Studia i Materiały Informatyki Stosowanej, Tom 1, Nr 1, 2009

IDEA SKIEROWANYCH LICZB ROZMYTYCH - OBSERWACJA ROZMYTA

Dorota Wilczyńska-Sztyma

Uniwersytet Kazimierza Wielkiego
Instytut Mechaniki Środowiska i Informatyki Stosowanej
doktorantka
ul. Chodkiewicza 30, 85-064 Bydgoszcz
email: dorotaws@ukw.edu.pl

Streszczenie: *Niniejsze opracowanie ma stanowić przyczynek do szerszej refleksji nad sensem powstania skierowanych liczb rozmytych (ang. Ordered Fuzzy Numbers). Przykłady te mają przekonać nie tylko do nowatorskiego podejścia do algebry rozmytej, ale także ukazać sens istnienia skierowania.*

Słowa kluczowe: *: Skierowane liczby rozmyte, obserwacja rozmyta, logika rozmyta*

The idea of ordered fuzzy numbers – fuzzy observation

Abstarct: *This paper is intended to represent a valuable contribution to broader reflection on the sense of creating Ordered Fuzzy Numbers. Presented examples are aimed at making others warm to the innovative attitude towards fuzzy algebra but also at showing the sense of ordering itself.*

Keywords: *Ordered fuzzy numbers, fuzzy observation, fuzzy logic*

1. WSTĘP

Człowiek często stosuje pojęcia nie ostre i nie precyzyjne jak "wysoka jakość materiału", „niski wzrost gospodarczy", „średnie zasolenie" itp. Choć nie zawierają w sobie danych liczbowych dla innego człowieka są rozumiane jednoznacznie. Koncepcja zbiorów rozmytych jest jedną z dziedzin sztucznej inteligencji. Teoria ta w szczególny sposób przydatna jest w przypadku systemów, w których czynnik ludzki odgrywa zasadniczą rolę. Należą do nich ekonomia, medycyna, socjologia, teoria podejmowania decyzji, ale także dziedziny techniki. Jest pewnego rodzaju tłumaczem języka nieprecyzyjnych i nie ostrych pojęć na język liczb.

2. SKIEROWANE LICZBY ROZMYTE

Model skierowanych liczb rozmytych został zaproponowany przez prof. W. Kosińskiego, dr. P. Propokowicza oraz dr. D. Ślęzaka w 2002 roku. Założeniem ich było wyeliminowanie wad klasycznej algebry liczb rozmytych opartej na zasadzie rozszerzania według prof. L. Zadeha. Wady te to przede wszystkim: zwiększanie rozmytości przy wykonywaniu kolejnych działań, brak możliwości wnioskowania wstecz oraz duże skomplikowanie obliczeniowe. W dalszej części artykułu będzie używany skrót OFN (ang. Ordered Fuzzy Numbers) na określenie skierowanych liczby rozmytych. By móc prowadzić rozważania na temat idei skierowanych liczb rozmytych należy przybliżyć ich definicję.

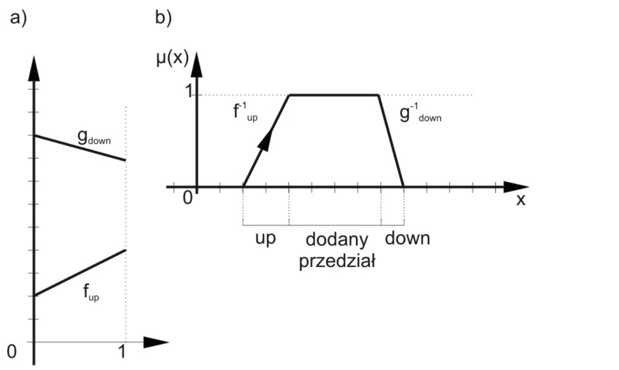
Definicja 1 *Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę (f, g) funkcji takich że*

$f, g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe.

Funkcje te nazywają się odpowiednio: częścią (ramieniem) up i częścią down. Funkcje f i g są połączone przedziałem (const) zawierającym się pomiędzy [f (1) , g(1)] i równym 1. Granice funkcji oznacza się up = (lA,1-A) oraz down = (1+A,pA).

Granice te są liczbami rzeczywistymi. Nie muszą one być właściwe. Znaczy to tyle, że nie muszą spełniać warunku lA ≤1 -A oraz 1+A≤ pA (rys. 3). Przyporządkowuje się kolejno:

$$l_A := f(0),\ 1^-_A := f(1),\ 1^+_A := g(1),\ p_A := g(0)$$

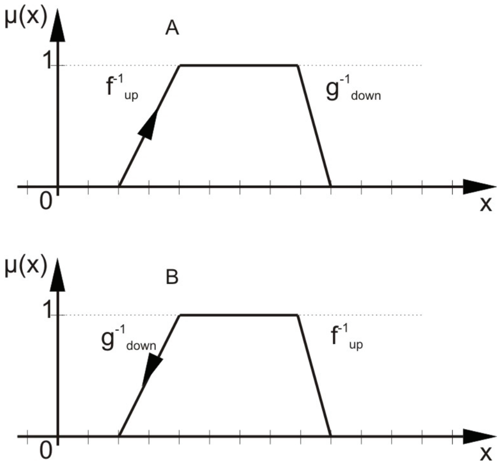


Rys. 1 a) *Interpretacja graficzna OFN,* **b)** *OFN przedstawiona w sposób nawiązujący do klasycznych liczb rozmytych z dodatkową strzałka ukazującą skierowanie (orientację) liczby.*

Skierowaniem liczby rozmytej nazywa się uporządkowanie funkcji f i g tak, że funkcja f jest początkiem OFN, zaś g końcem tej liczby (porównaj rys. 2). W zależności od skierowania OFN można podzielić na dwa typy:

- skierowane liczby rozmyte o orientacji pozytywnej wtedy, gdy kierunek OFN jest zgodny z kierunkiem osi X liczb rzeczywistych. Dla właściwej OFN o orientacji pozytywnej przyporządkowuje się kolejno:
  $l_A := f(0),\ 1^-_A := f(1),\ 1^+_A := g(1),\ p_A := g(0)$

- skierowane liczby rozmyte o orientacji negatywnej wtedy, gdy kierunek OFN jest przeciwny do kierunku osi X liczb rzeczywistych. Dla właściwej OFN o orientacji negatywnej przyporządkowuje się kolejno:
  $l_A := g(0),\ 1^-_A := g(1),\ 1^+_A := f(1),\ p_A := f(0)$



Rys. 2 *OFN A i B z tym samym kształtem funkcji, lecz o przeciwnym skierowaniu.*

Żeby w odpowiedni sposób przedstawić innowacje, należy przyjrzeć się możliwością jakie daje algebra OFN. Zasady podstawowych działań zostaną przybliżone niżej. Niech $A=(f_A, g_A)$, $B=(f_B, g_B)$, $C=(f_C, gC)$ będą skierowanymi liczbami rozmyty wtedy:

- suma C=A+B
  $f_C = f_A + f_B,\ g_C = g_A + g_B$
- różnica C=A-B
  $f_C = f_A - f_B,\ g_C = g_A - g_B$
- iloczyn C=A*B
  $f_C = f_A * f_B,\ g_C = g_A * g_B$
- iloczyn przez skalar C=A*r
  $f_C = r * f_A,\ g_C = r * g_A$
- iloraz C=A/B
  $f_C = f_A / f_B,\ g_C = g_A / g_B$

W przeciwieństwie do klasycznych liczb rozmytych rezultatem operacji na OFN nie zawsze jest liczba o większym nośniku. Wykonując operację arytmetyczną można otrzymać liczbę, której nośnik jest nieskończenie mały, interpretuje się ją jako liczbę rzeczywistą. Taka liczba nazywa się singletonem, tak jak w klasycznych liczbach rozmytych i traktuje się ją jako wyjątkowy przypadek liczby skierowanej rozmytej.

$$A-A=0 \text{ oraz } A*1/A=1$$

Tak jak w arytmetyce liczb rzeczywistych, analogiczne operacje na OFN są przemienne jaki łączne oraz mnożenie jest rozłączne względem dodawania. Co nie było takie oczywiste dla algebry klasycznych liczb rozmytych opartej na zasadzie rozszerzania. Dzięki temu jest się w stanie rozwiązać równania, które nie miało rozwiązania dla klasycznych liczb rozmytych.

$$X=C-A$$

Używanie liczb OFN w przeciwieństwie do klasycznych liczb rozmytych nie zwiększa nośnika kolejnych wynikowych liczb. Dzięki temu mogą one przechodzić przez wiele operacji nie tracąc przy tym na dokładności. Dają one przy tym możliwość wnioskowania wstecz. Dodatkowo idea skierowanych liczb rozmytych łączy w sobie operowanie na liczbach rozmytych jak i rzeczywistych.

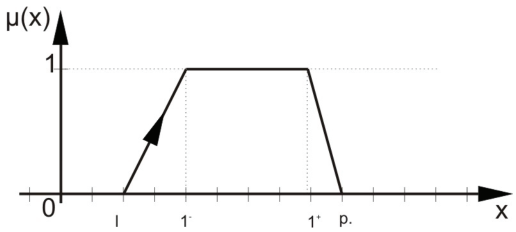
3. OBSERWACJA ROZMYTA

Codziennie jest się obserwatorem procesów zachodzących w otoczeniu: natężenie ruchu samochodów w mieście, rotacja towaru w sklepie. Każdy z tych procesów jest trwający w czasie. Patrząc z perspektywy czasu, wschód i zachód słońca w stosunku do natężenia promieniowania słonecznego są sobie przeciwne. W kolejnych jednostkach czasu obserwuje się zdarzenia, którym przypisuje się oceny w skali [0,1]. Obserwację taką i zmiany w czasie można nazwać obserwacją rozmytą. Czas lub też monotoniczność (narastanie, zanikanie) zjawiska może byś dla projektanta systemu decydującym czynnikiem wpływającym na skierowanie liczb w jego projekcie.

W obserwacji rozmytej istnienie czasu może być wykorzystane jako możliwość wyboru parametru dla przedstawienia krzywej przynależności skierowanej liczby rozmytej w postaci parametrycznej. Jeśli para funkcji ciągłych (*f, g*) reprezentuje skierowaną liczbę rozmytą *A*, to przy wyborze *t* jako parametru czasu obserwacji rozmytej, której wynikiem jest *A*, można byłoby przedstawić krzywą przynależności odpowiadającej liczbie *A* w postaci pary funkcji:

$$x=\hat{x}(t),\ y=\hat{y}(t),\ t\in[t_0,t_f]$$
$$t_{1-}\le t_{1+}$$
$$\hat{y}(t_{1-})=\hat{y}(t_{1+})=\hat{y}(t)=1,\ t\in[t_{1-},t_{1+}]$$
$$f(\hat{y}(t))=\hat{x}(t)=\hat{y}(t),\ \text{gdy}\ t\in[t_0,t_{1-}]$$
$$g(y(t))=x(t),\ \text{gdy}\ t\in[t_{1+},t_f]$$

Przedstawione zostanie kilka przykładów, które dowodzą sensu zaistnienia OFN nie tylko jako obiektów matematycznych, ale również jako pewnych prognoz, tendencji, ocen, parametrów. W przykładach posłużono się modelem liczb trapezoidalnych i trójkątnych - funkcje *f* i *g* są funkcjami liniowymi (rys. 1, 2, 3).

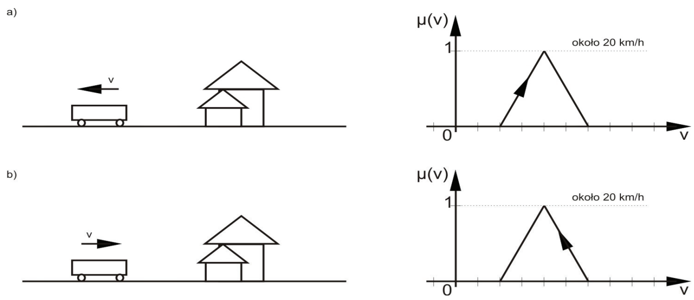


Rys. 3 *Trapezoidalna OFN.*

Każdą trapezoidalną OFN można opisać za pomocą charakterystycznych punktów (granice te opisano powyżej): l, $1^-, 1^+, p$ (rys. 3), gdzie punkt l zawsze znajduje się z lewej strony danej liczby niezależnie od jej skierowania. By jednak uwidocznić skierowanie używany będzie zapis dla liczby o orientacji dodatniej (*f(0), f(1), g(1), g(0)*) oraz dla OFN o orientacji ujemnej (*g(0), g(1), f(1), f(0)*). W podobny sposób są traktowane trójkątne OFN, z tym, że punkty 1^- oraz 1^+ są sobie równe. W ich przypadku zapis zostanie ograniczony do następujących trzech liczb (*f(0), f(1), g(0)*).

Przykład 1

Rozważany będzie przypadek, w którym obserwator znajdujący się na pewnym dworcu szacuje, że pociąg porusza się z prędkością *v=około 20 km/h.* Jednak to nie jest wystarczająca informacja. Dla obserwatora ważne jest również czy pociąg będzie się zbliżał, czy oddalał od dworca (rys. 4), czy uciekł mu, czy dopiero nadjeżdża.



Rys. 4 *Pociąg a) oddalający się*

b) zbliżający się od dworca z prędkością około 20 km/h

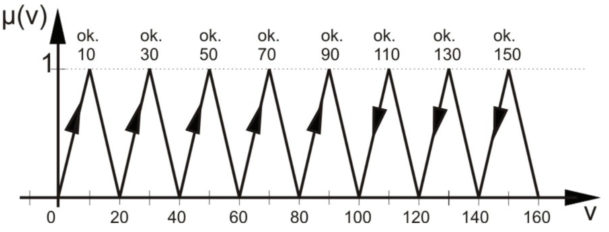
Chcąc zapisać prędkość jako klasyczną liczbę rozmytą nie ma możliwości zaznaczenia w jakim kierunku postępuje ruch. OFN dają tę możliwość w postaci skierowania. Skierowanie jest tu prognozą co się wydarzy w następnej chwili czasu czy odległość od dworca będzie rosła czy malała. Dzięki OFN, obserwator może nie tylko oceniać, w jakim stopniu uznaje prawdziwość rozpatrywanego zjawiska, ale także wyrazić swoją ocenę dotyczącą jego dynamiki.

Przykład 2

Rozważony zostanie uproszczony model działania tempomatu. Jest to urządzenie pozwalające na utrzymywanie określonej prędkości, bez znaczenia czy pojazd porusza się po płaskiej czy też pochyłej nawierzchni. Dzięki niemu prowadzący pojazd nie musi naciskać pedału przyspieszenia, ponieważ odbywa się to automatycznie. Rozważone zostanie sens użycia skierowanych liczb do sterowania, które się odbywa w tym urządzeniu, co za tym idzie przyspieszeniem bądź hamowaniem pojazdu. Oczywiście rozważany przykład jest teoretyczny.

Rozważone będzie osiem OFN obranych dla kontinuum prędkości w przypadku, w którym prędkość jest mierzona z dokładnością do 0,2 km/h. Będą one wyglądały następująco: *około 10 (0, 10, (20,1)), około 30 (20, 30, (40,1)), około 50 (40, 50, (60,1)), około 70 (60, 70, (80,1)), około 90 (80, 90, (100,1)), około 110 (100, 110, (120,1)), około 130 (120, 130, 140).* Wszystkie OFN będą na początku tego samego dodatniego skierowania. Zbiory liczb się pokrywają w pewnym zakresie, by uniknąć sytuacji, w której wystąpi wartość prędkości z pomiędzy nich, dla której minimalna wartość funkcji przynależności do każdego z nich była by równa zero. Zakres tych nałożeń jest mniejszy niż dokładność odczytu co daje w rezultacie to, iż każda wartość odczytywanej prędkości będzie należała tylko do jednej OFN z przedziału (0, 140).

W pewnym momencie prowadzący pojazd wybrał prędkość z jaką chciałby się przemieszczać na 100 km/h. Skierowanie wszystkich OFN położonych powyżej tej wartości prędkości zmieniło kierunek na przeciwny do pozostałych (rys. 5). O tej chwili przedstawiają się następująco: *około 110 ((120,1), 110, 100), około 130 (140, 130, 120).*



Rys. 5 *OFN założone dla prędkości pojazdu.*

Baza reguł oparta na wnioskowaniu typy Uogólniony Modus Ponens przedstawia się następująco:
1. jeśli v jest *około 10 (0, 10, 20,1)* to a jest $5m/s^2$;
2. jeśli v jest *około 30 (20, 30, 40,1)*to a jest $4m/s^2$;
3. jeśli v jest *około 50 (40, 50, 60,1)* to a jest $3m/s^2$;
4. jeśli v jest *około 70 (60, 70, 80,1)*to a jest $2m/s^2$;
5. jeśli v jest *około 90 (80, 90, 100,1)* to a jest $1m/s^2$;
6. jeśli v jest *około 110 (120,1, 130, 100)* to a jest $-1m/s^2$;
7. jeśli v jest *około 130 (140, 130, 120)* to a jest $-2m/s^2$.

Jeśli wartość prędkości pojazdu będzie się zawierać w OFN o skierowaniu dodatnim to przyspieszenie a będzie przybierało wartości dodatnie zaś jeśli wartość prędkości będzie się zawierać w OFN o skierowaniu dodatnim to przyspieszenie a będzie przybierało wartości ujemne. Wartość przyspieszenia liczb *około 90* i *około 110* oraz liczb *około 70* i *około 130* będzie przybierała tą samą wartość, ale inny znak. Skierowania interpretowane jest w tym przypadku jako wyznacznik znaku wartości funkcji pierwotnej po czasie. Informuje ono z góry jaki znak będzie przybierało przyspieszenie *a,* krótko mówiąc w przypadku samochodu znaczyło by to tyle, który pedał automat ma docisnąć: gazu czy hamulca.

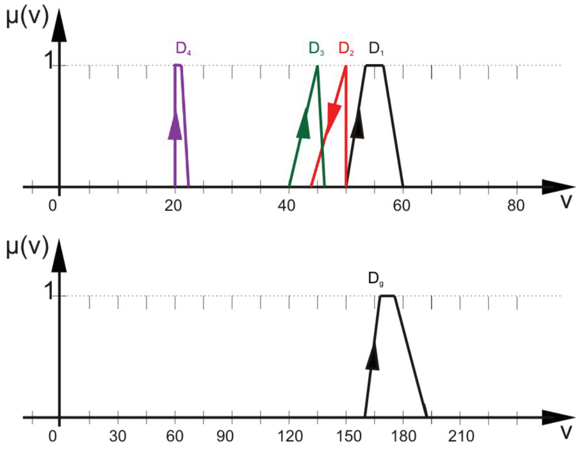
Przykład 3

Dotyczy dziedziny, z którą każdy ma coś wspólnego czyli finansów. Próby zastosowania OFN w ekonomi można znaleźć w publikacji [3], gdzie przeanalizowano model Leontiewa przy użyciu OFN dla opisu współrzędnych wektora produkcji całkowitej. Przybliżony tu model będzie prostszy w interpretacji.

Tabela 1 Zestawienie kosztów i przychodów

M*(i)*	Przewidywany przychód *(P_i)*	Przewidywane koszty *(K_i)*	Przewidywany dochód *($D_i = P_i - K_i$)*
1	(100, 108, 116, 130)	(50, 55, 60, 70)	(50, 53, 56, 60)
2	(120, 130, 140, 145)	(70, 80, 90, 101)	(50, 50, 50, 44)
3	(80, 75, 70, 60)	(40, 30, 25, 22)	(40, 45, 45, 46)
4	(105, 100, 96, 92)	(85, 80, 75, 70)	(20, 20, 21, 22)
Obliczony dochód globalny			(160, 168, 172, 194)

Teoretyczna firma posiada sieć czterech marketów. Zostały one ponumerowane $i=1, 2, 3, 4$. Na sprzedaż globalną D_g firmy składa się przychód ze sprzedaży produktów P_g minus koszty K_g tj.: cena zakupu produktu, transport, pensje pracownicze, opłaty medialne, reklama itp. Eksperci uwzględniając wiele czynników w tym tendencję do wzrostów i spadków mają oszacować przyszłoroczne koszty i przychody pojedynczych marketów, z których zostaną obliczone dochody D_1, D_2, D_3, D_4, które po zsumowaniu dadzą przypuszczalny przyszłoroczny dochód globalny D_g. Ich ocena nie jest precyzyjna mieści się w różnych przedziałach i aby obliczyć przewidywalny globalny dochód firmy wydaje się sensownym użycie OFN do zobrazowania przychodów i kosztów każdego z marketów podany w milionach zł (tabela1).



Rys. 6 *Przewidywane dochody poszczególnych marketów oraz dochód globalny.*

Interpretacja dla pierwszej dwójki marketów dla przychodów i kosztów jest następująca:
l - jest wyjściowym punktem dla których prognozowane przychody i koszty mają wzrosnąć;

$(l,1^-)$ - mówi o przewidywanym wzroście przychodów i kosztów. Gdyby koszty mieściły by się w tym przedziale choć niskie według ekspertów mogły by nie starczyć na wszystkie potrzeby. W tym przedziale przychody nie daje zadowalających rezultatów, ale istnieje przypuszczenie, że będą w czasie przynosiły lepsze rezultaty ;

$(1^-,1^+)$ - informuje o spodziewanych optymalnych parametrach przychodów i kosztów

$(1^+,p)$ – mówi o sytuacji przychody w opinii ekspertów będą powodować większe koszty i zmniejszenie się opłacalności produkcji, zaś koszty będą tak duże że opłacalnym było by ich pominięcie;
p – jest to maksymalny poziom kosztów i przychodów jaki może być osiągnięty.

Dla marketów nr: 3 oraz 4 interpretacja tych przedziałów jest inna:
p – w opinii ekspertów jest punktem wyjściowym dla marketów, w których zakładane są zmniejszone koszty i przychody;

$(1^+, p)$ – prognozowane przychody co za tym idzie część kosztów mają zmaleć, jednak bilans ich daje pozytywne perspektywy;

$(1^-, 1^+)$ - tak jak dla poprzednich dwóch marketów zawiera informuje o spodziewanych optymalnych parametrach przychodów i kosztów;

$(l, 1^-)$ - informuje sytuacji w której większy spadek kosztów daje również duży spadek przychodów co nie jest pozytywną perspektywą;
p - najmniejsze wartości przychodów i kosztów jakie są brane pod uwagę przez ekspertów.

Należy zauważyć że przychody i koszty marketów nr *1* i *2* są liczbami o orientacji pozytywnej zaś pozostałych o orientacji negatywnej (rys. 6). Nie koniecznie ma to wpływ na skierowanie dochodu przykładem staje się sytuacji marketu nr 2, gdzie dochód otrzymany został w postaci OFN skierowanej ujemnie. Choć P_2 i K_2 są dodatnie to koszty rosną szybciej niż przychody co daje spadek dochodu tego w stosunku to punktu jaki obrano za wyjściowy i jest zgodne z intuicją. Można zauważyć również że największy wpływ na D_g ma market 1, nie tylko ze względu na wielkość kwot na jakich pracuje, ale również ze względu na szerokość nośnika.

Przychody i koszty eksperci starali się dobrać tak by w przyszłym roku otrzymać dochód globalny X_g w postaci OFN skierowanej pozytywnie. Ważna jest tu interpretacja skierowania jako tendencji wzrostowej dochodu globalnego. Informacja, że X_g będzie miał tendencję do wzrostu i będzie oscylował w granicach 160 do 194 milionów zł jest więc informacją pozytywną.

Przykład ten pokazuje proste i zgodne z intuicją zastosowanie OFN w modelach ekonomicznych, gdzie istnieje wiele zależności i wpływów zewnętrznych i wewnętrznych na pewne komórki gospodarcze do tego stopnia, iż nawet grupa ekspertów w danej dziedzinie nie jest wstanie dokładnie przewidzieć pewnych sytuacji (kryzys). Wielkim plusem OFN niewielka szerokość nośnika wyniku co umożliwi interpretację bez zbędnych w tym wypadku procedur wyostrzania. Ważną zaletą jest nie tylko zawieranie informacji o sytuacji w danym czasie, ale również pojawienie się parametru umożliwiającego odczytanie tendencji w czasie, które w tym przykładzie musieli uwzględnić eksperci.

4. WNIOSKI I PODSUMOWANIE

Skierowane liczby rozmyte są odpowiedzią na częste zarzuty wytaczane przeciw klasycznym liczbą rozmytym takim jak: zwiększanie rozmytości przy wykonywaniu kolejnych działań, brak możliwości wnioskowania wstecz oraz duże skomplikowanie obliczeniowe. Mają swoją nowatorską algebrę zachowując przy tym całą idee zbioru rozmytego. Dzięki temu mogą one przechodzić przez wiele operacji nie tracąc przy tym na dokładności. Dają one przy tym możliwość wnioskowania wstecz. Wykonując operację arytmetyczną można otrzymać liczbę, której nośnik jest nieskończenie mały, interpretuje się ją jako liczbę rzeczywistą. Można więc rozwiązywać zadania, w których część danych jest skierowanymi liczbami rozmytymi a część liczbami rzeczywistymi. Tak jak w arytmetyce liczb rzeczywistych, analogiczne operacje na OFN są przemienne, łączne oraz mnożenie jest rozłączne względem dodawania. Dzięki temu jest się w stanie rozwiązać równania, które nie miało rozwiązania dla klasycznych liczb rozmytych.

Ważnym aspektem w rozważaniach nad skierowanymi liczbami rozmytymi jest obserwacja rozmyta. Istnienie czasu może być wykorzystane jako możliwość wyboru parametru dla przedstawienia krzywej przynależności skierowanej liczby rozmytej w postaci parametrycznej. Czas lub też monotoniczność (narastanie, zanikanie) zjawiska może byś dla projektanta systemu decydującym czynnikiem wpływającym na skierowanie liczb.

W przykładach podano kilka możliwości interpretacji skierowania. Rozważane było jako wyznacznik kierunku ruchu, wyznacznik znaku wartości funkcji pierwotnej po czasie oraz pewnej tendencji. Dzięki skierowanym liczbom rozmytym, ekspert może nie tylko oceniać, w jakim stopniu uznaje prawdziwość rozpatrywanego zjawiska, ale także wyrazić swoją ocenę dotyczącą jego dynamiki.

Literatura

1. Driankov D., Hellendoorn H., Reinfrank M., Wprowadzenie do sterowania rozmytego, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996
2. Łachwa A., Rozmyty świat zbiorów, liczb, relacji, faktów reguł i decyzji, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT Warszawa 2001
3. Kacprzak D., Analiza modelu Leontiewa z użyciem skierowanych liczb rozmytych Politechnika Białostocka Wydział Informatyki Katedra Matematyki http:// 212.33.90.158/terw2008/archives/terw2007 /resources/articleskacprzak _terw2007.pdf
4. Kosiński W., On Fuzzy Number Calculus, Int. J. Appl. Math. Comput.Sci., 2006, vol 16, no. 1, pp. 51-57
5. Kosiński W., On fuzzy number calculus Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2006, vol. 16, no. 1, pp. 51–57
6. Kosiński W., Prokopowicz P., Algebra liczb rozmytych, Matematyka Stosowana, 5 (46), pp. 37-63, 2004
7. Kosiński W., Prokopowicz P., Ślęzak D., (2005), Calculus with fuzzy numbers, Proc. Intern.Workshop on Intelligent Media Communicative Intelligence, Warszawa, September, 2004, L.Bolc, T. Nishida, Z. Michalewicz,(eds), LNCS, Springer, Heidelberg, 2005
8. Piegat A., Modelowanie i sterowanie rozmyte, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT Warszawa 1999
9. Prokopowicz P., Algorytmizacja działań na liczbach rozmytych i jej zastosowania, rozprawa doktorska, IPPT PAN, 2005
10. Rutkowski L., Metody i techniki sztucznej inteligencji, Inteligencja obliczeniowa, Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 2006
11. Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L., Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte, Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa, Łódź 1999
12. Wilczyńska- Sztyma D., Pewne aspekty sterowania w rozumieniu skierowanych liczb rozmytych w środowisku MATLAB, Praca magisterska, napisana pod kierunkiem prof. dra hab. W. Kosińskiego, Bydgoszcz 2007
13. Zadeh L. A.(1965), Fuzzy sets, Information and Control, 8(3), pp. 338–353.
14. Zieliński J.S., Bartkiewicz W. Inteligentne systemy w zarządzaniu. Teoria i praktyka, Pod redakcją Zieliński J.S. Wydawnictwo Naukowe PWN Warszawa 2000