

# OSCYLATOR RLC Z LOSOWYMI PARAMETRAMI REZYSTANCJI I INDUKCYJNOŚCI

Piotr Fajkowski

Uniwersytet Kazimierza Wielkiego  
Instytut Techniki  
II rok MU Edukacja Techniczno-Informatyczna  
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz  
e-mail: piotras230@o2.pl

**Streszczenie:** W artykule prezentowany jest model szeregowego oscylatora RLC, który zaburzany jest losowymi parametrami rezystancji i indukcyjności. Do numerycznej symulacji układu został stworzony program napisany w języku C++. Program bada wpływ losowych zmian parametrów na oscylator RLC. Na podstawie tworzonych wykresów określamy stabilność pracy oscylatora. Głównym zadaniem jest znalezienie przybliżonej wartości losowego parametru, przy którym układ staje się nieprzewidywalny. Świadczyć o tym będą przecięcia trajektorii pojawiające się na portrecie fazowym układu RLC.

**Słowa kluczowe:** Oscylator, układ RLC, metody numeryczne, niestabilność

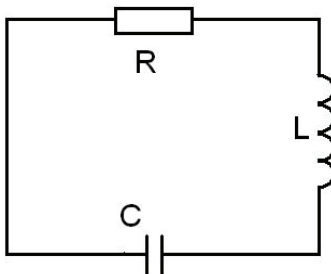
## RLC oscillator with random parameters of resistance and inductance

**Abstract:** The article presents the model of serial RLC oscillator that is disturbed by random parameters of resistance and inductance. Numerical simulation of the system has been realised by the program developed in C++ language. The program examines impact of random parameter changes on the RLC oscillator. Authors determine the stability of the oscillator operation on the grounds of created graphs. The main aim was to find approximate value of a random parameter for which the system becomes unpredictable. This will be indicated by trajectory intersections that occur in the phase portrait of the RLC system.

**Keywords:** Oscillator, RLC system, numerical analysis methods, instability

### 1. WSTĘP

Przedmiotem numerycznej analizy jest klasyczny układ RLC bez wymuszenia (rys. 1). Składa się on z szeregowo połączonych rezystora o rezystancji R, cewki o indukcyjności L i kondensatora o pojemności C.



Rys. 1 Klasyczny szeregowy układ RLC bez wymuszenia

Taki układ możemy opisać równaniem różniczkowym:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (1)$$

Równanie różniczkowe (1) opisuje zachowanie obwodu RLC, w którym drgania elektryczne układu są tłumione. Kondensator i cewka są źródłem drgań. Rezystor R wraz z przewodami łączącymi wszystkie elementy układu jest odpowiedzialny za tłumienie drgań wytwarzanych przez cewkę i kondensator. Wynika to z prawa Jula-Lenza zgodnie z którym energia układu jest tracona na elementach rezystancyjnych w postaci ciepła. Tak więc im większa rezystancja obwodu tym szybciej wzbudzone drgania będą gasły.

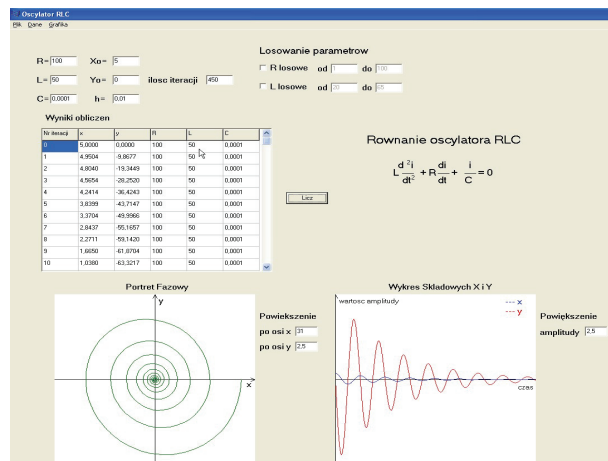
Równanie (1) jest punktem wyjścia do analizy numerycznej układu, należy je jednak odpowiednio przekształcić na równoważny układ równań (2):

$$\begin{cases} y' = -\frac{\left(R \cdot y + \frac{x}{C}\right)}{L} \\ x' = y = \frac{di}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

Tak przygotowany układ równań można rozwiązać numerycznie metodą czteropozomową Rungego-Kutty. Metoda ta bardzo dobrze nadaje się do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych ze zdefiniowanymi warunkami początkowymi oraz zapewnia odpowiednią dokładność rozwiązania. Schemat tworzenia równań według metody Rungego-Kutty jest omawiany w wielu opracowaniach [1].

Odpowiednio utworzony szereg równań zapisano w kodzie źródłowym programu, który rozwiązuje numerycznie równanie oscylatora RLC. Aplikacja została napisana w języku Builder C++. Program umożliwia badanie oscylatora bez losowych parametrów R i L jak też z losowymi parametrami. Głównym zadaniem programu jest ocena wpływu losowych parametrów na zachowanie się układu RLC. Ocena ta polegać będzie na wyszukiwaniu przecinających się linii na portrecie fazowym (bifurkacji) przy różnych wartościach losowych parametrów R i L. Układ będzie uznawany za pracujący stabilnie jeżeli na portrecie fazowym nie wystąpią żadne bifurkacje. Jeśli przecinające się linie będą obecne na wykresie fazowym to oscylator będzie wykazywał cechy układu chaotycznego.

Na rysunku 2 przedstawiono wygląd okna programu. Sama obsługa aplikacji nie sprawia kłopotów. Należy tylko właściwie dobrać parametry rezystancji R, indukcyjności L i pojemności C. Ustalić warunki początkowe z których ma startować rozwiązanie oraz odpowiednio ustalić krok h. Program będzie prowadził obliczenia z zadaną przez użytkownika ilością iteracji. Ilość iteracji możemy traktować jako ewolucję obwodu w czasie.



Rysunek 2 Wygląd programu rozwiązującego równanie różniczkowe oscylatora RLC

## 2. PRZEPROWADZONE BADANIA OSCYLATORA RLC Z LOSOWYMI PARAMETRAMI

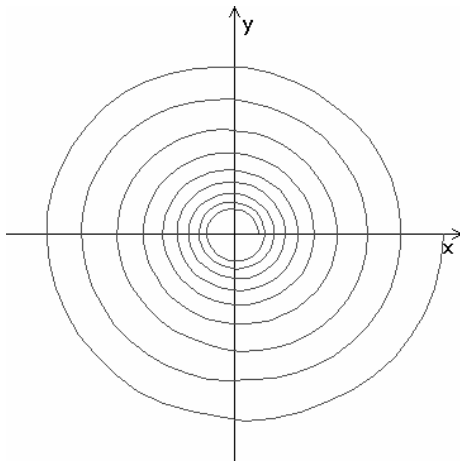
W tej części artykułu znajdują się przykładowe badania układu RLC z losowymi parametrami. Układ można modelować dla różnych wartości parametrów R, L i C, jednak zadaniem programu jest pokazanie jak wpływają one na oscylator. Przeprowadzone badania są dość unikalne, ponieważ losowe parametry są zmieniane w czasie pracy układu. Po każdej iteracji są losowane nowe wartości rezystancji i/lub indukcyjności z zadanego przedziału.

### 2.1. Oscylator RLC z losową rezystancją R

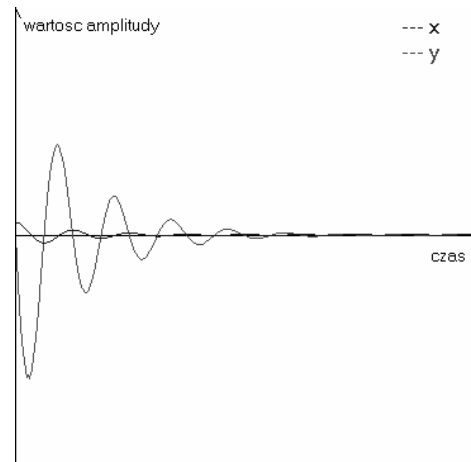
W symulacji układu z losową rezystancją przyjęto następujące stałe parametry dla oscylatora:

$$\begin{aligned} x_0 &= 5 & y_0 &= 0 \\ L &= 50\text{H} & C &= 0,0001\text{F} \\ h &= 0,01 & \text{ilość iteracji} &= 400 \end{aligned}$$

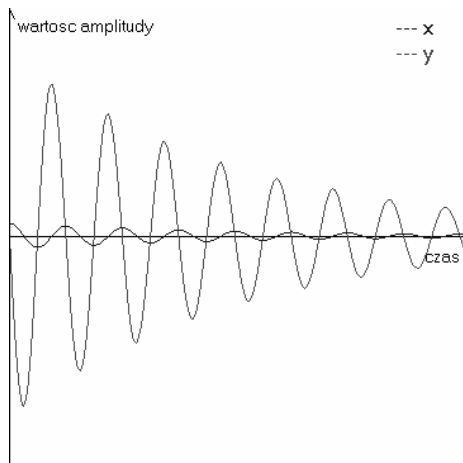
Symulacja z losową rezystancją R od 0 do 100Ω



Rys. 1 Oscylator RLC - portret fazowy

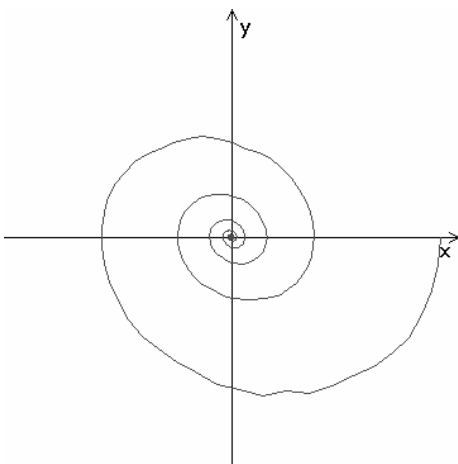


Rys. 4 Oscylator RLC - wykres drgań składowych x i y



Rys. 2 Oscylator RLC - wykres drgań składowych x i y

2) Symulacja z losową rezystancją od 50 do 350Ω



Rys. 3 Oscylator RLC - portret fazowy

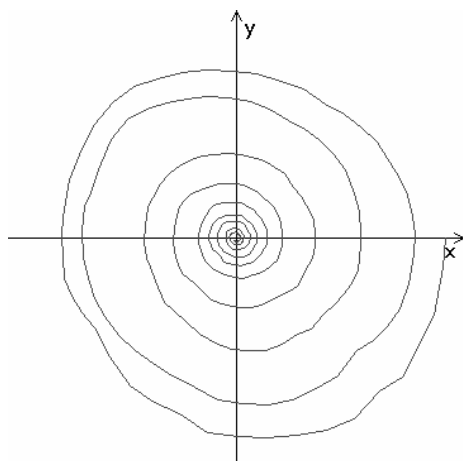
Przyglądając się powyższym rysunkom widzimy że losowa rezystancja w małym stopniu wpływa na nasz układ. Nie występują tu żadne szukane bifurkacje. Zaburzenie portretu fazowego rys. 3a przez losową rezystancję od 0 do 100Ω jest praktycznie niewidoczne. Układ pracuje w granicach stabilności, a składowe x i y mają charakter drgań gasnących. W symulacji kiedy rezystancję losowano z zakresu od 50 do 350Ω możemy zauważyć pewne zafalowania na portrecie fazowym (rys. 4a). Jest to spowodowane dużym zakresem losowania (300Ω), gdzie rezystancja zmienia się skokowo o dość duże wartości. Duży zakres losowania powoduje że drgania jeszcze szybciej gasną niż na rys. 3, ponieważ górna wartość rezystancji wynosi aż 350Ω. Rezystancja R nie zaburza w znaczący sposób pracy oscylatora RLC. Częstotliwość drgań własnych jest stała. Duża rozpiętość przedziału losowania rezystancji sprawia że układ wytraca swoją energię przez co drgania szybciej gasną.

2.2 Oscylator RLC z losową indukcyjnością L

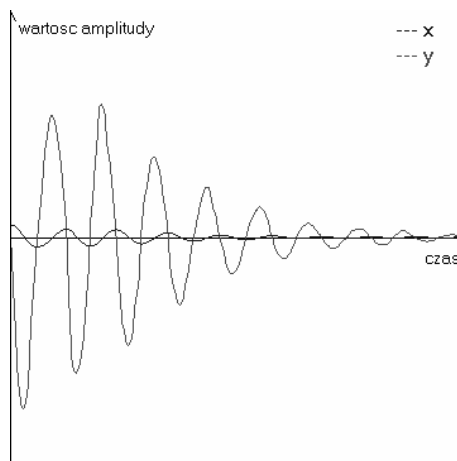
W symulacji układu z losową indukcyjnością przyjęto następujące stałe parametry:

$$\begin{aligned} x_0 &= 5 & y_0 &= 0 \\ R &= 100\Omega & C &= 0,0001F \\ h &= 0,01 & \text{ilość iteracji} &= 400 \end{aligned}$$

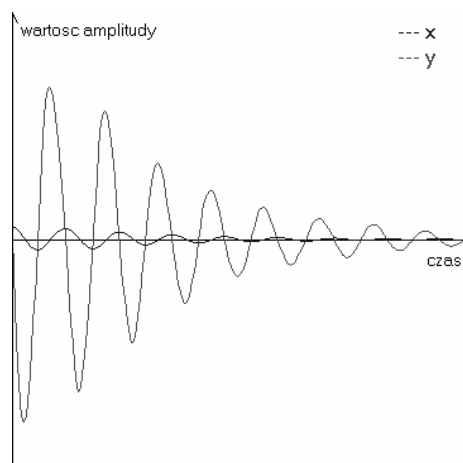
1) Symulacja z losową indukcyjnością L od 25 do 75H



Rys. 5 Oscylator RLC - portret fazowy

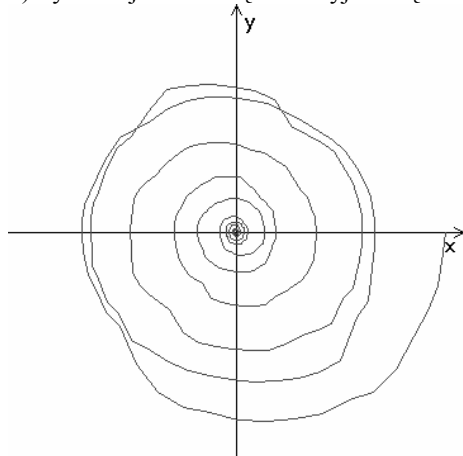


Rys. 8 Oscylator RLC - wykres drgań składowych x i y



Rys. 6 Oscylator RLC - wykres drgań składowych x i y

2) Symulacja z losową indukcyjnością  $L$  od 15 do 85H



Rys. 7 Oscylator RLC - portret fazowy

Przy zaburzaniu układu RLC losową indukcyjnością pojawiają się szukane bifurkacje (rys. 6a). Indukcyjność losowana z zakresu od 15 do 85H powoduje powstanie przecinających się linii na portrecie fazowym. Dla tak dobranych parametrów układu jest to umowna graniczna wartość przy której zaczynają się pojawiać bifurkacje. Na wykresie 6a widzimy ewolucję układu. Przecinające się linie wykresu fazowego nie pozwalają przewidzieć jaką trajektorię obierze układ. Staje się on nieprzewidywalny. Na wykresie drgań amplitud (rys. 6b) możemy dostrzec że drgania są bardzo chaotyczne, kolejno zwiększając i zmniejszając swoją amplitudę. Po przekroczeniu umownej granicy wystąpienia bifurkacji efekt zaburzania oscylatora nasila się i nie jesteśmy w stanie przewidzieć jego pracy. Charakter obwodu gwałtownie może się zmieniać łącząc w sobie drgania silnie gasnące, stałe, czy bardzo szybko rosnące. Już na rys. 5 widać że losowa indukcyjność w większym stopniu zaburza oscylator RLC niż losowa rezystancja. Wpływa ona znacząco na stabilność oscylatora.

### 3. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone symulacje pozwalają stwierdzić że głównym czynnikiem powodującym powstawanie niestabilności na portrecie fazowym jest indukcyjność. Wiemy że częstotliwość drgań obwodu RLC zależy od iloczynu LC. Dlatego losowa indukcyjność i losowa pojemność (nie prezentowana w tym artykule) znacząco wpływają na pracę całego układu. To one są odpowiedzialne za bardzo silne zaburzenia oscylatora. To losowa indukcyjność powoduje że pracy układu nie jesteśmy w stanie w żaden sposób przewidzieć. Oscylator ewoluje zgodnie z losowością parametru  $L$ . Rezystancja natomiast tłumi drgania i im większy

przedział jej losowania zastosujemy tym szybciej będzie wytracana energia układu. Oczywiście prezentowane tu symulacje są przykładowe i pokazują pracę układu RLC opisanego równaniem różniczkowym (1). Równie dobrze możemy testować nasz oscylator dla innych wartości R, L, C oraz warunków początkowych. Jednak schemat pracy układu powinien być podobny do omawianego tutaj.

Temat losowo zmieniających się parametrów w czasie pracy układu jest dość unikalny, ponieważ w większości prac losowo zmieniane są parametry początkowe układów [2]. Przyglądając się bliżej badanemu problemowi może on częściowo symulować starzenie elementów układu. W wielu przypadkach dzieje się tak, że zanim nastąpi awaria urządzenia to jeden z jego elementów traci swoje pożądane właściwości i zaczyna zachowywać się nieprzewidywalnie. Prezentowany w tym artykule układ może właśnie takie zjawisko symulować poprzez zmieniające się w czasie wartości danego parametru.

#### **Literatura**

1. Jean Legras: Praktyczne metody analizy numerycznej, WNT Warszawa 1974
2. Janicki A., Izydorczyk A. : Komputerowe metody w modelowaniu stochastycznym, WNT Warszawa 2001.
3. Drgania w obwodach RLC i fale elektromagnetyczne, <http://www.mif.pg.gda.pl/kfze/wyklady/WM2rozdzial7.pdf>
4. Programowanie w Borland C++ Builder, strona internetowa: <http://cyfbar.republika.pl/>