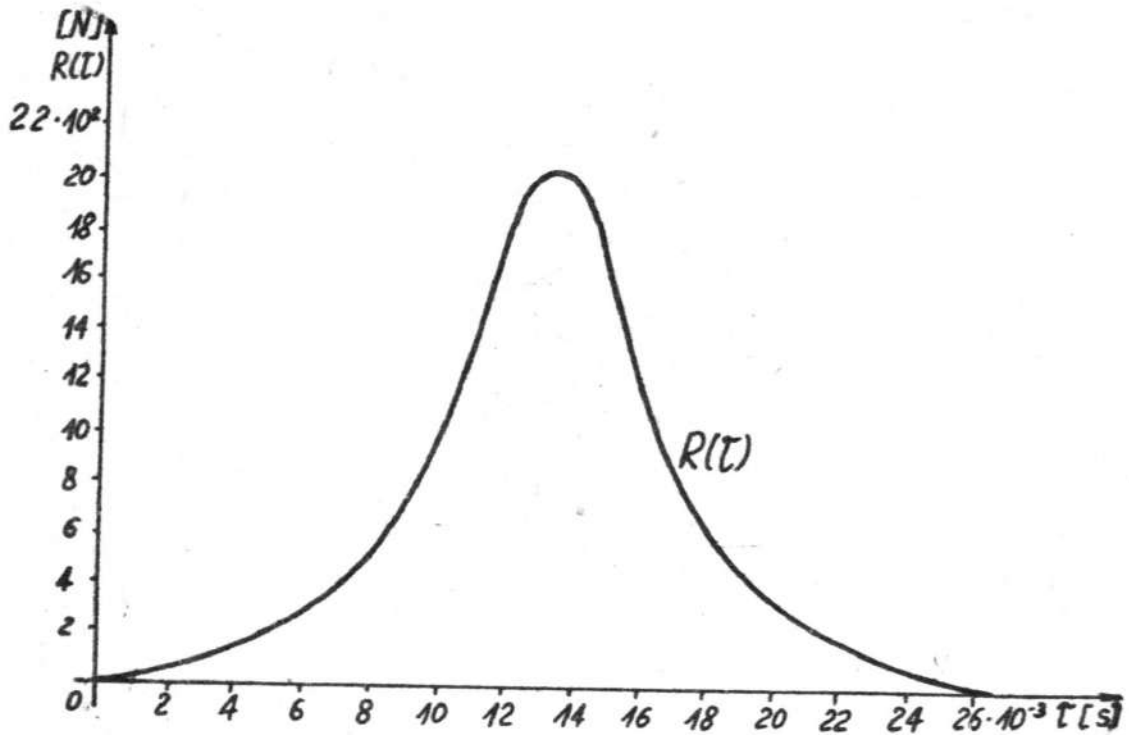
Rys. 3. Funkcja przemieszczenia masy tłumionej



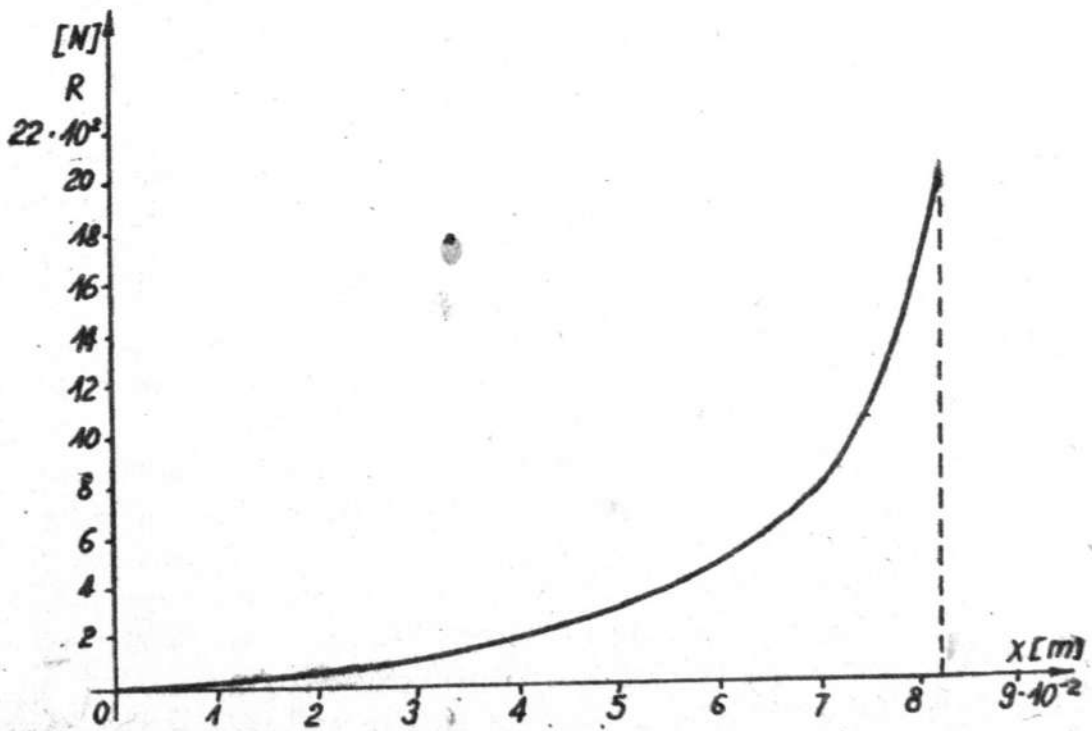
Rys. 4. Funkcja prędkości masy tłumionej



Rys. 5. Przebieg funkcji ciśnienia powietrza w cylindrze tłumika



Rys. 6. Funkcja reakcji dynamicznej tłumika przekazywanej na otoczenie



Rys. 7. Charakterystyka siłowo-przemieszczeniowa tłumika pneumatycznego

Jest to w szczególności konieczne w przypadku uwzględnienia sił tarcia lub też wymiany ciepła między rozprężanym powietrzem i otoczeniem. Jednakże tutaj istnieje inna możliwość, mianowicie na mocy założeń zamieszczonych w p.2 rozpatrywany układ jest zachowawczy. Wprowadzając potencjał sił ciśnienia powietrza można wykazać, że układ ten ma całkę pierwszą, /energii/, [7]. A zatem w powrotnym ruchu masy przy rozprężaniu powietrza zrealizuje się ruch z odwróconymi siłami. Wobec tego funkcje $x(\tau)$, $\dot{x}(\tau)$, $p(\tau)$ i $R(\tau)$ muszą być symetryczne względem $\tau = 13,224 \cdot 10^{-3}$ s. Stąd właśnie wynikają drugie części wspomnianych przebiegów.

Dzięki znajomości funkcji przemieszczenia i reakcji dynamicznej w postaci jawnie zależnych od czasu można odtworzyć przebieg charakterystyki siłowo-przemieszczeniowej rozważanego tłumika. Charakterystykę tę pokazano na rys. 7.

5. Uwagi końcowe i wnioski

W pierwszej kolejności należy zauważyć, że choć rozważono tłumik przewidziany do redukcji drgań uderzeniowych, to jednak nic nie stoi na przeszkodzie, aby w podobny sposób rozważyć zagadnienie dynamiki tłumika pneumatycznego przeznaczonego do redukcji drgań swobodnych lub wymuszonych innego układu masowego. W takim przypadku nieco inne byłoby sformułowanie równania ruchu (7), jednakże równanie termiczne (14) pozostałoby takie samo. Odpowiednik równania (8) również w tym przypadku opisywałby pewien układ termomechaniczny. Omawiany tutaj przykład tłumika byłby modelem np. pneumatycznego zawieszenia pojazdu. Wiadomo, że takie zawieszenia już znajdują techniczne zastosowanie, a zatem zaistnieje z czasem potrzeba szczególnego rozwiązania problemów dynamiki takich układów.

Przyjęte w p.2 założenia upraszczające nie są konieczne dla efektywnego rozwiązania zagadnienia dynamiki tłumika pneumatycznego. Można więc zagadnienie to rozwiązać dopuszczając zarówno wymianę ciepła między sprężanym powietrzem i otoczeniem, jak i uwzględniając działanie sił tarcia. Doprowadzi to do bardziej złożonego równania różniczkowego w porównaniu z (30). Dla ruchu powrotnego konieczna byłaby w zastosowaniu

procedura według równań (27), (28), (30) i (31)/z odpowiednimi zmianami/. Budowa zasadniczego równania różniczkowego będzie jednak podobna. Równanie takie może być rozwiązane metodą ruchów początkowych. Patrząc szerzej wydaje się, że metoda ta może być z powodzeniem stosowana do badania również innych układów mechaniczno-pneumatycznych. Układy te mają bowiem zazwyczaj bardzo małe okresy powtarzalności ruchu. Można wreszcie sformułować zagadnienie dynamiki tłumika przy uwzględnieniu otwartej przemiany termodynamicznej. Ten przypadek wymaga jednak uogólnienia równania (14).

W układach typu tłumik pneumatyczny istnieją duże możliwości realizacji różnych przebiegów funkcji pokazanych na rys. 3, 4, 5 i 6. W szczególności ważny jest przebieg funkcji reakcji dynamicznej, rys. 7. Łatwo można osiągnąć obniżenie szczytowej wartości $R(\tau)$. Wystarczy w tym celu zwiększyć początkową objętość cylindra V_0 , a wówczas dla tej samej masy zrealizuje się ruch kinematycznie podobny, przebieg $R(\tau)$ będzie bardziej płaski, zaś czas trwania ruchu zwiększy się. Przy różnych przebiegach $R(\tau)$ pozostaje stała wartość impulsu siły reakcji dynamicznej, wyrażonego całką:

$$(41) \quad I = 2 \int_0^{13,224} R(\tau) d\tau = 16,7268 \text{ kgm/s,}$$

gdzie w rozpatrzonym przypadku wartość impulsu wyznaczono przy znajomości wyraźnej zależności od czasu funkcji reakcji dynamicznej.

Przedstawiona na rys. 7. charakterystyka siłowo-przemieszczeniowa tłumika ma przebieg nieliniowy z progresją wzmocnienia. Jest to przebieg bardzo korzystny z punktu widzenia np. pożądanej charakterystyki zawieszenia pojazdu, kiedy to przy wzroście obciążenia nie byłyby potrzebne dodatkowe układy sprężysto-wzmacniające.

Na koniec należy podkreślić ważną zaletę otrzymanych rozwiązań, mianowicie wyraźną zależność od czasu wszystkich charakterystyk dynamicznych. Taka własność decyduje o szczególnie dobrej informacji o zachowaniu się układu w różnych reżimach pracy.

Można przypuszczać, że zamieszczone w pracy rozważania mogłyby być wykorzystane w analizie i syntezie innych układów mechaniczno-pneumatycznych.

LITERATURA:

- [1] Cempel C.: Minimalizacja drgań maszyn i ich elementów, w cyklu wydawniczym: Współczesne zagadnienia dynamiki maszyn, Ossolineum, Warszawa 1976
- [2] Cronin D. L., Van N. K.: Substitute for the Impact Demper, Transactions ASME, B97, No 4, 1975
- [3] Hirsch R.A.: Dynamics of Gas-operated Mechanisms, Machine Design, vol. 33, no 15, 1961
- [4] Larson R. H.: Computer Sizes Parametres of a Pheumatic Scram System, Hydraulics and Pneumatics, vol. 17, No 10, 1964
- [5] Ochęduszek S.: Termodynamika stosowana, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1967
- [6] Turnquist R. O.: Comparring Gas Flow Formulas For Control Valve Sizing, ISA Journal, 8, No 6, 1961
- [7] Whittaker E.T.: Dynamika analityczna, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1959
- [8] Woelke S.: Dynamika uderowych narzędzi pneumatycznych ze szczególnym uwzględnieniem możliwości ograniczenia drgań ich korpusów, Rozprawy Politechniki Poznańskiej, Nr 90, Poznań 1978

THE PNEUMATIC DAMPER AS AN EXAMPLE OF A THERMOMECHANICAL MODEL

Summary

The dynamics of an impact pneumatic damper are outlined. The equations describing the problem show that such a damper is a special example of a thermomechanical system. An approximate detailed solution is obtained using the method of initial movements, whereby all solving functions are explicitly dependent on time. The transfer and velocity of the damped mass and the dynamic reaction transmitted to the environment are determined. Possibilities of applying the equations given to other mechanical "pneumatic" systems are indicated.

ПНЕВМАТИЧЕСКИЙ ДЕМПФЕР КАК НЕКИЙ СЛУЧАЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Резюме

В работе сформулирован вопрос динамики пневматического демпфера удара. Из строения уравнений, описывающих проблему вытекает, что рассматриваемый демпфер является особым случаем термомеханической системы. Приблизительные подробные решения получены путем применения метода первоначальных движений, при чём все решающие функции зависят "explicitly" от времени. Назначено пробег перемещения и скорость тушённой массы, а также динамической реакции демпфера передаваемой на окружение. Указано на возможности применения приведённых уравнений к исследованиям других механическо-пневматических систем.