Studia i Materiały Informatyki Stosowanej, Tom 1, Nr 1, 2009

MODELE RYWALIZACJI I WALKI W RÓWNANIACH LANCHESTERA

Marcin Bajek

Uniwersytet Kazimierza Wielkiego
Instytut Techniki
II rok MU Edukacja Techniczno-Informatyczna
ul.Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
e-mail: bayek@interia.pl

Streszczenie: *Celem opracowania jest przedstawienie stworzonego przez Lanchestera modelu walki na dowolnym przykładzie. W artykule zamieszczone są informacje na temat samego modelu walki, prezentowany jest ogólny układ równań Lanchestera oraz układ klasyczny i najpopularniejszy. Do komputerowej symulacji wykorzystane będą aplikacje w Excel-u oraz C++ Builder. Układ równań jest rozwiązany metodami numerycznymi z wykorzystaniem czteropoziomowego algorytmu Runge–Kutty.*

Słowa kluczowe: *Lanchester, układ równań Lanchestera, metoda Runge–Kutty*

Competition and combat models in Lanchester equations

Abstarct: *The aim of this study is to present the combat model created by Lanchester using some example. The paper includes information on the combat model itself. The author presents Lanchester's general set of equations as well as classical and most popular sets. The computer simulation uses applications created in Excel and C++ Builder. The set of equations is solved by means of numerical methods using four-level Runge–Kutty algorithm.*

Keywords: *Manchester, Lanchester's set sof equations, the Runge– Kutty method*

1. RÓWNANIA LANCHESTERA

Frederick William Lanchester sformułował kilka prostych równań różniczkowych opisujących modele walki. Okazały się one bardzo ciekawym, bezkrwawym narzędziem zdolnym do przewidywania czasu zakończenia bitwy czy zwycięzcy starcia. Równania te sprawdzały się przy analizach starć wojennych od czasów antycznych po czasy okresu boni palnej. Rozszerzone zostały też zastosowane do innych operacji, np. w przemyśle, giełdach papierów wartościowych. Każda modyfikacja równań wiązała się ze wzrostem liczby zmiennych i dodawanych kolejnych współczynników. Ogólny model Lanchestera w żaden sposób nie nadaje się do bezpośredniego zastosowania we współczesnym polu np. działań zbrojnych.

Ogólny model Lanchestera wygląda następująco [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{dR(t)}{dt} = -bB(t)^{C1} \cdot R(t)^{C2} \\ \dfrac{dB(t)}{dt} = -rR(t)^{C3} \cdot B(t)^{C4} \end{cases}$$

(1)

gdzie:

r, b – liczby rzeczywiste z przedziału (0,1), tak zwane współczynniki efektywności Lanchestera lub współczynniki waleczności. Interpretuje się je często jako prawdopodobieństwa strat każdej z walczących stron w ciągu umówionej jednostki czasu walki,

$\dfrac{dR(t)}{dt} oraz \dfrac{dB(t)}{dt}$ – straty stron,

$c_1, \ldots, c_4$ – wykładniki potęg przy B(t) i R(t), mogą przyjmować wartości liczbowe 0 lub 1.

Najprostszy z wariantów ma postać [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{dR(t)}{dt} = -bB(t) \\ \dfrac{dB(t)}{dt} = -rR(t) \end{cases}$$

(2)

Powyższy układ jest najpopularniejszym modelem i w dalszej części to właśnie on będzie rozpatrywany.

9. NUMERYCZNE METODY ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ZWYCZAJNYCH

Podstawowe równanie różniczkowe pierwszego rzędu ma postać:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

gdzie $f(x, y)$ jest znaną funkcją.

Przyjmując, że $dy = y_{n+1} - y_n$ oraz $dx = h$ otrzymany jest prosty algorytm numeryczny:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n) \quad (4)$$

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h \quad (5)$$

$$x_n = x_0 + n \cdot h \quad (6)$$

Znając warunki początkowe x_0, y_0 oraz zakładając wartość kroku h można znaleźć zależność $y(x)$ dla $x \in \langle x_0, x_n \rangle$

Równanie (5) przedstawia krok następny w jednokrokowym schemacie Eulera.

W przypadku gdy w równaniach różniczkowych występują pochodne rzędu wyższego niż pierwszy to takie równanie jest przekształcane do układu równań rzędu pierwszego. Dzięki temu można do rozwiązania zastosować metody numeryczne.

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych i popularnych jest czterokrokowa metoda Rungego – Kutty. Zalicza się ją do bardzo wygodnych w programowaniu ze względu na swoją prostotę. Struktura klasycznej metody Rungego – Kutty dla układu równań wygląda następująco [2]:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$m_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$m_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$m_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

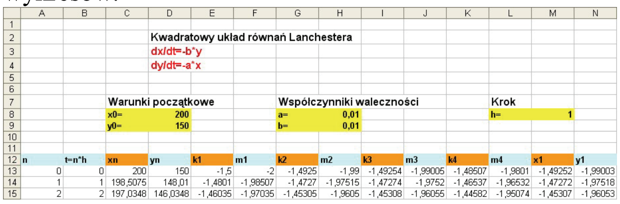
$$m_4 = hf(x_n + h, y_n + m_3)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \end{aligned} \quad (7)$$

10. IMPLEMENTACJA KOMPUTEROWA MODELU

Implementacja w Excel-u

Środowisko Excel świetnie nadaje się porozwiązywania zadań metodami numerycznymi ze względu na łatwość implementacji równań. Innym ale bardzo ważnym atutem Excel-a jest prostota w tworzeniu niezbędnych wykresów.


Kwadratowy układ równań Lanchestera
dx/dt=-b*y
dy/dt=-a*x

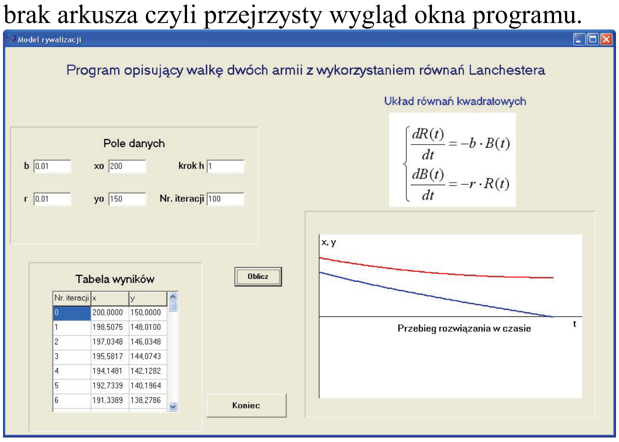
Warunki początkowe		Współczynniki waleczności		Krok	
x0=	200	a=	0,01	h=	1
y0=	150	b=	0,01		

n	t=n*h	xn	yn	k1	m1	k2	m2	k3	m3	k4	m4	x1	y1
0	0	200	150	-1,5	-2	-1,4925	-1,99	-1,49254	-1,99005	-1,48507	-1,9801	-1,49252	-1,99003
1	1	198,5075	148,01	-1,4801	-1,98507	-1,4727	-1,97515	-1,47274	-1,9752	-1,46537	-1,96532	-1,47272	-1,97518
2	2	197,0348	146,0348	-1,46035	-1,97035	-1,45305	-1,9605	-1,45308	-1,96055	-1,44582	-1,95074	-1,45307	-1,96053

Rysunek. 1 Implementacja układu równań Lanchestera

Implementacja w Borlannd C++ Builder

Zaletami programu są na pewno: działanie aplikacji bez potrzeby instalowania samego programu czyli istnieje możliwość prezentacji na każdym stanowisku bez potrzeby wcześniejszych przygotowań. Inne zalety to: łatwość w implementacji metody Rungego – Kutty oraz brak arkusza czyli przejrzysty wygląd okna programu.

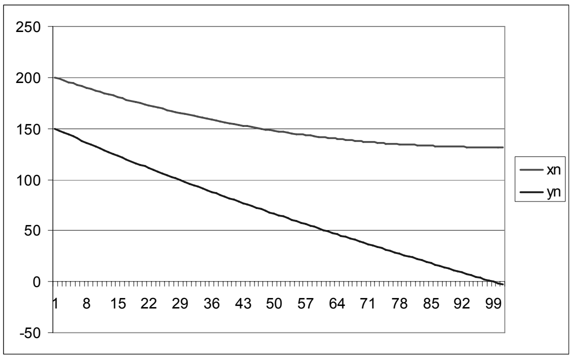


Rysunek. 2 Implementacja układu równań Lanchestera

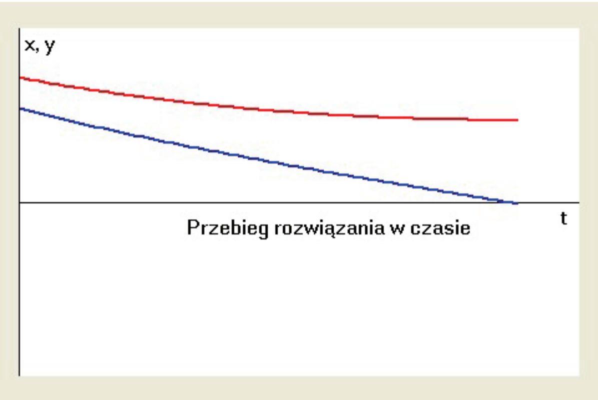
Przykład:

Dwie armie toczą ze sobą bitwę. Armia R (Red) liczy 200 tysięcy żołnierzy zaś armia B (Blue) liczy 150 tysięcy. Współczynnik efektywności obu armii wynosi 0,01. Obliczenia zostaną zakończone kiedy jedna ze stron poniesie porażkę czyli zginą wszyscy jej żołnierze [4].

Rozwiązanie:



Rysunek. 3 Graficzne rozwiązanie układu równań w Excel-u. Na osi poziomej podano numer iteracji



Rysunek. 4 Graficzne rozwiązanie układu równań w C++ Builder

Widać na obu wykresach jak niebieska linia osiąga wartość zerową, oznacza to, że porażkę poniosła armia B (Blue). Czynnik liczebności zadecydował o tym kto przegrał bo obie strony posiadały taki sam współczynnik waleczności. Czas trwania starcia wynosi 97 godzin lub np. minut – kwestia doboru jednostki czasu w modelowaniu jest dowolna. Po stronie R (Red) pozostanie 131 tysięcy żołnierzy wiec klęska przeciwnika jest dość spora.
W prezentowanych aplikacjach można dokonywać różnych zmian, np. operować współczynnikami waleczności czy zmieniać krok h. Jeżeli liczebność walczących armii będzie taka sama (150 tys. żołnierzy) przy jednakowych współczynnikach waleczności (0,01) to zaobserwuje się ciekawe zjawisko. Starcie zakończone jest porażką obu armii, z tym że czas jej trwania zwiększy się aż pięciokrotnie. Inny przypadek to gdy przyjęte zostaną dane początkowe ale założone zostanie zwycięstwo armii B (Blue). Trzeba np. podwoić współczynnik waleczności dla tej właśnie armii. Wyniki starcia to oczywiście zaplanowane zwycięstwo, które zakończy się po ok. 130 godzinach (jednostkach) i 50 tys. żołnierzach przy życiu.

11. WNIOSKI I PODSUMOWANIE

Model walki Lanchestera był bardzo dobrze znany w pierwszej połowie XX wieku i stosowany praktycznie w każdej dziedzinie gdzie występowała rywalizacja. Obecnie przy tak zaawansowanej technologii informatycznej można w sposób bardzo łatwy każdy z modeli zaimplementować w dowolnej aplikacji i dokonywać symulacji oraz badań. Stało się to możliwe dzięki numerycznym metodom rozwiązywania układów równań różniczkowych.
Stworzone aplikacje w Excel-u oraz w C++ Builder umożliwiają rozwiązanie klasycznego modelu Lanchestera w sposób bardzo szybki i efektowny. Można jak pokazano to powyżej dokonywać wielu symulacji. Otrzymane wyniki w obu aplikacjach są identyczne więc nie ma znaczenia, który program będzie używany.

Literatura

1 Spustek Henryk, „Model przewagi i jego implementacja komputerowa”, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2006
2 Degras Jean, „Praktyczne metody analizy numerycznej”, Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa 1974.
3 Sadowski Witold, artykuł „Wojenne (PO)rachunki”, Wiedza i życie, 2001
4 http://www.cs.uiowa.edu/~dsidran/ReadingsForResearch2.pdf, pp.10-12