

---

ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ W BYDGOSZCZY

STUDIA PEDAGOGICZNE z. 17

Pedagogika Przedszkolna i Wczesnoszkolna 1990 /5/

---

JOLANTA MAKAREWICZ

WSP w Bydgoszczy

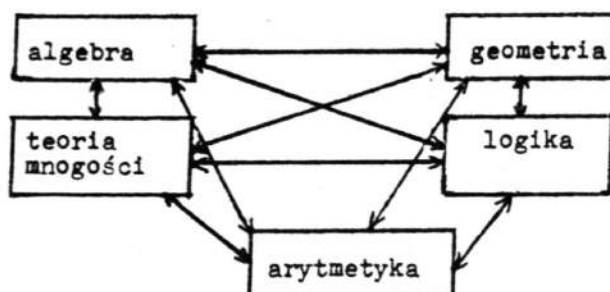
KORELACJA GEOMETRII Z INNYMI DZIAŁAMI MATEMATYKI W NAUCZANIU  
POCZĄTKOWYM

### 1. Wprowadzenie

Reforma nauczania początkowego matematyki ma charakter wielokierunkowy. Obejmuje treści nauczania, jak i w znacznym stopniu metody nauczania. Obowiązujący obecnie program matematyki klas I - III reprezentuje tendencje nowatorskie. Wprowadza bowiem już od klasy pierwszej te elementy treści współczesnej matematyki, które wiążą się bezpośrednio i konsekwentnie z arytmetyką. Są to elementy teorii mnogości /nauka o zbiorach i relacjach/, algebry /zapisy literowe, równania z jedną niewiadomą/, elementy logiki matematycznej oraz geometrii<sup>1</sup>.

Na poziomie nauczania początkowego teoria zbiorów nie jest przedmiotem nauczania, a stosowanie jej ogranicza się do elementarnych wiadomości o zbiorach i relacjach, jakie są niezbędne w przygotowaniu dzieci do opanowania ze zrozumieniem pojęcia liczby naturalnej i działań na tych liczbach. Elementy teorii mnogości znajdujemy również w geometrii i jej mnogościowym ujęciu. Geometria ma również swój związek z arytmetyką i algebrą np. w określaniu długości odcinków, w przygotowaniu intuicyjnym pojęcia pola i obwodu figur płaskich. Do arytmetyki wprowadza się takie elementy treści algebraicznych, jak zapisy literowe, równania z jedną niewiadomą dla kształtowania u uczniów form rozumowań właściwych algebrze szkolnej.

Poniższy schemat ukazuje wzajemne powiązanie występujących w matematyce wczesnoszkolnej gałęzi matematyki.



Rys. 1. Schemat korelacji wewnątrzprzedmiotowej matematycznych treści kształcenia

Te powiązania różnych gałęzi matematyki określane są we współczesnej dydaktyce terminem "korelacja". Termin ten rozumiany jest jako wzajemne powiązanie treści nauczania jednego przedmiotu, jak również jako merytoryczne wiązanie ze sobą treści różnych przedmiotów nauczania i tworzenia z nich układów integrujących<sup>2</sup>.

W przypadku związków treści nauczania w obrębie jednego przedmiotu mamy do czynienia z korelacją wewnątrzprzedmiotową czyli pionową, natomiast wiązanie ze sobą treści z różnych przedmiotów nauczania określane jest korelacją międzyprzedmiotową - poziomą<sup>3</sup>.

Konstrukcja programu nauczania matematyki uwzględnia powiązanie między poszczególnymi działami matematyki. Mamy tu do czynienia z tzw. korelacją statyczną. Jeżeli nauczyciel dąży do osiągnięcia optymalnych wyników uczenia się ucznia i świadomie wykorzystuje korelację statyczną, to całokształt jego zamierzeń i działań określamy korelacją dynamiczną czyli operatywną<sup>4</sup>.

Działalność nauczyciela zmierzającego do opracowania korelacji operatywnej można ująć w następujące fazy jego czynności:

- opracowanie planu wykorzystania korelacji statycznej poszczególnych treści przedmiotu nauczania,
- realizowanie planów korelacyjnych w procesie dydaktyczno - wychowawczym,
- korelowanie planów korelacji operatywnej.

Odzwierciedleniem istniejących korelacji statycznych w matematyce jest rozkład materiału, według którego nauczyciel realizuje założenia programowe w nauczaniu matematyki. Dokonana przeze mnie analiza 32 takich rozkładów /przeprowadzona w 1985

roku/ opracowanych przez nauczycieli matematyki uczących w klasach I - III dała mi podstawę do wysunięcia wniosku, że geometria w nauczaniu początkowym opracowywana jest często jako odrębny dział matematyki. Mimo że program nauczania sugeruje, iż zagadnienia geometryczne powinny być odpowiednio wplątane między arytmetyczne<sup>4</sup>, praktyka wskazuje jednak na blokowe traktowanie tej dziedziny wiedzy matematycznej. Przy tak realizowanym programie, uczeń styka się z zagadnieniami geometrycznymi tylko jednorazowo, nie następuje w tym przypadku utrwalenie wiedzy przez powtarzanie i ćwiczenia co nie pozostaje bez wpływu na trwałość wiedzy. Uczniowie traktują geometrię jako zupełnie odrębną dziedzinę wiedzy. Taki stosunek uczniów jest pogłębiany przez podobne nastawienie nauczycieli do tej dyscypliny matematycznej.

Rezultatem takiego nauczania będą wiadomości mętne, nieoperatywne, oparte na sztywnych schematach nie posiadających ani struktury, ani ścisłości rozumowań.

Poniżej dla przykładu przedstawiona została korelacja operacyjna między treściami geometrycznymi i pozostałymi działami matematyki w klasie III.

Rys.2. Schemat ukazujący korelację operacyjną między geometrią i arytmetyką w programie klasy III

treści arytmetyczne	treści geometryczne
1. Powtórzenie numeracji w zakresie 100 i 1000, dodawanie odejmowanie w zakresie 100 i 1000	1. Odróżnianie odcinków od linii krzywych
2. Rozwiązywanie równań typu: $x+a=b$ , $a+x=b$ , $x-a=b$ , $a-x=b$ , $ax-b=c$	2. Konstruowanie różnorodnych figur w sieci kwadratowej i badanie ich własności.
3. Mnożenie liczb jednocyfrowych w zakresie 1000	3. Ćwiczenia związane z intuicyjnym rozumieniem pojęcia prostej
4. Porównywanie ilorazowe	4. Rozpoznawanie odcinków i ścian prostopadłych oraz odcinków i ścian równoległych w otoczeniu, na modelach i rysunkach /pozioma, pionowa, ukośna, pochyła/
5. Rozwiązywanie równań odpowiadającym zadaniom tekstowym o dwóch działaniach typu $ax+b=c$	5. Rysowanie odcinków równoległych i odcinków prostopadłych za pomocą szablonów.
6. Ułamki o mianownikach nieprzekraczających 10	6. Mierzenie długości odcinków i obliczanie długości łamanej, obwodu trójkąta i prostokątów.
7. Wyrażenia dwumianowe i ułamki dziesiętne	7. Kreślenie odcinków i prostokątów w skali np. 1:2, 2:1, 1:4, 4:1, 1:1
	8. Pogłębienie i rozszerzenie wiadomości o miarach długości-ćwiczenia związane z mierzeniem odcinków z daną dokładnością: m, cm.

## 2. Organizacja badań własnych

Zasadniczym celem przeprowadzonych badań była próba ustalenia efektów zdobywania wiedzy geometrycznej w powiązaniu z innymi działami matematyki.

Uwzględniając teoretyczne i wynikające z praktyki szkolnej wnioski sformułowano następujący problem badawczy: czy i na ile możliwe jest nauczanie geometrii w klasach I - III w powiązaniu z innymi działami matematyki?

Dla rozwiązania problemu przyjęto następującą hipotezę roboczą: uwzględnienie wewnątrzprzedmiotowej korelacji treści geometrycznych z innymi działami matematyki wpłynie dodatnio na poziom wiedzy geometrycznej, a ponadto na nauczanie matematyki uczniów na szczeblu początkowym. Przedmiotem badań była wiedza geometryczna uczniów młodszych.

Stąd też wynikają dwa rodzaje zmiennych:

- zmienna niezależna - realizacja planowanego materiału /rozkład materiału/, w którym uwzględnione zostały powiązania geometrii z innymi działami matematyki,
- zmienna zależna - efekty dydaktyczne uzyskane dzięki wprowadzeniu zmiennej niezależnej w zakresie wiedzy geometrycznej.

Jako metodę wiodącą badań przyjęto eksperyment, który został przeprowadzony w roku szkolnym 1985/86. Wprowadzenie jego w celu zweryfikowania ustalonej wcześniej hipotezy roboczej poprzedzone zostało czynnościami przygotowawczymi:

- przygotowanie narzędzi badawczych,
- dobór grup porównawczych i eksperymentatorów,
- przygotowanie nauczycieli do prowadzenia eksperymentu,
- przeprowadzenie badań wstępnych /sprawdzian wiedzy geometrycznej I etap badań/.

Następnie przeprowadzony został eksperyment, który trwał przez cały rok szkolny. Eksperymentujący nauczyciele realizowali program matematyki w klasach I - III w oparciu o eksperymentalne rozkłady materiału, które uwzględniały żądany układ treści /zgodnie z założeniami korelacji wewnątrzprzedmiotowej/ oraz podział godzinowy. Metody i środki nauczania były podobnie stosowane jak w klasach kontrolnych.

albowiem eksperyment ten był przeprowadzony techniką grup równoległych w oparciu o kanon jedynej różnicy.

Bezpośrednio po zakończonym eksperymencie przeprowadzono sprawdzian wiedzy geometrycznej /II etap badań/, a trwałość jej sprawdzono w badaniu dystansowym w trzy miesiące po zakończeniu eksperymentu /III etap badań/.

Ilościowy udział uczniów w poszczególnych etapach badań przedstawia tabela 1.

Tabela 1. Ilościowy udział uczniów w poszczególnych etapach badań

klasy	liczba oddziałów	I etap badań		II etap badań		III etap	
		liczba uczniów		liczba uczniów		liczba ucz.	
		E	K	E	K	E	K
I	2	22	14	21	14	20	14
II	2	26	28	26	27	25	27
III	2	31	18	30	18	22	18
razem	6	79	60	77	59	67	59

E - oznaczenie klas eksperymentalnych

K - oznaczenie klas kontrolnych

Zmienna liczba uczniów badanych wynika z absencji dzieci w czasie przeprowadzania kolejnych etapów badań.

Dobór klas porównawczych poprzedzony został badaniem ilorazu inteligencji dzieci testem Ravena. Ustalone w ten sposób klasy porównawcze pochodziły ze szkół małopomorskich województwa bydgoskiego /w Pruszczu Pomorskim, Czersku i Nakle n/Notecią/, o zbliżonej organizacji tych szkół oraz o podobnym wyposażeniu w pomoce dydaktyczne, a prowadzący eksperyment nauczyciele byli studentami studiów zaocznych WSP w Bydgoszczy.

#### 4. Analiza wyników badań

Pierwszy etap badań, którego wyniki miały ukazać poziom wiedzy geometrycznej dzieci w poszczególnych klasach był przeprowadzony przed rozpoczęciem eksperymentu. Sprawdzian wiedzy obejmował zagadnienia geometryczne przewidziane programem danej klasy. Tak więc wyniki tegoż badania dały odpowiedź na pytanie: z jakim zasobem wiadomości i umiejętności geometrycznych przystępuje uczeń do systematycznej nauki szkolnej. Kolejne etapy - II i III badań pozwalały określić, w jakim stopniu wiedza geometryczna uczniów w poszczególnych klasach uległa rozszerzeniu, pogłębieniu i utrwaleniu.

Wyniki z poszczególnych etapów sprawdzania wiadomości i umiejętności geometrycznych przedstawia tabela 2.

Tabela 2. Wyniki uzyskane przez poszczególne klasy przed i po zakończeniu eksperymentu

Klasy	Uzyskane wyniki					
	I etap badań		II etap badań		III etap badań	
	E	K	E	K	E	K
	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$	$\bar{x}$
I	11,77	11,84	23,61	18,72	18,55	15,78
II	21,00	21,75	27,11	24,55	26,60	24,07
III	5,74	11,55	28,06	21,33	28,45	20,72

$\bar{x}$  - średnia ilość punktów

E - klasa eksperymentalna

K - klasa kontrolna

Analizując wyniki ujęte w tabeli 2 należy stwierdzić, że przed rozpoczęciem eksperymentu uczniowie dysponowali już pewnym zasobem wiedzy geometrycznej. W klasie pierwszej uczniowie orientowali się w przestrzeni, potrafili określić położenie przedmiotu w przestrzeni, porównać wielkość określonych przedmiotów, usystematyzować je pod względem określonej cechy. Niewielką natomiast znajomość wykazali w zakresie określania kierunków, położenia przedmiotu wewnątrz

lub zewnątrz innego, oraz rozróżniania prostokąta i kwadratu. Nazwy figur geometrycznych w tej klasie dzieci stosowały poprawnie i umiały je rozpoznawać w ich różnych układach i kompozycjach.

Z tabeli 2 wynika, że znajomość tych zagadnień geometrycznych w klasach eksperymentalnych i kontrolnych była jednakowa.

W klasie drugiej zaobserwować również można dość wysoką znajomość pojęć geometrycznych, które dopiero są przewidziane programem do zrealizowania w tej klasie. Podobnie w klasie eksperymentalnej jak i kontrolnej uczniowie uzyskali zbliżone ilości punktów /E-21,00, K - 21,75 /, co stanowiło 65% maksymalnej ilości punktów. Najwięcej trudności dzieciom w klasie II sprawiało pojęcie prostopadłości i równoległości odcinków i prostych oraz intuicyjne pojęcie pola i obwodu prostokąta. Pozostałe zagadnienia, z którymi uczeń zapoznał się w nauczaniu przedszkolnym, a ugruntował je w klasie pierwszej /tj. nazwami figur i ich rozpoznawaniem, określaniem długości odcinków, orientacją w przestrzeni/ nie sprawiały dzieciom większego kłopotu.

W klasie trzeciej program przewiduje więcej nowych dla ucznia zagadnień geometrycznych, stąd i ich znajomość z życia codziennego jest też i mniejsza. Natomiast w sprawdzianie ujęte zostały wszystkie przewidziane programem klasy III zagadnienia geometryczne. Stąd też wyniki uzyskane przez uczniów w klasach trzecich są znacznie gorsze od wyników w klasach pozostałych. W klasie trzeciej eksperymentalnej uczniowie rozpoczynając naukę geometrii posiadali tylko 12,6% wiedzy przewidzianej programem. W klasie kontrolnej odsetek ten był dwukrotnie większy, bo wynosił 27,6%.

W podsumowaniu etapu pierwszego należy stwierdzić, że w klasach eksperymentalnych poziom wiedzy geometrycznej był nieznacznie niższy niż w klasach kontrolnych.

Dalsza analiza będzie dotyczyła wyników uzyskanych po zakończeniu eksperymentu tj. po wprowadzeniu do praktyki szkolnej czynnika eksperymentalnego /realizacja eksperymentalnego rozkładu materiału, w którym uwzględniono powiązania geometrii z arytmetyką/.

W tabeli 3 zamieszczone zostały wyniki badań w poszczególnych etapach, z ukazaniem różnic w przyroście wiedzy geometrycznej w klasach eksperymentalnych i kontrolnych.



Tabela 3. Poziom wiedzy geometrycznej uczniów w poszczególnych etapach badań

Klasy	Uzyskane wyniki $\bar{x}$								
	I etap badań			II etap badań			III etap badań		
	E	K	Róż. na korzyść E K	E	K	Różnica na korzyść E K	E	K	Różnica na korzyść E K
I	11,77	11,84	- 0,07	23,61	18,72	4,89 -	18,55	15,78	2,77 -
II	21,00	21,75	- 0,75	27,11	24,55	2,56 -	26,60	24,07	2,53 -
III	5,74	11,55	- 5,81	28,06	21,33	6,73 -	28,45	20,72	7,73 -

- różnica na korzyść jest określona różnicą średnich arytmetycznych punktów uzyskanych w poszczególnych klasach

Z tabeli 3 wynika, że po zakończeniu eksperymentu wiedza uczniów zarówno w klasie I, II jak i III wzrosła na korzyść klas eksperymentalnych. Stąd nasuwa się wniosek, że integralne nauczanie geometrii jest korzystne i ma dodatni wpływ na poziom wiedzy uczniów w tej dziedzinie, co potwierdza założoną wcześniej hipotezę.

Szczególnie duży przyrost wiedzy geometrycznej nastąpił w klasie III eksperymentalnej. Wpływ na taki stan rzeczy miał niewątpliwie układ i połączenie geometrii z arytmetyką. Właśnie w klasie III związek tych dziedzin jest wyraźnie zaznaczony, co zostało przedstawione we wstępnej części tego opracowania.

Wyraźny wpływ na taki duży przyrost wiedzy /przyrost wyrażony różnicą średnich arytmetycznych punktów uzyskanych w sprawdzianie/ ma również częsty kontakt uczniów z treściami geometrycznymi w trakcie nauki matematyki w nauczaniu lekcyjnym. W klasach kontrolnych uczeń stykał się z pojęciami geometrycznymi tylko jednorazowo - blokowo w ciągu roku szkolnego. Znając niechętny stosunek nauczycieli do tej dziedziny matematyki można przewidzieć, że kolejny kontakt uczniów z geometrią nastąpi w następnej klasie.

Tak więc uwzględnienie wewnątrzprzedmiotowej korelacji treści

matematyki należy uznać za jeden z czynników stwarzających możliwość podniesienia poziomu wiedzy geometrycznej uczniów młodszych. Jednak oprócz niego powinny funkcjonować i inne czynniki gdyż ogólnie poziom wiedzy geometrycznej na szczeblu początkowym nie jest jeszcze zadowalający.

W klasie pierwszej eksperymentalnej uczniowie opanowali 98,5% przewidzianych programem zagadnień geometrycznych, natomiast w klasie kontrolnej 81,3%. Najwięcej problemów w dalszym ciągu sprawiało dzieciom położenie przedmiotów związane z określeniem kierunków /pravo, lewo/ oraz zawieraniem przedmiotów /wewnątrz, zewnątrz/.

W klasie drugiej eksperymentalnej uczniowie opanowali 84,7% a w klasie kontrolnej 76,7% treści geometrycznych przewidzianych w programie. W tych klasach uczniowie nie ugruntowali sobie w stopniu dostatecznym relacji prostopadłości odcinków i prostych oraz porównywania długości odcinków. Wiele błędnych określeń dotyczyło również nazw figur geometrycznych, zwłaszcza gdy chodziło o pojęcia kwadratu jako szczególnego prostokąta, prostokąta jako czworokąta.

W klasach trzecich, w których treści geometrycznych jest najwięcej, odsetek opanowanej wiedzy jest najniższy. W klasie III eksperymentalnej, mimo wyraźnego przyrostu wiedzy jest ona tylko na poziomie 70,0%, natomiast w klasie kontrolnej tylko na poziomie 53,3%. W klasie eksperymentalnej dzieci nie miały trudności z obliczaniem obwodu figur takich jak: trójkąt, czworokąt. Widać było wyraźny wpływ wiązania tych treści z układaniem i rozwiązywaniem równań, z dodawaniem i odejmowaniem liczb wielocyfrowych oraz umiejętnością rozwiązywania zadań tekstowych. W klasach kontrolnych tego typu zadania były najczęściej przez uczniów opuszczane.

Drugie zagadnienie, które należało rozwiązać podczas przeprowadzonych badań było zagadnienie trwałości wiedzy geometrycznej. Badania te przeprowadzone zostały w trzy miesiące po zakończeniu eksperymentu. Wyniki porównawcze z poszczególnych etapów badań przedstawia tabela 4.

Tabela 4. Wyniki porównawcze uzyskane przez uczniów w poszczególnych etapach badań

Klasy	Uzyskane wyniki $\bar{x}$					
	Etapy badań			Przyrost wiedzy w poszczególnych etapach badań		
	I	II	III	I-II	I-III	II-III
I E	11,77	23,61	18,55	+11,84	+ 6,78	- 5,06
I K	11,84	18,72	15,78	+ 6,88	+ 3,94	- 2,94
II E	21,00	27,11	26,60	+ 6,11	+ 5,6	- 0,51
II K	21,75	24,55	24,07	+ 2,8	+ 2,32	- 0,48
III E	5,74	28,06	28,45	+22,32	+22,71	+ 0,39
III K	11,55	21,33	20,72	+ 9,78	+ 9,17	- 0,61

Proces trwałego przyswajania wiedzy jest pod względem psychologicznym bardzo złożony, ponieważ "... zapamiętywanie i reprodukcja zależą nie tylko od obiektywnych związków materiału, ale i od stosunku osobnika do tego materiału"<sup>5</sup>. Z tego względu trwałość wiedzy zależy od zainteresowania i motywów uczenia się uczniów, od ich aktywnego uczestnictwa w procesie zdobywania wiedzy, od częstotliwości powtórzeń danego materiału, umiejętności systematyzowania zdobytych wiadomości, tworzenia układów logicznych informacji<sup>6</sup>.

Analizując wyniki badań ujętych w tabeli 4 można zauważyć spadek poziomu wiedzy geometrycznej w okresie przerwy wakacyjnej. Największy spadek wiedzy geometrycznej zaznacza się w klasach pierwszych, nieznaczny w klasach drugich, jedynie w klasie trzeciej eksperymentalnej poprzez trzymiesięczną przerwę wakacyjną poziom wiedzy geometrycznej nie obniżył się, a wręcz dzieci wykazywały się większą jeszcze znajomością pojęć niż bezpośrednio po zakończonym eksperymencie. Wydaje się, że właśnie w klasie trzeciej oprócz omawianych związków treści matematycznych zaważyły również i inne czynniki. Jednym z nich prawdopodobnie będą również gromadzone przez uczniów doświadczenia geometryczne związane z innymi przed-

miotami nauczania. Te właśnie przyczyny wpływają na zwiększenie częstotliwości powtarzania treści geometrycznych w klasie trzeciej a co za tym idzie na trwałość tej wiedzy.

#### 5. Podsumowanie i wnioski

Przedstawiony w niniejszym opracowaniu materiał badawczy wskazuje na szereg faktów i zjawisk potwierdzających ogólną opinię o ciągle niedostatecznym poziomie wiedzy geometrycznej dzieci w klasach początkowych. Stąd też przedmiotem badań wielu autorów są przyczyny niepowodzeń w uczeniu się matematyki dzieci młodszych /A.Czubryńska<sup>7</sup>, M.Gucewicz - Sawicka<sup>8</sup>, E.Gruszczuk - Kolczyńska<sup>9</sup>, Z.Krygowska<sup>10</sup>, J.Makarewicz<sup>11</sup>, E.Stucki<sup>12</sup>/.

W rozważaniach tych autorzy rozpatrują zwykle jeden z aspektów zjawiska niepowodzeń w zakresie uczenia się matematyki - trudności związane z przekazem treści nauczania oraz niedostatki dydaktyki początkowego nauczania matematyki. Z.Krygowska<sup>13</sup> wskazuje na trudności tkwiące w matematyce. Z.Cydzik<sup>14</sup> uściśla je do swoistości tej dziedziny wiedzy, jej ścisłości i systematyczności, natomiast w niniejszym opracowaniu przyczyny niepowodzeń w uczeniu się geometrii upatruje się w braku uwzględnienia korelacji geometrii z pozostałymi działami matematyki.

Wyniki badań wskazują na:

- 1/ możliwości takiego konstruowania rozkładów materiału nauczania matematyki, które uwzględniałyby powiązanie treści geometrycznych z arytmetyką oraz realizowanie ich wg przyjętego układu,
- 2/ stały kontakt uczniów z treściami geometrycznymi oraz spójność jej z arytmetyką eliminuje negatywne nastawienie uczniów oraz nauczycieli do zagadnień geometrycznych,
- 3/ częstotliwość powtórzeń ma dodatni wpływ na poziom i trwałość wiedzy geometrycznej, szczególnie w klasie trzeciej.

Uwzględnienie korelacji geometrii z arytmetyką nasuwa dalej idący wniosek, a raczej pytanie: czy nie należałoby zwrócić dodatkowo uwagę na korelację międzyprzedmiotową w procesie dydaktycznym? Wydaje się logiczne, że wykorzystanie wszystkich możliwych sytuacji do kształtowania pojęć geometrycznych jak: wychowanie fizyczne, techniczne, plastyczne, wycieczki, gry i zabawy w ramach środowiska

społeczno-przyrodniczego przysporzy nauczycielom uczącym geometrii wielu ciekawych doświadczeń i możliwości zbliżenia dzieci do geometrii.

PRZYPISY

- 1 Z.Cydzik, Nauczanie matematyki w klasie pierwszej i drugiej, Warszawa WSiP 1986 s. 9 - 11
- 2 W.Okoń, Słownik pedagogiczny, Warszawa PWN 1984 s. 139
- 3 T.Nowacki, Z.Wiatrowski, Mały słownik pedagogiki pracy, Warszawa IKN 1978 s. 76 cz.2
- 4 Program nauczania początkowego kl. I - III, Warszawa WSiP 1983 s. 53
- 5 S.L.Rubinsztein, Podstawy psychologii ogólnej, Warszawa Książka i Wiedza 1962 s. 394
- 6 Cz.Kupisiewicz, Podstawy dydaktyki ogólnej, Warszawa PWN 1973 s. 152 - 153
- 7 A.Czubryńska, Badania wyników nauczania matematyki w klasach IV szkół warszawskich, "Życie Szkoły" 1970 nr 1
- 8 M.Gucewicz - Sawicka, O niektórych trudnościach dydaktycznych w nauczaniu początkowym matematyki, "Zbiorcza Szkoła Gminna" 1976 nr 1
- 9 E.Gruszczuk - Kolczyńska, Niepowodzenia w uczeniu się matematyki u dzieci w klasach początkowych - diagnoza i terapia, Katowice Uniwersytet Śląski 1985
- 10 Z.Krygowska, Przyczyny niepowodzeń uczniów w matematyce, "Matematyka" 1975 nr 4
- 11 J.Makarewicz, Trudności w kształtowaniu pojęć geometrycznych w kl. I, "Oświata i Wychowanie", wersja C.D. 1978 nr 21  
J.Makarewicz, Badania nad wiedzą geometryczną uczniów kl. I - III różnych środowisk, "Oświata i Wychowanie", wersja C.D. 1980 nr 3
- 12 E.Stucki, O specyfice kształtowania pojęć geometrycznych w klasach I -III, "Oświata i Wychowanie", wersja C. 1980 nr 3
- 13 Z.Krygowska, Przyczyny niepowodzeń....., op.cit.s.246
- 14 Z.Cydzik, Przyczyny niezadowolających wyników w nauczaniu matematyki, Życie Szkoły 1961 nr1