

RÓWNANIE VAN DER POLA

Paweł Jendykiewicz

Uniwersytet Kazimierza Wielkiego
Instytut Techniki
II rok MU Edukacja Techniczno-Informatyczna
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
e-mail: pawel25pl@wp.pl

Streszczenie: W artykule prezentowana jest metoda badania stabilności obwodu elektrycznego opisanego za pomocą równania różniczkowego. Aby opisać tą metodę wykorzystano oscylator van der Pola. Badania układu opisanego równaniem van der Pola z losowym współczynnikiem tłumienia przeprowadzono za pomocą programu vdP.exe. Na podstawie wizualizacji wyników rozwiązania równania vdP określamy przybliżoną wartość współczynnika tłumienia, przy którym układ traci stabilność. Wykorzystaną metodą numeryczną do obliczeń równania różniczkowego jest metoda Runge-Kutty według schematu cztero poziomowego.

Słowa kluczowe: Bifurkacja, Równanie van der Pola, metoda Runge-Kutty.

Van der Pol equation

Abstract: This paper presents the electric circuit stability test method analysed using differential equation. Authors described this method using van der Pol oscillator. Research of the system analysed using van der Pol equation with random damping coefficient has been performed by means of the vdP.exe program. Authors determine approximate value of the damping coefficient for which the system becomes unstable on the grounds of the vdP equation visualisation results. The numerical analysis method used to calculate the differential equation is Runge-Kutty method with a four-level pattern.

Keywords: Bifurcation, Van der Pol equation, the Runge-Kutty metod

1. WSTĘP

Możliwość jednoznacznego określenia ewolucji w czasie interesującego nas procesu, istnieje gdy dysponujemy wiedzą dotyczącą zależności funkcyjnych między funkcją opisującą ten proces i jej pochodną (lub jej pochodnymi) oraz dodatkowo należy dysponować warunkami początkowymi. Zależność funkcyjna pomiędzy nieznaną funkcją a jej pochodną nosi nazwę równania różniczkowego.

Obecnie bardzo trudno wyobrazić sobie rozwój wielu dziedzin nauki bez znajomości teorii równań różniczkowych. Istnieje wiele kierunków rozwoju współczesnych teorii równań różniczkowych oraz różne metody ich nauczania w zależności od potrzeb uwarunkowanych kręgiem odbiorców.

Celem artykułu jest przedstawienie metody i określenie stabilności układu opisanego za pomocą równania van

der Pola (1). Przy czym wartość parametr μ – czyli współczynnik tłumienia będzie liczbą losową. Warunki początkowe natomiast będą stałe.

2. RÓWNANIE VAN DER POLA

Równanie van der Pola (oscylator van der Pola) opisane jest następującym modelem matematycznym

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \cdot (1 - x^2) \cdot \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (1)$$

$$\mu \cdot (1 - x^2) \cdot \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

nieliniowa funkcja tłumienia,
 μ – współczynnik tłumienia.

Równanie (1) jest to równanie wykorzystywane do analizy obwodu elektrycznego, w którym zwykły rezystor został zastąpiony elementem o nieliniowej

charakterystyce prądowo-napięciowej. Elementami o takiej charakterystyce są diody tunelowe.

Równanie (1) ma dokładnie jedno asymptotyczne stabilne rozwiązanie okresowe. Fakt ten jest podstawą wykorzystania diod tunelowych do konstrukcji tzw. generatorów samowzbudnych, niezbędnych w wielu zastosowaniach elektroniki (generowanie i odbiór sygnałów).

Szczegółowe wyprowadzenia równania vdP oraz zastosowanie równań różniczkowych w teorii obwodów elektrycznych możemy znaleźć w wielu opracowaniach. [1]

W ostatnich latach oscylator stosowany jest również do modelowania dynamiki serca.

Jedną z cech oscylatorów relaksacyjnych jest umiejętność dopasowywania swojej częstości do częstości zewnętrznego układu wymuszającego [2]. Ta cecha powoduje, że oscylatory relaksacyjne nadają się do modelowania układów, w których istotne jest generowanie odpowiedzi na pobudzenie, o dopasowującej się częstości i stałej amplitudzie. Tą własność wykorzystali van der Pol i van der Mark tworząc pierwszy model serca oparty na oscylatorach relaksacyjnych (van der Pola) [3].

3. NUMERYCZNE ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA VAN DER POLA.

W rozlicznych opracowaniach [4],[5] można znaleźć algorytmy numerycznego rozwiązania równania różniczkowego lub układu równań. Prosty schemat drugiego rzędu przedstawia następujący schemat:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = h \cdot f(t_n, y_n), \quad k_2 = h \cdot f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

h - jest krokiem (przyrostem) całkowania zmiennej niezależnej t , natomiast k_1 i k_2 są to wyrażenia pomocnicze.

Bardziej dokładną metodą stosowaną przy całkowaniu równań różniczkowych jest metoda Runge-Kutty czwartego rzędu.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + 0(h^5) =$$

$$y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + 0(h^5)$$

$$k_1 = h \cdot f(t_n, y_n), \quad k_2 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \quad k_4 = h \cdot f(t_n + h, y_n + k_3)$$

Metoda w porównaniu do poprzedniej ma większą dokładność.

Rozwiązać równanie różniczkowe oznacza znaleźć wszystkie funkcje spełniające dane równanie różniczkowe, tzw. rozwiązanie ogólne. Funkcji tych jest zazwyczaj nieskończenie wiele, a różnią się zazwyczaj wielkościami jednego parametru.

Aby rozwiązać równanie (1), posłużymy się metodą, która pozwoli znaleźć szczególne rozwiązanie równania. Spełniając pewne warunki zwane brzegowymi lub początkowymi.

Na początku musimy nasze równanie różniczkowe (1) sprowadzić do postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + \mu \cdot (1 - x^2) \cdot y \end{cases} \quad (3)$$

Równanie van der Pola (1) zapisane w takiej postaci (3) można rozwiązać za pomocą metody Runge-Kutty, korzystając np. z arkusza kalkulacyjnego Excel. Poniżej przedstawiono algorytm rozwiązania układu równań, według 4 poziomowego schematu Runge-Kutty.

$$k_1 = y \quad (4)$$

$$m_1 = -x + \mu \cdot (1 - x^2) \cdot y \quad (5)$$

$$k_2 = y + h \cdot \frac{m_1}{2} \quad (6)$$

$$m_2 = -(x + h \cdot \frac{k_1}{2}) + \mu \cdot (1 - (x + h \cdot \frac{k_1}{2})^2) \cdot (y + h \cdot \frac{m_1}{2}) \quad (7)$$

$$k_3 = y + h \cdot \frac{m_2}{2} \quad (8)$$

$$m_3 = -(x + h \cdot \frac{k_2}{2}) + \mu \cdot (1 - (x + h \cdot \frac{k_2}{2})^2) \cdot (y + h \cdot \frac{m_2}{2}) \quad (9)$$

$$k_4 = y + h \cdot m_3 \quad (10)$$

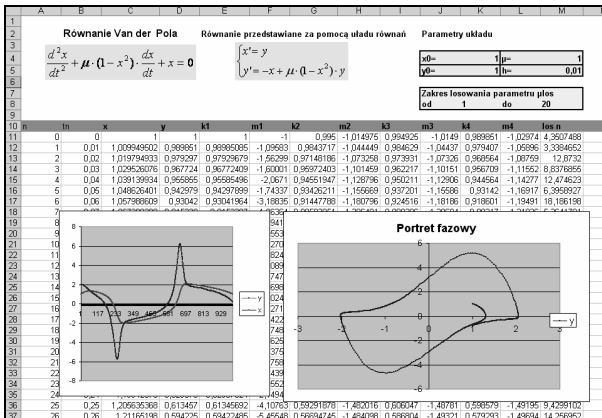
$$m_4 = -(x + h \cdot k_3) + \mu \cdot (1 - (x + h \cdot k_3)^2) \cdot (y + h \cdot m_3) \quad (11)$$

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) / 6 \quad (12)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (m_1 + 2 \cdot m_2 + 2 \cdot m_3 + m_4) / 6 \quad (13)$$

W metodzie tej musimy wielokrotnie obliczać wartości funkcji, korzystamy tutaj z poprzedniego kroku. Długość kroku całkowania określa h.

Poniżej przedstawiono widok arkusza kalkulacyjnego z widocznymi wynikami rozwiązania równania van der Pola z losowym parametrem μ . Współczynnik tłumienia wynosi $1 + \mu$ los.



Rys. 1 Widok arkusza kalkulacyjnego z widocznymi wynikami rozwiązania równania van der Pola z losowym parametrem μ .

4. PRZEPROWADZONE BADANIA OSCYLATORA VAN DER POLA

Głównym celem artykułu jest określenie stabilności układu opisanego za pomocą równania van der Pola (1). Przy czym wartość parametr μ – czyli współczynnik tłumienia będzie liczbą losową z zakresu $\langle 0;5 \rangle$. Warunki początkowe natomiast będą stałe.

System jest strukturalnie stabilny, jeżeli przy niewielkiej zmianie parametrów zachodzą niewielkie zmiany w trajektoriach. Ze stabilnością strukturalną ściśle wiąże się pojęcie bifurkacji.

Bifurkacją (łac. Bifurcus - rozdwojenie, rozwidlenie, rozdzielenie) nazywa się zjawisko, polegające na tym, że pod wpływem zmiany parametru następują jakościowe zmiany trajektorii. Punktem bifurkacji jest wartość parametru, dla którego układ traci stabilność.

Do określenia stabilności układu posłużymy nam portretu fazowemu, w którym to będziemy szukali się przecinających się linii tego portretu. W momencie gdy linie portretu fazowego zaczną się przecinać układ przestaje być stabilny. Do przeprowadzenia badań wykorzystano aplikację napisaną za pomocą programu Borland Enterprise Suite C++ Builder. Wykorzystano metodykę programowania obiektowego. Stworzony program jest zdefiniowany za pomocą obiektów komunikujących się pomiędzy sobą w celu wykonywania zadań.

Wykorzystane komponenty:

TChart – jest jednym z najważniejszych komponentów udostępnionych przez bibliotekę TeeChart Zawiera on bogaty zbiór wykresów. Komponent ten służy do wizualizacji wyników.

TStringGrid – arkusz z elementami będącymi łańcuchami znaków. Komponent ten służy do wyświetlania wyników obliczeń w formie tabeli.

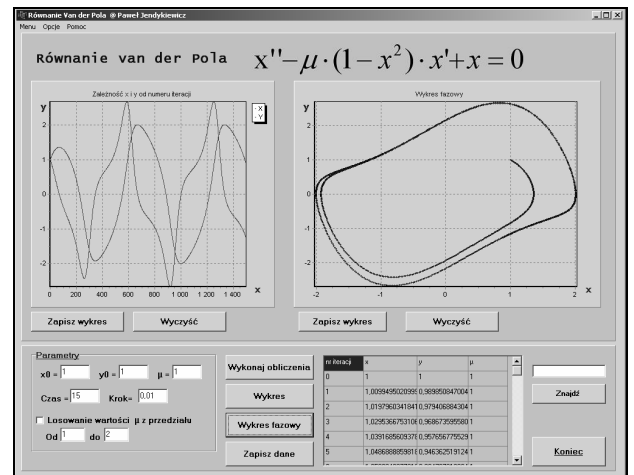
TCheckBox – pole wyboru, włączony i wyłączony. Za pomocą tego komponentu możemy wprowadzać losowość parametru μ z przedziału.

MainMenu – menu związane z formularzem.. Komponent odpowiada za pasek menu w którym możemy zapisać dane, zapisać grafikę, zamknąć program.

Edit – edycja tekstu. Edit służy nam do wprowadzania parametrów.

Button – przycisk. Wykonywanie zdefiniowanych zadań.

W programie wykorzystano metodę Runge–Kutty czwartego rzędu opisaną w punkcie 3.



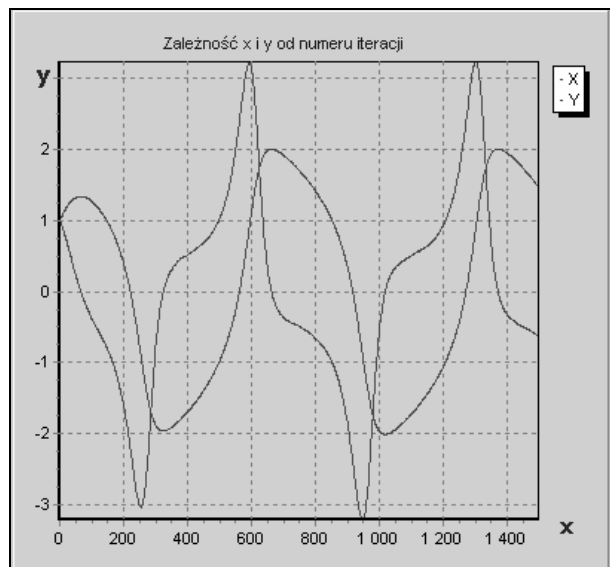
Rys. 2 Okno programu vdP

Program jest bardzo prosty w obsłudze. Po uruchomieniu programu możemy ustawiać parametry takie jak: wartości początkowe x_0, y_0 wartość współczynnika tłumienia μ

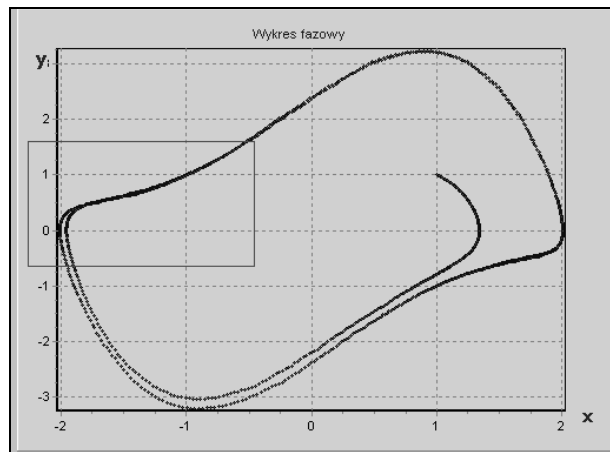
liczbę kroków
czas symulacji.

Symulacja nr. 1

Parametry układu: współczynnika tłumienia losowany z przedziału $\langle 1;2 \rangle$, warunki początkowe $x_0=1$ $y_0= 1$, czas symulacji =15, krok =0,01, ilość iteracji=1500.



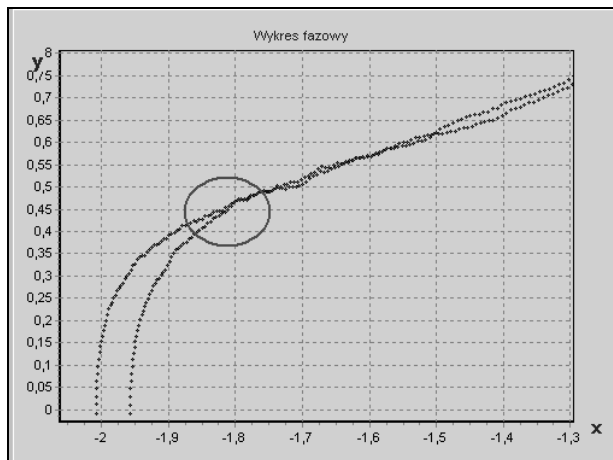
Rys. 3 Otrzymany wykres składowych x i y oscylatora vdP.



Rys. 4 Portret fazowy oscylatora vdP z parametrem losowym.

Widzimy że portret fazowy równania (1) przy losowym współczynniku tłumienia z przedziału $\langle 1;2 \rangle$ charakteryzuje się nierównościami trajektorii. Nierówności te spowodowane są zmienny współczynnikiem tłumienia. Skutkiem tego jest pojawienie się bifurkacji.

Aby zauważyć występujące bifurkacje wykorzystano opcje zoom, aby powiększyć interesujący fragment wykresu (rys.4).

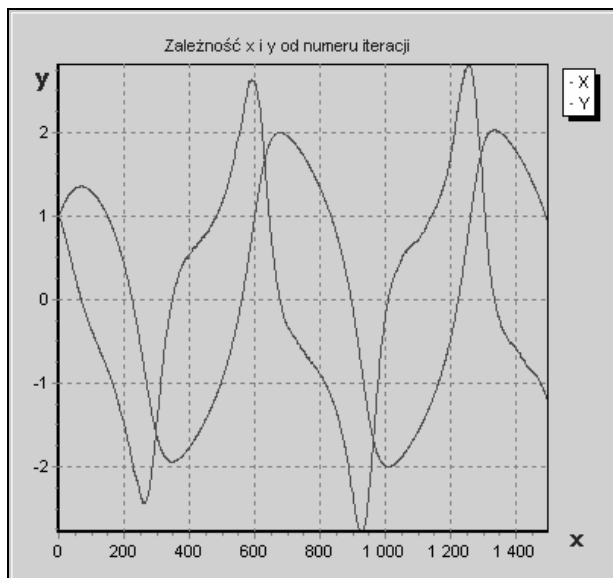


Rys. 5 Powiększony fragment zaznaczony czerwoną ramką na rysunku 16.

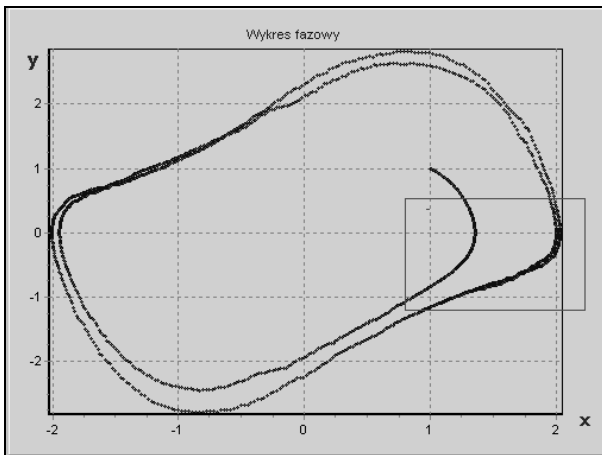
Na rysunku 5 portret fazowy przecina się, co oznacza że przekroczona została granica stabilności układu. Po przybliżeniu możemy zauważyć, że portret przecina się w punkcie $(-1.819,0.447)$ co według tabeli odpowiada współczynnikowi tłumienia równemu $\mu=1,0368$.

Symulacja nr. 2

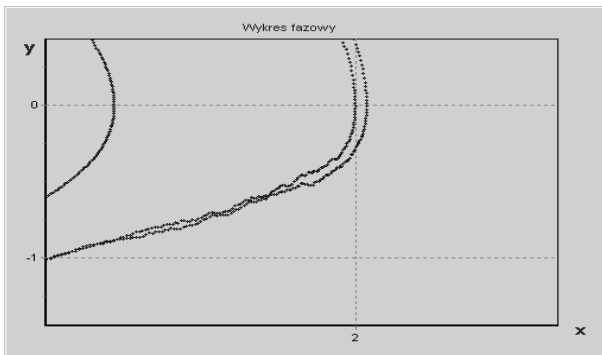
Parametry układu: współczynnika tłumienia losowany z przedziału $\langle 0;2 \rangle$, warunki początkowe $x_0=1$ $y_0= 1$, czas symulacji =15, krok =0,01, ilość iteracji=1500.



Rys. 6 Otrzymany wykres składowych x i y oscylatora vdP



Rys. 7 Portret fazowy oscylatora vdp z parametrem losowym



Rys. 8 Powiększony fragment zaznaczony czerwoną ramką na rysunku 16.

Bifurkacje wystąpiły w punkcie $(1.7634, -0.5974)$ co odpowiada współczynnikowi tłumienia $\mu=1,86056$.

5. PODSUMOWANIE

Najmniejsza losowa wartości współczynnika tłumienia przy której wystąpiły bifurkacje wynosi 0,49. Jest to granica po przekroczeniu której układ traci stabilność. Współczynnik tłumienia w tym układzie losowany był z przedziału $<0;1>$. Im większy przedział, z którego losowany jest współczynnika tłumienia tym jest większe prawdopodobieństwo wystąpienia bifurkacji. Na podstawie przeprowadzonych symulacji możemy stwierdzić, że losowy współczynnik tłumienia wpływa na stabilność układu. W ten sposób można przeprowadzać symulacje układów, w których elementy wraz z upływem czasu tracą swoje pierwotne właściwości. Co może powodować zaburzenia w układzie.

Praktyczne wykorzystanie metod numerycznych już od wielu lat wiąże się maszynami cyfrowymi. Współczesne metody numeryczne są rozwijane z myślą o ich realizacji na maszynach cyfrowych. Wykonanie

obliczeń numerycznych na komputerach tworzy nową klasę problemów. Wynikają one między innymi ze stosowanej arytmetyki. Każda liczba w pamięci komputera jest reprezentowana przez swoje skończone rozwinięcie. W każdym działaniu arytmetycznym powstaje błąd, ponieważ wynik jest również skończonym rozwinięciem. Dlatego nie należy przyjmować wyników bezkrytycznie i uznawać je za poprawne tylko dla tego, że zostały obliczone przez komputer.

Literatura

1. Andrzej Polaczewski, Równania Różniczkowe zwyczajne. Wydawnictwo Naukowo Techniczne, Warszawa 1999.
2. Thompson J.M.T., Steward H. B. Nonlinear Dynamics and Chaos, Wiley & Sons 2002
3. van der Pol, B., van der Mark, J The heart beat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart. Phil. Mag. 1928, 6, 763-775
4. Collatz L.: Metody numeryczne w rozwiązywaniu równań różniczkowych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1982.
5. Jean Degras, Praktyczne metody analizy numerycznej. Wydawnictwo Naukowo Techniczne Warszawa 1974.
6. Kapitaniak T., Wojewoda J., Bifurkacje i chaos, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1994.
7. E. M. Elabbasy, Synchronization of van der Pol oscillator and Chen chaotic dynamical system.
8. Awrejcewicz Jan, Chaos i synchronizacja w układach fizycznych, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997.
9. Awrejcewicz Jan, Tajemnice nieliniowej dynamiki, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1997.

INTERNET

10. http://en.wikipedia.org/wiki/Van_der_Pol_oscillator
11. http://www.its.caltech.edu/~mcc/Chaos_Course/Lesson3/Demos.html
12. <http://mathworld.wolfram.com/vanderPolEquation.html>
13. <http://cyfbar.republika.pl/spistresci.htm>