ZESZYTY NAUKOWE WYŻSZEJ SZKOŁY PEDAGOGICZNEJ
W BYDGOSZCZY
Studia Pedagogiczne z. 27
Pedagogika Przedszkolna i Wczesnoszkolna 10

EDMUND STUCKI

HEURYSTYCZNA METODA G. POLYA W POCZĄTKOWYM NAUCZANIU MATEMATYKI

1. Wprowadzenie

Jedną w właściwości psychicznych człowieka jest dążenie do rozwiązywania zadań. Już u dzieci w młodszym wieku szkolnym wzrasta również stopniowo zdolność do rozwiązywania zadań. Nowoczesna heurystyka, zdaniem G. Polya, bada procesy i operacje myślowe najczęściej użyteczne w rozwiązywaniu tych zadań. Uważa on bowiem, że "rozwiązywać zadanie to poszukiwać drogi pokonania trudności, drogi pozwalającej na ominięcie przeszkód, na osiągnięcie celu, którego nie sposób osiągnąć od razu i wprost".[1]

W związku z tym należy uczniów nauczyć myśleć przez pobudzenie ich do myślenia, wyrabianie u nich pożytecznych nawyków, kształtowanie i modelowanie ich umysłów. Tak rozwijane myślenie będzie na pewno celowe i twórcze, może być też utożsamiane z umiejętnością rozwiązywania zadań.

Aktywne uczenie się, polegające na tym, że uczniowie "odkrywają sami tak dużo, jak to jest możliwe w danych warunkach"[2], to - zdaniem G. Polya-główna zasada nauczania matematyki. Aktywność ta, jak twierdzi F. Urbańczyk[3], polega na wykonywaniu szeregu operacji myślowych (porównywania, analizy i syntezy, abstrahowania i uogólniania, rozumowania indukcyjnego i dedukacyjnego), w trakcie których ujawnia się pomysłowość i inicjatywa ucznia. Jej rezultatem jest:

formułowanie definicji nowych pojęć, stawianie problemów i układanie zadań, rozwiązywanie zagadnień (problemów) i zadań, szukanie koncepcji i układanie planów rozwiązania zadania, badanie, czy nie można inaczej rozwiązać zagadnienia czy zadania itp.[4]

Z kolei Z. Krygowska[5] uważa, że aktywność matematyczna to przede wszystkim rozwiązywanie problemów. Sprzyja temu rozwiązywanie zadań tekstowych typu problemowego, w których prócz rozwiązania występować może: a) formułowanie brakującego pytania, b) rysunek-schemat do zadania (matematyczny zapis treści zadania), c) ujęcie rozwiązania we wzorze w jednym zapisie, d) szacowanie wyników, e) układanie treści do wzoru lub innej treści do zadania rozwiązanego itp.

Zadania tekstowe są ponadto w nauczaniu początkowym nośnikami treści kształcenia matematycznego. Ich układanie, rozwiązywanie i przekształcanie przyczynia się stopniowo do poznawania istoty matematyki.

2. Dyrektywy metody G. Polya i etapy rozwiązywania zadań

A. Góralski uważa, że "podstawowa dyrektywa metody G. Polya jest bardzo lapidarna-brzmi bowiem: odgadywać i sprawdzać".[6] Stąd może być stosowana w rozwiązywaniu zadań dowolnego rodzaju i dowolnego stopnia trudności.

G. Polya, określając swoją metodę i formułując do niej dyrektywy, miał na myśli dwa rodzaje zadań: zadania typu "znaleźć" i typu "udowodnić". Ponieważ w klasach niższych mamy do czynienia głównie z pierwszym typem zadań (szukanie niewiadomej), dlatego też omawiać będę te dyrektywy metody G. Polya, które odnoszą się do zadań typu "znaleźć". Wykorzystanie w klasach niższych metody G. Polya jest możliwe głównie ze względu na jej ogólność, co pozwala na uwzględnianie praw rozwoju psychicznego dzieci, ich myślenia i innych procesów poznawczych.

G. Polya w swej metodzie rozwiązywania zadań wyróżnia pięć podstawowych operacji, które są zarazem etapami ich rozwiązywania. W każdym etapie G. Polya proponuje proste, wysoce ogólne i naturalne pytania lub sugestie, które sprzyjają myśleniu i sprawnemu pokonaniu danego stadium.
Etapy te są następujące:

1. Zrozumienie zadania

Etap ten wymaga odpowiedniego doboru zadania, aby uczeń mógł je zrozumieć i chciał rozwiązać. Konieczne jest tu zwrócenie uwagi na cel. Pytamy wtedy: Czego potrzeba? Następnie należy ustalić, które obiekty są w naszym posiadaniu. Pytamy: Co jest dane? Jasno sformułowane zadanie powinno określić warunek, jaki ma być spełniony przez poszukiwany obiekt, przez niewiadomą. W związku z czym pytamy: Jaki jest warunek? Czy można wydzielić część warunku? Zrób rysunek. Wprowadź odpowiednie oznaczenia.[7]

Takie pytania i polecenia pomagają uczniom poznać dokładniej zadanie. Stąd w nauczaniu początkowym matematyki mocno podkreśla się znaczenie tego etapu. Zofia Cydzik[8] uważa, że zanim zaczniemy zastanawiać się, jak rozwiązać zadanie, musimy najpierw ustalić, co mamy rozwiązać, czyli dostrzec problem matematyczny w zadaniu. Dlatego uczeń musi zrozumieć dokładnie treść zadania, co pozwoli mu wyobrazić sobie sytuację przedstawioną w zadaniu. Poza tym powinien umieć wyróżnić warunki matematyczne: wielkości podane w zadaniu, wielkość poszukiwaną i uchwycić stosunki między tymi wielkościami.

2. Układanie planu rozwiązania

Droga prowadząca od zrozumienia do ułożenia planu rozwiązania polega na wyłonieniu odpowiedniego pomysłu i sprawdzeniu czy rozwiązanie jest osiągalne. W tym celu nauczyciel może pomóc uczniom, ucząc ich formułowania odpowiednich pytań pomocniczych i poleceń.

Wychodząc dla przykładu od niewiadomej można pytać: Co jest niewiadomą? Jak można znaleźć rozwiązanie? W jaki sposób? Natomiast wychodząc od danych pytamy: Co jest dane? Do czego dane te mogą być użyteczne? Dokąd można dojść, wychodząc od tych danych?

Jeżeli pytania są niewystarczające, można sięgnąć do pytań pomocniczych: Jakiego rodzaju jest to zadanie? Czy wiąże się ono w jakimś znanym już zadaniem? A może jest pokrewne jakiemuś zadaniu?

Kończąc planowanie rozwiązania, G. Polya[9] zaleca upewnić się czy nie odeszliśmy od zadania. Pytamy wtedy: Czy wykorzystano cały warunek? Czy wzięto pod uwagę i wykorzystano wszystkie dane?

Poprawnie ułożony plan rozwiązania w dużej mierze warunkuje prawidłowe wykonanie planu. G. Polya sugeruje rozpoczynać rozwiązywanie zadania wychodząc od niewiadomej lub od danych, czyli rozwiązywania metodą analityczną lub syntetyczną. Metoda analityczna jest bardziej kształcąca, ale na początku trudniejsza, natomiast syntetyczna nie zawsze sprzyja rozwijaniu logicznego myślenia uczniów i samodzielnego rozwiązywania zadań.

Najwłaściwszą jednak metodą dla kształcenia logicznego myślenia uczniów i usamodzielniania ich w rozwiązywaniu zadań tekstowych jest metoda analityczno-syntetyczna (L. Jeleńska, J. Hawlicki, Z. Cydzik, J. Kujawiński, M. Potemkowska, E. Stucki i inni). Poza tym dużą rolę na etapie układania planu odgrywają rysunki schematyczne. Ilustrują one przede wszystkim przebieg rozumowania w trakcie rozbioru zadania.[10]

3. Wykonanie planu

Etap wykonania musi być oddzielony od etapu układania planu tylko wtedy, gdy nie są już potrzebne nowe pomysły i gdy jest dobrze określony plan rozwiązania (program rozwiązania). Wykonując plan rozwiązujący musi sprawdzać poprawność każdego kroku i musi pamiętać, że "część sugeruje całość".[11] Ustalenie związków i zależności między danymi oraz wyznaczenie kolejnych działań jest ostatnim ogniwem w łańcuchu czynności ucznia, co znajduje odbicie w zapisie w postaci formuły arytmetycznej lub algebraicznej.

4. Sprawdzanie wyniku

Sprawdzanie wyniku jest zawsze pożądane, a nawet konieczne. Należy wtedy zapytać: Jak można sprawdzić wynik? Jak można sprawdzić uzasadnienie rozwiązania? Czy można otrzymać wynik w inny sposób? Sprawdzanie wyniku zmusza ucznia do wykonywania operacji odwrotnych tak bardzo potrzebnych w rozwijaniu myślenia.

5. Refleksja nad rozwiązaniem

Samodzielne rozwiązanie zadania jest zawsze odkryciem. Jeżeli zadanie nie było trudne "odkrycie nie jest wielkie, jednak jest odkryciem"[12], a to zobowiązuje do refleksji nad procesem rozwiązywania i nad wykorzystaniem uzyskanego wyniku i zastosowanej metody.[13]

Pytania i sugestie, które stawia sobie rozwiązujący na kolejnych etapach pracy nad zadaniem stanowią bardzo istotny element metody G. Polya. Sam twórca metody przypisuje im ważną rolę.

Metoda G. Polya jest jednak czymś więcej od dyrektywnego zestawu pytań i sugestii użytecznych w rozwiązywaniu zadań. Stąd oprócz pytań i sugestii autor podaje trzy reguły postępowania rozwiązującego i siedem reguł preferencji. Mają one znaczenie ogólne, bo każda z nich formułuje oczekiwane i stałe cechy rozwiązującego albo wskazuje obowiązujące w trakcie całego procesu rozwiązania zasady wyboru.

Oto reguły postępowania (czyli dyrektywy), określające pożądane własności postępowania, pożądane postawy oraz oczekiwane sposoby myślenia i działania rozwiązującego. Są nimi:

1. Racjonalność, polegająca na tym, jak mówi G. Polya, że nie należy sprzeciwiać się nigdy swemu wyczuciu, ale starać się dostrzec argumenty za i przeciw naszym planom.
2. Oszczędność, lecz bez z góry założonych ograniczeń. Należy trzymać się tak blisko zadania, jak tylko to jest możliwe, ale i być gotowym na odejście od niego na tyle daleko, na ile wymagać tego będą od ucznia okoliczności.
3. Wytrwałość, lecz i różnorodność. Należy trwać przy rozpatrywanej części zadania tak długo, jak jest nadzieja na jakiś dobry pomysł. Przy czym należy stale rozważać nieobjęte jeszcze obszary i uzyskać z tego pewne użyteczne myśli.[14]

Pozostałe dyrektywy mają postać siedmiu reguł preferencji. Pierwsze trzy reguły formułują ogólne zasady wyboru.

1. Łatwiejsze ma pierwszeństwo przed trudniejszym.
2. To co lepiej znane ma pierwszeństwo przed tym co jest znane gorzej.
3. Obiekt mający więcej punktów wspólnych z zadaniem ma pierwszeństwo przed obiektem mającym mniej takich punktów.
4. Czwarta dyrektywa mówi o zawartości rzeczowej zadania i brzmi: całość ma pierwszeństwo przed częściami, główne części przed pozostałymi, bliższe przed bardziej oddalonymi.[15]

   Kolejne reguły dotyczą użytkowania wiedzy i doświadczenia.
5. Zadania rozwiązane wcześniej i zawierające ten sam rodzaj niewiadomej mają pierwszeństwo przed innymi rozwiązanymi wcześniej zadaniami.
6. Udowodnione wcześniej twierdzenie, zawierające ten sam związek co twierdzenie, które staramy się udowodnić, ma pierwszeństwo przed innymi udowodnionymi wcześniej twierdzeniami.
7. Ostatnia reguła dotyczy zadań pomocniczych. Zadania podobne do zadania rozpatrywanego, mają pierwszeństwo przed zadaniami, które mają być sprowadzone do niego lub obejmują go, a te ostatnie mają pierwszeństwo przed wszystkimi pozostałymi zadaniami.[16]

3. Seminarium rozwiązywania zadań

Seminarium rozwiązywania zadań to drugie zagadnienie metody G. Polya a dotyczące uczenia się i nauczania rozwiązywania zadań.

Podstawowym celem nauczania matematyki, według G. Polya, jest nauczenie myślenia. Seminarium rozwiązywania zadań proponowane przez niego jest właśnie propozycją nauczania myślenia. Seminarium podporządkowane jest zasadom uczenia się, które równocześnie mogą być zasadami nauczania. Autor zalicza do nich:

1. Aktywne uczenie się. Uczenie będzie efektywne wtedy, gdy uczący się odkryje sam taką część przyswajanego materiału, na jaką pozwalają mu okoliczności.

2. Najwłaściwsza motywacja. Uczenie się będzie efektywne wtedy, gdy uczeń będzie zainteresowany przyswajanym materiałem i znajdować będzie zadowolenie ze swej aktywności.

3. Następstwo faz. Autor podkreśla, że uczenie się będzie efektywne wtedy, gdy faza badania poprzedzać będzie fazę werbalizacji i formowania pojęć oraz ewentualnie, włączenie przyswojonego materiału do systemu wiedzy, określającej postawę myślową ucznia.[17]

G. Polya wyróżnia dwie fazy seminarium: wstępną i podstawową. W fazie wstępnej prowadzący seminarium omawia i rozwiązuje zadania typowe na zajęciach audytoryjnych. Stara się doprowadzić do rozpoznania i sformułowania sprawnych metod rozwiązywania zadań. Jednocześnie uczestnicy seminarium otrzymują zadania do samodzielnego rozwiązania w domu. Stwarza to sposobność do przypomnienia, pełnego zrozumienia i pogłębienia znajomości metod rozwiązywania omówionych na lekcji. Po rozwiązaniu prezentują to ogółowi.

W fazie podstawowej seminarium obowiązuje zasada pracy grupowej. Faza ta realizowana jest w trzech etapach:

a) w pierwszym etapie każdy uczestnik otrzymuje do samodzielnego rozwiązania jedno zadanie różne od innych i może liczyć na pomoc nauczyciela,

b) w drugim etapie każdy uczestnik sprawdza, uzupełnia, przegląda, względnie upraszcza swe rozwiązanie, szuka innego rozwiązania i wybiera sposób do zaprezentowania przed grupą,

c) w trzecim etapie zajęcia odbywają się w grupach (przeciętnie czteroosobowych), których skład określają sami uczestnicy. Jeden z członków bierze na siebie rolę nauczyciela, prezentuje zadanie pozostałym, pobudza ich do aktywności i pomaga w poszukiwaniu rozwiązania. Po znalezieniu rozwiązania następuje przedstawianie rozwiązania przez każdego członka grupy i krytyczna ocena. Ciekawe zadania i rozwiązania mogą być przedstawione całej klasie.

Dalsza praca w czasie seminarium przewiduje częściową wymianę grup i podjęcie dalszych zagadnień.

Powodzenie każdej formy nauczania (podobnie seminarium) zależne jest w znacznym stopniu (a niekiedy decydującym) od postawy nauczyciela. Dlatego G. Polya dla tych, którzy chcą się podjąć trudu prowadzenia seminarium rozwiązywania zadań, formułuje dziesięć "przykazań" dla nauczycieli. Oto one:

1) "bądźcie zainteresowani swym przedmiotem,

2) znajcie swój przedmiot,

3) powinniście wiedzieć, że najlepszy sposób na nauczenie się czegokolwiek, to odkrycie tego samemu,

4) starajcie się czytać w twarzach uczniów, dostrzegać ich oczekiwania i trudności, umieć postawić się na ich miejscu,

5) przekazujcie uczącym się nie tylko wiadomości, lecz również umiejętności, postawy myślowe, nawyk pracy metodycznej,

6) niechaj uczą się odgadywać,

7) niechaj uczą się udowadniać,

8) sprzyjajcie dostrzeganiu tych cech zadania, które mogą być użyteczne przy rozwiązywaniu innych zadań,

9) nie ujawniajcie od razu całego sekretu - niechaj znajdą sami tyle, ile jest to możliwe,

10) sugerujcie, nie narzucając swego zdania".[18]

4. Próby wdrażania heurystycznej metody G. Polya

Dyrektywy heurystycznej metody G. Polya wprowadziłem eksperymentalnie do rozwiązywania zadań testowych w klasach pierwszych. Badałem wpływ tych dyrektyw na rozwój myślenia, prawidłową technikę uczenia się i samodzielnego rozwiązywania zadań tekstowych oraz wzrost wyników nauczania i zainteresowań uczniów matematyką.

Uczniowie klas pierwszych (eksperymentalnych) rozwiązywali dwa razy w tygodniu zadania tekstowe metodą G. Polya a raz na dwa tygodnie stosowano seminarium rozwiązywania zadań.

Postępowanie dydaktyczne miało w różnych sytuacjach nieco odmienny przebieg. Podam cztery charakterystyczne sposoby postępowania.

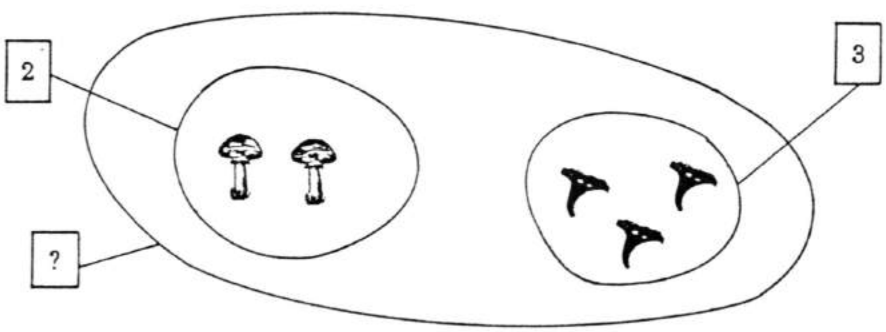
A. W przypadku zawiązywania zadań

Tematem lekcji było (na przykład) układanie zadań tekstowych do sytuacji przedstawionej na konkretach. Jej etapy były następujące:

1) Analiza sytuacji przedstawionej na tablicy magnetycznej (flanelowej, ilustracji, rysunku schematycznym, na ławce itp.) Na przykład:

Dla dokonania analizy sytuacji oraz wyzwolenia u uczniów aktywności magnetycznej odpowiadali oni na pytania: Ile jest borowików? Ile jest kurek? Czego jest więcej? O ile?

2) Wspólne ustalenie pytania (problemu, niewiadomej). Uczniowie podają wszystkie możliwości sformułowania pytań (Ile jest razem? O ile jest mniej borowików? O ile więcej jest kurek?) Pytania uczniowie nie formułowali jeszcze dosłownie, ustalili jedynie, iż owo pytanie odnosić się będzie do sumy grzybów (uzupełniając sytuację przedstawioną na tablicy magnetycznej w postaci zbiorów, przydatną w dalszych etapach pracy).



3) Układanie treści zadania do przedstawionej sytuacji (zbiorowe, zespołowe lub samodzielne). Podczas podawania przez uczniów propozycji zwracano szczególną uwagę na właściwe związki między danymi i poprawne formułowanie pytania.

4) Wybór najciekawszej i zarazem najlepiej ułożonej treści zadania oraz zapis pytania na tablicy (Ile grzybów zebrali razem?)

5) Rozwiązanie zadania (ułożenie formuły i wykonanie planu rozwiązania zadania, 2+3=5).

6) Sprawdzenie rozwiązania zadania z sytuacją przedstawioną na tablicy magnetycznej.

7) Sformułowanie odpowiedzi i jej zapis.

Cztery pierwsze etapy realizowały - zrozumienie zadania - w myśl metody G. Polya. Ponieważ etap ten ma decydujące znaczenie w powodzeniu rozwiązania zadania, dlatego w klasie I należy stosować tak wiele zabiegów dydaktycznych. Dalsze ogniwa lekcji podporządkowane były pozostałym etapom G. Polya.

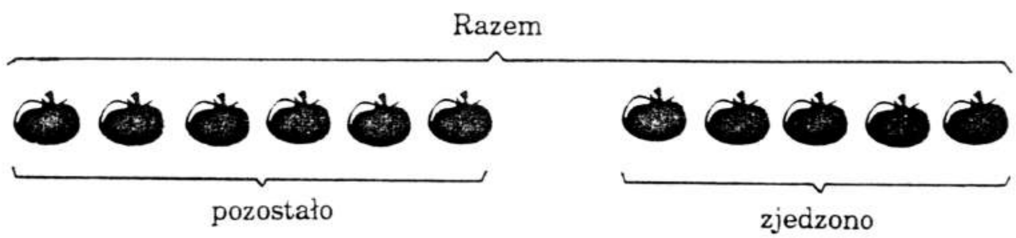
B. W przypadku rozwiązywania prostych zadań tekstowych.

Heurystyczną metodę G. Polya ukażę na przykładzie następującego zadania: Asia kupiła jedenaście pomidorów. Rodzina zjadła pięć pomidorów. Ile pomidorów zostało?

Po zapoznaniu uczniów z treścią zadania przystępowano do jego rozwiązania zgodnie z etapami G. Polya.

1) Zrozumienie zadania (wyodrębnienie danych i niewiadomej, wyeksponowanie głównego pytania, przedstawienie sytuacji na konkretach lub rysunku schematycznym). W etapie tym uczniowie musieli wykazać się znajomością treści zadania w taki sposób, aby poprawnie wyodrębnić dane i niewiadomą oraz by właściwie uchwycić związki między nimi. W tym celu dobierano odpowiednie pytania, które miały wpływać na rozwój myślenia. Na przykład: Co mamy obliczyć? Czego nie wiemy? - wyodrębnienie głównego pytania. Co jest dane? Co wiemy? - wyodrębnienie danych.

Następnie uczniowie przedstawili sytuację zawartą w zadaniu na rysunku i wyeksponowali pytanie zapisując na tablicy.



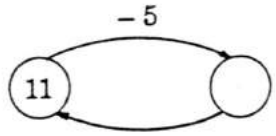
Ile pomidorów zostało?

2) Układanie planu rozwiązania (powstanie pomysłów rozwiązania, wybór najlepszego pomysłu i ułożenie planu rozwiązania). Wychodząc od niewiadomej uczniowie stawiali pytania: Czego nie wiem? Muszą obliczyć, ile pomidorów zostało. Co muszą wiedzieć, żeby znaleźć niewiadomą? Ile pomidorów kupiła Asia i ile pomidorów zjadła rodzina? Od wszystkich pomidorów, które kupiła Asia, należy odjąć te pomidory, które zjadła rodzina.

Następnie uczniowie samodzielnie podawali pomysły rozwiązania, które ilustrowały przebieg rozumowania. Do ciekawszych należały:

a) formuła matematyczna 11-5=6

b) graf



c) drzewko (organigram)

3) Wykonanie planu rozwiązania zadania i sformułowanie słownej odpowiedzi. Uczniowie wybrali sposób rozwiązania, wpisali go do zeszytu i sformułowali odpowiedź.

4) Sprawdzenie wyniku i refleksja nad rozwiązaniem. Porównanie wyniku rozwiązania i odpowiedzi z treścią zadania.

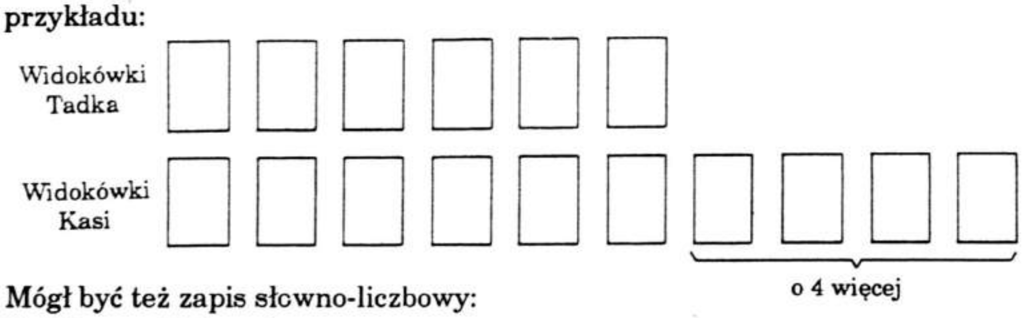
Przy zapisie rozwiązywania zadań prostych stosowano często organigramy, co ułatwiało rozwiązanie zadań złożonych, głównie wtedy, gdy je przekształcano w złożone.

C. W przypadku rozwiązywania złożonych zadań problemowych

Przebieg heurystycznej metody G. Polya przedstawiam na przykładzie zadania, w którym należało uzupełnić pytanie (ustalić problem).

Rodzeństwo Tadek i Kasia zbierają widokówki. Tadek ma 6 widokówek a Kasia o 4 widokówki więcej.

Po zapoznaniu z treścią zadania z luką (brak pytania) uczniowie wykonali następujący zapis graficzno-słowno-liczbowy (rysunek schematyczny, określenia słowne i liczby) w celu lepszego zrozumienia sytuacji w nim przedstawionej. Dla przykładu:



Mógł być też zapis słowno-liczbowy:

Tadek - 6 widokówek

Kasia - o 4 widokówki więcej niż Tadek

Po analizie zadania i stwierdzeniu, że dane pozwalają na jego rozwiązanie przystępowano do ustalenia głównego pytania (problemu).

Uczniowie podawali różne pytania, na które można było znaleźć odpowiedź posługując się danymi z zadania. Formułowano najczęściej pytania o widokówki Kasi i o łączną liczbę widokówek. Mało było pytań dotyczących porównań. W rezultacie przyjęto pytanie złożone (trudniejsze). I w tym momencie zakończono realizację I etapu heurystycznej metody G. Polya (zrozumienie zadania).

W II etapie (układanie planu rozwiązania) kierowano do uczniów następujące pytania: Czego w zadaniu nie wiemy? Co mamy obliczyć? (Ile widokówek mieli razem?). Co musisz wiedzieć, żeby znaleźć niewiadomą? (Ile widokówek ma Tadek, a ile ma Kasia?) Co wiesz o widokówkach Tadka? (ma ich 6). Co wiesz o widokówkach Kasi? (ma o 4 więcej niż Tadek lub ma tyle co Tadek i jeszcze 4 widokówki). Czy możesz obliczyć widokówki Kasi?

Po przedstawieniu przez uczniów własnych pomysłów, przystępowano do wspólnego ułożenia planu rozwiązania z wykorzystaniem organigramu (drzewka) ilustrującego przebieg rozumowania.

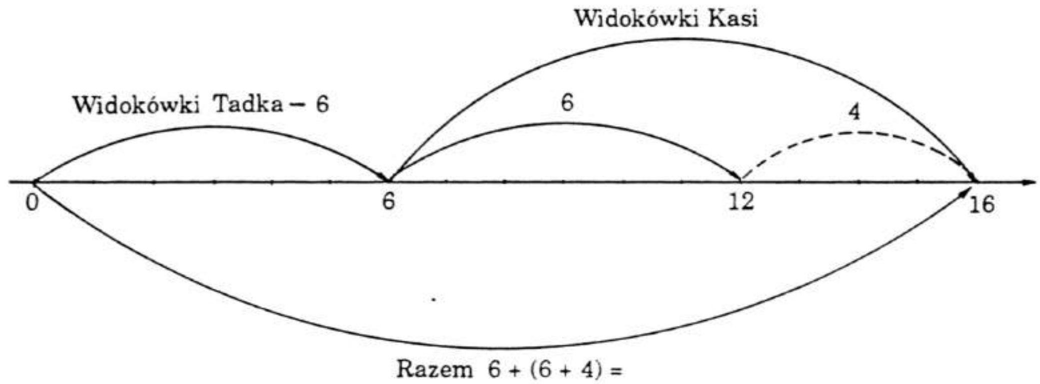
Teraz uczniowie mogli ułożyć rozwiązanie w jednym zapisie wynikające z tego rozumowania 6 + (6+4) =

W III etapie (wykonanie planu) uczniowie dokonali obliczeń ułożonego wzoru (lub oddzielnych działań 6+4=10, 6+10=16) i sformułowali odpowiedź.

W IV etapie (sprawdzanie wyniku) następowało odczytanie przez uczniów całości rozwiązania z kolejną analizą etapów na drzewku.

W V etapie (refleksja nad rozwiązaniem zadania) następowało sprawdzenie, czy można było rozwiązać zadanie inaczej (krócej, lepiej).

Uczniowie podawali wtedy rozwiązanie za pomocą dwóch działań. Przedstawiono także rozwiązanie na osi liczbowej.



D. W przypadku stosowania seminarium

Seminarium rozwiązywania zadań ze względów organizacyjnych i możliwości umysłowych dzieci było uzupełnieniem heurystycznej metody G. Polya. Seminarium odzwierciedlało umiejętności samodzielnego stosowania przez uczniów wdrażanej metody i samodzielnego prowadzenia toku rozumowań podczas prezentowania sposobu rozwiązania zadania.

Dużo uwagi poświęcano fazie wstępnej, pracując z całą klasą, a potem coraz częściej w grupach uczniowskich.

Następnie po wspólnym rozwiązaniu zadania uczniowie otrzymywali do domu zadania podobne, które trzeba było rozwiązać i zastanowić się, jak przedstawić to rozwiązanie klasie (etapy, pytania, zapis). Do prezentacji rozwiązań wybierano uczniów chętnych, a mimo to początkowo rozwiązywali oni szybko zadanie, ale bez przeprowadzenia głośnej analizy. Jest to nawet naturalne w tym wieku i nie należy na siłę żądać tłumaczenia. Potem było już coraz lepiej, co pozwalało przechodzić do pracy grupowej.

Praca w grupach polegała na przydzieleniu zadania grupowego do indywidualnego rozwiązania w domu i potem prezentowania przed grupą w klasie. Grupa kończyła wyborem przedstawiciela do pokazania sposobu rozwiązania całej klasie. Pracę wszystkich grup kończył nauczyciel oceną najlepszych sposobów rozwiązań, oceną współpracy w grupie i aktywności uczniów.

5. Wyniki wdrażania założeń badawczych

Wyniki badań w sześciu klasach pierwszych (trzech eksperymentalnych i trzech kontrolnych) liczących łącznie 222 uczniów obejmują badania wstępne (styczeń), etapowe (pod koniec każdego miesiąca - marzec, kwiecień, maj) i końcowe (czerwiec). Ilustruje je tabela 1.

Tabela 1. Zestawienie wyników uzyskanych we wszystkich etapach badań. N=222 (E-110, K-112)

Etapy badań	Ilość pkt. za zadanie	Liczba punktów				Odsetek wyników pozytywnych		Różnica na korzyść klas	
		uzyskanych		możliwych do uzyskania					
		E	K	E	K	E	K	E	K
W	12	636	732	1320	1344	48.2	54.4	-	6.2
E_1	18	1376	1113	1980	2016	69.5	55.2	14.3	-
E_2	18	1390	1055	1980	2016	70.2	52.3	17.9	-
E_3	18	1556	1131	1980	2016	78.6	56.1	22.5	-
K	24	2046	1495	2640	2688	77.5	55.6	21.9	-
ogólne średnie wyniki całych badań		7004	5526	9900	10080	70.7	54.8	15.9	-

Z tabeli 1 wynika, że w badaniach wstępnych lepsze wyniki pozytywne uzyskały klasy kontrolne. W dalszej fazie badań pozytywne wyniki klas eksperymentalnych dominują i rosną do 78,6 % (trzeci etap badań miesięcznych) oraz utrzymują się na wysokim poziomie (77,5%) w badaniach końcowych. W klasach kontrolnych wyniki nieco tylko rosną i opadają, ale ciągle mieszczą się w przedziale średnim w granicach 52,3% - 56,1% poprawności. Średni wynik końcowy jest wyższy o 15,9% na korzyść klas eksperymentalnych (70,7%), ale różnice te od momentu zastosowania metody G. Polya są zawsze bardziej korzystne dla klas eksperymentalnych i mieszczą się w granicach od 14,3%-22,5%.

Rezultaty eksperymentu miały również swoje korzystne odzwierciedlenie w wynikach klasyfikacji uczniów z matematyki. Jeżeli na półrocze (przed eksperymentem) klasa kontrolna uzyskała średnią ocenę 4,01, a eksperymentalna tylko 3,78 (o 0,23 stopnia na korzyść klas kontrolnych) to na koniec roku szkolnego klasy eksperymentalne uzyskały średnią ocenę 4,47, wyższą o 0,59 od klas kontrolnych (3,88).

Potwierdzeniem pozytywnego wpływu zastosowania metody G. Polya był wyraźny wzrost zainteresowań matematyką u uczniów klas eksperymentalnych. Jeżeli w badaniach wstępnych 46,2 % uczniów bardzo lubiło rozwiązywać zadania tekstowe i algorytmiczne (w kontrolnych 47,1%), to pod koniec eksperymentu było takich uczniów 71,2% (w kontrolnych spadło do 42,3%).

Szczegółowa analiza wyników badań w poszczególnych fazach wykazuje dość duże ich zróżnicowanie w różnych zakresach.

Najwyższe średnie wyniki uzyskały klasy eksperymentalne (82,6%) i kontrolne (62,2%) w zadaniach algorytmicznych (różnica 18,4%), chociaż wyniki te pod koniec nieco obniżyły się prawdopodobnie ze względu na rozszerzenie zakresu liczbowego i coraz częstsze stosowanie tabel funkcyjnych, grafów, równań, osi liczbowej itp.

Nieco niższą średnią wyników osiągnęły klasy eksperymentalne (75,8%) w rozwiązywaniu zadań tekstowych, ale z dużą różnicą (o 27,2 %) w stosunku do klas kontrolnych, które uzyskały zaledwie 48,6 % poprawności rozwiązań.

W czasie rozwiązywania zadań tekstowych uczniowie stosowali różne sposoby rozwiązań. Oto prezentacja ich wyników.

Tabela 2. Poprawne zastosowanie różnych sposobów rozwiązań zadań (w procentach)

Etapy badań	Za pomocą rysunku		Za pomocą równań		Za pomocą wzoru		Ułożenie pytań do zadań		Formułowanie odpowiedzi	
	E	K	E	K	E	K	E	K	E	K
W	26,2	28,4	41,2	43,6	-	-	-	-	28,3	40,2
		r 2,2		r 2,4						r 11,9
E1	61,4	32,6	58,6	30,1	-	-	68,2	38,6	68,4	46,3
	r 28,8		r 38,5				r 29,6		r 22,1	
E2	63,2	28,6	74,3	41,2	51,2	39,7	-	-	85,2	33,3
	r 34,6		r 33,1		r 11,5				r 51,9	
E3	90,2	37,2	90,8	40,8	80,6	41,2	82,6	41,7	86,8	42,6
	r 53,0		r 50,0		r 39,4		r 40,9		r 44,2	
K	88,7	36,5	92,7	51,6	79,4	40,3	88,4	52,3	88,4	31,2
	r 52,2		r 41,1		r 39,1		r 36,1		r 57,2	

Zastosowanie matematycznego zapisu treści zadania tekstowego w postaci graficznej (rysunkowej, schematycznej, słownej itp.) to umiejętność połączenia związków i zależności tkwiących w zadaniu w układ pozwalający określić tok i tryb rozwiązania zadania. Umiejętność taką opanowali uczniowie klas eksperymentalnych na poziomie przeciętnym (26,2% - 63,2%) a potem wysokim (90,2% i 88,7%), przy tylko przeciętnych (28,4% - 37,2%), ale w niskim obszarze wyników w klasach kontrolnych i to stosowanych sporadycznie przez niektórych uczniów.

Różnice dochodzą tu do 53% na korzyść klas eksperymentalnych.

Użycie równania do rozwiązania zadania tekstowego świadczy o wysokim poziomie myślenia w kategoriach zredukowanych. Wyniki klas eksperymentalnych mieszczą się w drugiej fazie badań eksperymentalnych w obszarze wysokim (74,3%), a w ostatnich dwóch etapach sięgają górnej granicy obszaru wysokiego (90,8% i 92,7%) i są najważniejsze z wszystkich osiągniętych wyników. Z kolei różnice w stosunku do klas kontrolnych, których wyniki mieszczą się w obszarze przeciętnym, dochodzą aż do 50%. Wyniki te są niewątpliwym dowodem wprowadzania prawidłowych technik uczenia się, wypływających z heurystycznej metody G. Polya, do procesu rozwiązywania zadań tekstowych.

Rozwiązywanie zadania za pomocą wzoru w jednym zapisie świadczy o całościowym ujęciu zadania, które jest rezultatem analitycznego sposobu jego rozbioru i świadczy o dobrym poziomie myślenia dywergencyjnego. Różnice na korzyść klas eksperymentalnych sięgają tu granic od 11,5% do 39,4% i są w etapie trzecim oraz w badaniach końcowych w obszarze wyników wysokich w tych klasach, a w klasach kontrolnych cały czas tylko mieszczą się w obszarze przeciętności. Uwidacznia się tu wyraźnie wpływ eksperymentu.

Ułożenie brakującego pytania do zadania świadczy o umiejętności wyodrębnienia problemu i jego sformułowania. Rozwiązywanie zadań według dyrektyw G. Polya przewidywało taki etap pracy dość często. Dlatego też duży odsetek uczniów został do tego wdrożony. Część uczniów nie podejmowała tego zagadnienia, część miała trudności lub wykonała tę czynność błędnie. Pozytywne wyniki klas eksperymentalnych mieszczą się w granicach od 68,2% do 88,4% poprawności, przy przeciętnych wynikach klas kontrolnych (38,6% - 52,3%). Trudności w tym zakresie uwidaczniały się w nieumiejętności wydzielania danych, w braku uchwycenia związków i zależności między danymi, w niezrozumieniu pojęć tkwiących w zadaniu, a także w nieumiejętności sformułowania pytania.

Słowne sformułowanie odpowiedzi i jej zapis to także integralna część rozwiązania zadania. W klasach kontrolnych nie zawsze było stosowane. W klasach eksperymentalnych wyniki pozytywne w tym zakresie stopniowo rosną i osiągają w ostatnich trzech badaniach poziom od 85,2% do 88,4% poprawności.

6. Próba syntezy

Wyniki badań przedstawione w niniejszym opracowaniu potwierdzają pozytywny wpływ zastosowania heurystycznej metody G. Polya w rozwiązywaniu zadań. Jest ona jednym ze sposobów rozwiązywania zadań, ale przede wszystkim zadań tekstowych.

Zastosowane wielokrotnie etapy tej metody wpływały na rozwój myślenia matematycznego i inspirowały oraz wdrażały uczniów do różnych sposobów samodzielnego rozwiązywania zadań, a także do prawidłowej techniki uczenia się. Metoda ta wpłynęła ponadto na podniesienie wyników nauczania i rozwój zainteresowań matematyką oraz na właściwą organizacje lekcji matematyki.

Etapy metody G. Polya wyznaczają kolejno następujące po sobie kroki podczas rozwiązywania zadań, stanowiące w pewnym sensie algorytm czynności w tym zakresie. Wpływa to na pełniejsze i głębsze poznanie przez ucznia struktury zadań i ich elementów składowych oraz związków i zależności między danymi a problemami matematycznymi w nich zawartymi. Graficzne sposoby rozbioru zadań i różne metody ich rozwiązywania prowadzą do stałego podnoszenia poziomu kształcenia matematycznego już od najniższych klas szkoły podstawowej.

PRZYPISY

[1] G. Polya: *Odkrycie matematyczne.* Warszawa Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1975, s. 13
[2] Tamże, s. 296
[3] F. Urbańczyk: *Zasady nauczania matematyki.* Warszawa PZWS 1960, s. 79
[4] Tamże, s. 125
[5] Z. Krygowska: *Zarys dydaktyki matematyki.* Warszawa PZWS 1977, cz. 3, s. 18-21
[6] *Zadanie metoda rozwiązanie.* Pod red. A. Góralskiego, Warszawa Wydawnictwo Naukowo-Techniczne 1977, s. 57
[7] G. Polya; op.cit., 266
[8] Z. Cydzik: *Nauczanie arytmetyki w klasach I-IV,* Warszawa 1959, s. 94-94
[9] G. Polya; op.cit., s. 268-271
[10] E. Stucki: *Rozwijanie zdolności matematycznych w nauczaniu początkowym.* Bydgoszcz WSP 1978, s. 77
[11] G. Polya: op.cit., s. 259
[12] Tamże, s. 269
[13] A. Góralski: op.cit., s. 58-62
[14] G. Polya: op.cit., s. 281-283
[15] Tamże, s. 284-288
[16] Tamże, s. 287
[17] Tamże, s. 294-295
[18] A. Góralski: op.cit., s. 66